

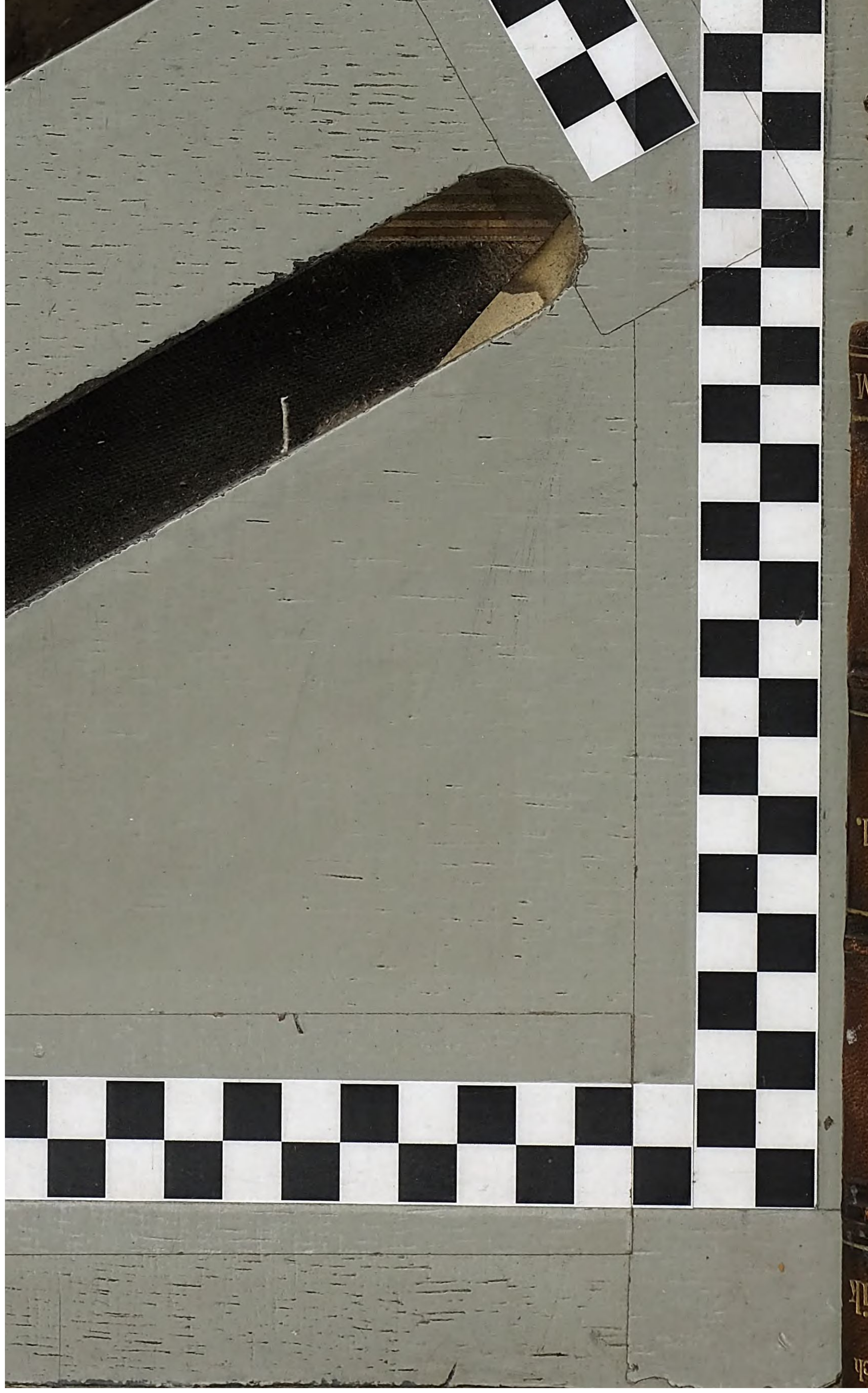
Phys. g.

493

8

J. Violle,
Lehrbuch
der
Physik

II, 1.



Lehrbuch
der
Physik

II, 1.

B.R.M.





Phys. 7.
493^f

Violla

Phys. g. 493 7

Lehrbuch der Physik.

Von

J. Violle,

Professor an der École Normale zu Paris.

Deutsche Ausgabe

von

Dr. E. Gumlich, Dr. L. Holborn, Dr. W. Jaeger, Dr. St. Lindeck.

Zweiter Theil: Akustik und Optik.

Erster Band.

Akustik.

Mit 163 Textfiguren.



Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1893.

Die hervorragend gute Aufnahme, die das im Erscheinen begriffene Viollesche Werk schon vor seiner Vollendung in Frankreich findet, lässt es gerechtfertigt erscheinen, dem deutschen naturwissenschaftlichen Publikum gleichzeitig eine Bearbeitung zu übergeben.

Bei der Mannigfaltigkeit der Ansprüche, die von den verschiedensten Seiten an ein Lehrbuch der Physik gestellt werden, dürfte neben den schon vorhandenen ein neues umfassendes Werk gewiss Vielen willkommen sein.

Nichts kann den Charakter des Buches, das, was es bietet und will, besser zum Ausdruck bringen, als das Vorwort, das Violle seinem Werke beigegeben hat.

Die ausführliche und klare Beschreibung der Apparate und namentlich die für derartige Lehrbücher ungewöhnlich eingehende Berücksichtigung der Technik legen beredtes Zeugnis dafür ab, wie der Verfasser seine Ansichten über die Aufgabe der Physik zu vertreten wusste. Für das eindringende Verständniss und die Würdigung der Leistungen einer Wissenschaft ist die Kenntniss der historischen Entwicklung eines jeden Problems von grosser Bedeutung; dieses historische Moment wird in fesselnder Darstellungsweise besonders betont und ausserdem wird in zahlreichen Litteraturnachweisen zum Quellenstudium aufgefordert.

Durch seine grosse Vielseitigkeit gewinnt das Werk ein hervorragendes Interesse nicht nur für die Physiker von Fach, für Lehrer wie Lernende, sondern zum Theil auch für weitere Kreise, die durch ihren Beruf oder durch Neigung Berührungspunkte mit der Physik haben.

Die deutschen Herausgeber waren, um der eleganten Schreibweise des Autors einigermaassen gerecht zu werden, bestrebt, auch ihrerseits besonderen Werth auf die äussere Form der Darstellung zu legen. In dem Text brauchte, wie es bei einem so einheitlichen und abgerundeten Werke selbstverständlich ist, nicht viel geändert zu werden; dagegen wurden, wo es nöthig erschien, Anmerkungen oder Ergänzungen zugefügt.

Vollständig liegt vor:

Erster Theil: Mechanik.

Erster Band: Allgemeine Mechanik und Mechanik der festen Körper. Preis M. 10,—; in Leinwandband Preis M. 11,20.

Zweiter Band: Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Preis M. 10,—; in Leinwandband Preis M. 11,20.

Zweiter Theil: Akustik und Optik.

Erster Band: Akustik. Preis M. 8,—; in Leinwandband Preis M. 9,20.

Zweiter Band: Optik; befindet sich in Vorbereitung.

Der III. Theil des Lehrbuches „Wärme“ und der IV. Theil „Elektricität und Magnetismus“ werden nach Erscheinen des französischen Originals ausgegeben werden.

Wir empfehlen das Viollesche Lehrbuch den zahlreichen Interessenten angelegentlich.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin N.

Lehrbuch der Physik.

Lehrbuch der Physik

Lehrbuch der Physik

von

J. Violle,

Professor an der École Normale zu Paris.

Deutsche Ausgabe

von

Dr. E. Gumlich, Dr. L. Holborn, Dr. W. Jaeger, Dr. St. Lindeck.

Zweiter Theil: Akustik und Optik.

Erster Band.

Akustik.

Mit 163 in den Text gedruckten Figuren.



Berlin.

Verlag von Julius Springer.

1893.

Lehrbuch der Physik



Inhalt.

Erstes Capitel.

Wesen und Eigenschaften der Töne.

	Seite
324. Wesen der Töne. — Die Tonempfindung wird durch eine Schwingungsbewegung der Materie verursacht. — Der Ton erfordert, um sich bis zu unserem Ohre fortpflanzen zu können, eine ununterbrochene Reihe ponderabler, elastischer Medien .	1
325. Eigenschaften des Tones	5
326. Die Tonstärke	5
327. Die Tonhöhe; Versuche des Pater Mersenne. — Versuche von Chladni	5
328. Periodicität der schwingenden Bewegung, welche einen Ton erzeugt. — Geräusch. — Beispiele von periodischen Bewegungen	7
329. Entstehen des Tones durch eine rasche und gleichmässige Folge von Stößen. — Die Schnarre. — Das Zahnrad. — Der Apparat von Trevelyan. — Die Sirene	10
330. Messung der Tonhöhe	17
331. Graphische Methode. — Chronographische Stimmgabel. — Phonautoskop. — Grammophon. — Phonograph	19
332. Grenzen der hörbaren Töne	27

Zweites Capitel.

Musikalische Intervalle.

333. Musikalische Intervalle	31
334. Consonanzen	31
335. Accorde	33
336. Die Tonleiter. — Die diatonische Tonleiter. — Die pythagoräische Tonleiter. — Die Molltonleiter	34
337. Änderung der Tonart (Transponiren)	39
338. Die musikalische Temperatur	40
339. Die Normal-Stimmgabel	42
340. Akustische Logarithmen	43

Drittes Capitel.

Fortpflanzung des Schalles.

341. Fortpflanzung einer schwingenden Bewegung in einem elastischen Medium	45
342. Flüssigkeitswellen	45
343. Longitudinale und transversale Schwingungen	47
344. Fortpflanzung einer longitudinalen Erschütterung in einem elastischen Cylinder	48
345. Geschwindigkeit des Schalles in der Luft. — Geschwindigkeit in einer Röhre. — Geschwindigkeit in freier Luft	55
346. Experimentelle Bestimmungen. — Die ersten Messungen. — Untersuchungen der Pariser Akademiker. — Die Versuche des Bureau des Longitudes. — Versuche von Moll und van Beck. — Versuche von Regnault	60
347. Schallgeschwindigkeit in den Flüssigkeiten	76
348. Schallgeschwindigkeit in festen Körpern. — Schallgeschwindigkeit in einem Stabe. — Schallgeschwindigkeit in einem unendlich grossen festen Körper	78
349. Fundamentale Beziehung zwischen der Wellenlänge, der Schwingungsperiode und der Schallgeschwindigkeit. — Wellenlänge der gebräuchlichsten Töne	84
350. Reflexion des Schalles. — Gesetze der Reflexion. — Echo, Resonanz. — Luft-Echo; akustische Undurchdringlichkeit der Atmosphäre. — Reflexion des Schalles am Ende eines cylindrischen Rohres	85
351. Brechung des Schalles	92
352. Anwendungen	94

Viertes Capitel.

Interferenz des Schalles.

353. Übereinanderlagerung der Schallwellen	95
354. Princip der Interferenz	96
355. Experimentelle Bestätigung der Interferenz von Schallwellen. — Versuche von Despretz; Apparat von Desains. — Versuche von Hopkins. — Versuche von Lissajous. — Erscheinungen, die bei einer Stimmgabel auftreten. — Gleichzeitiges Schwingen zweier im Einklang befindlicher Pfeifen, die mit demselben Gebläse verbunden sind; manometrische Flammen von König. — Untersuchungen mit der Helmholtz'schen Doppelsirene. — Directes Zusammenwirken zweier Töne, welche eine bekannte Gangdifferenz besitzen. — Messung der Schallgeschwindigkeit in einem Gase nach der Methode der Interferenzen	98
356. Interferenz der directen und der reflectirten Wellen. — Superposition der directen und der reflectirten Bewegung. — Versuche von Savart und von Seebeck. — Anwendungen	109
357. Analytische Behandlung des Interferenzprincips. — Gleichungen, welche die Schwingungsbewegungen darstellen können. — Vereinigung zweier Schwingungsbewegungen von derselben Periode. — Fresnel'sche Regel. — Interferenz der Schallwellen in einer begrenzten Röhre	111

Fünftes Capitel.

Pfeifen.

358. Luftschwingungen in einer Pfeife	121
359. Gesetz von Bernoulli. — Offene Pfeifen. — Gedeckte Pfeifen	122
360. Experimentelle Bestätigung	126
361. Störungen an den Enden. — Ursache derselben. — Theorie von Poisson. — Arbeiten von Hopkins und von Quet. — Versuche von Wertheim. — Theorie von Helmholtz. — Untersuchungen von Bosanquet und König	134
362. Amplitude der Bewegung und Druckschwankungen der Luft in einer Pfeife. — Beobachtungen von Kundt mittelst eines Ventilmanometers. — Stroboskopische Methode. — Versuche von Töpler und Boltzmann. — Arbeiten von Mach	141
363. Weite (kubische) Pfeifen. — Ausnahmen von den Gesetzen von Bernoulli. — Regeln von Savart und Cavallé-Coll. — Ähnliche Pfeifen	145
364. Zungenpfeifen	149
365. Chemische Harmonika	153
366. Empfindliche Flammen	155
367. Messung der Schallgeschwindigkeit in den Gasen mit Hülfe der Pfeifen. — Untersuchungen von Dulong. — Messungen von Masson. — Arbeiten von Wertheim. — Versuche von Kundt	158
368. Messung der Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten mittelst der Pfeifen	165

Sechstes Capitel.

Schwingungen von Saiten.

369. Gesetze der schwingenden Saiten. — Geschichte des Problems. — Gesetze. — Experimentelle Beweise. — Obertöne. — Versuche von Noble und Pigott. — Versuch von Sauveur. — Versuch von Young. — Analogie zwischen den Gesetzen der Saiten und denen der Pfeifen	168
370. Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungszahl	171
371. Versuche von Melde	172
372. Theorie der schwingenden Saite. — Gleichung der schwingenden Saite. — A. Integration durch willkürliche Functionen. — Formel von Taylor. — B. Integration durch trigonometrische Reihen. — Gezupfte Saite. — Angeschlagene Saite. — Die durch den Bogen angestrichene Saite. — Melde'scher Versuch	177
373. Steifigkeit der Saiten	191

Siebentes Capitel.

Schwingende Stäbe.

374. Unterschied zwischen Stäben und Saiten	193
---	-----

I. Longitudinale Schwingungen.

375. Longitudinale Schwingungen der Stäbe. — Gesetze. — Versuche von Chladni, Savart und Biot. — Anwendung auf die	
--	--

	Seite
Musik und auf die Messung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern	193
376: Longitudinale Schwingungen der Saiten	196

II. Transversale Schwingungen.

377. Theorie. — Schwingungszahl und Knoten in sechs verschiedenen Fällen. — Gesetz von Lissajous. — Fortpflanzung der transversalen Bewegung in einem Stabe	198
378. Versuche. — Tonhöhe und Lage der Knoten in sechs verschiedenen Fällen	209
379. Zusammengesetzte Schwingungen; Kaleidophon	214
380. Instrumente mit schwingenden Stäben	214
381. Stimmgabel	215
382. Gleichzeitiges Auftreten von longitudinalen und transversalen Schwingungen von Stäben	219

III. Drehende Schwingungen.

383. Drehende Schwingungen	223
--------------------------------------	-----

Achstes Capitel.

Membranen und Platten.

I. Membranen.

384. Membran. — Definition. — Theorie. — Versuche. — Quadratische und kreisförmige Membranen	224
--	-----

II. Platten.

385. Experimentelle Untersuchung der transversalen Schwingungen von Platten. — Schwierigkeiten des Problems. — Versuchsanordnung. — Klangfiguren. — a) Quadratische Platten. — Regeln von Chladni. — Beobachtungen von Strehlke und von Savart. — Versuche zu einer Theorie. — Erklärung von Wheatstone. — Bemerkungen von Radau. — b) Kreisförmige Platten. — Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. — Mangel an Symmetrie und Belastung der Platte. — c) Beliebige Platten. — Versuche von Chladni und von Savart. — Chladni'sches Gesetz. — Anwendungen	230
386. Glocken	245
387. Ähnliche Systeme	247

Neuntes Capitel.

Zusammensetzung von Wellenbewegungen.

I. Zusammensetzung zweier paralleler Wellen.

388. Schwebungen. — Theorie. — Versuche; Apparat von Lissajous und Desains. — Anwendung auf die Messung der absoluten Tonhöhe	249
---	-----

389. Combinationstöne. — Versuche. — Erklärung von Young. — Helmholtz'sche Theorie. — Musikalische Bedeutung der Com- binationstöne	254
390. Schwebungen der harmonischen Intervalle	257
391. Variationstöne	258
392. Superposition harmonischer Schwingungen	259
393. Fourier'scher Satz	261

II. Zusammensetzung zweier zu einander recht- winkliger Wellen.

394. Theoretische Betrachtung der Superposition zweier zu einander rechtwinkliger Wellen. — Fundamentale Gleichungen. — Gleich- klang. — Harmonische Accorde. — Allgemeiner Fall. — Geo- metrische Darstellung von Lissajous	261
395. Apparate für die Darstellung der Schwingungsfiguren zweier zu einander rechtwinkliger Wellen	268
396. Wheatstone'sches Kaleidophon	268
397. Optische Methode von Lissajous. — Optische Darstellung der Schwingungen einer Stimmgabel. — Optische Darstellung zweier zu einander rechtwinkligen Wellen. — Verschiedene Formen der Lissajous'schen Schwingungsfiguren. — Optischer Com- parator	269
398. Foucault'scher Versuch	275

III. Zusammensetzung einer schwingenden und einer translatorischen Bewegung.

399. Änderung der Wellenlänge durch Verschiebung der Tonquelle oder des Beobachters. — Doppler'sche Formeln	275
400. Messungen über die Änderung der Tonhöhe, die aus der Be- wegung der Tonquelle hervorgeht. — Versuche von Buys- Ballot, Scott und Vogel. — Fizeau'scher Versuch. — Versuche nach der Methode der Schwebungen: König, Schümgel und Quesneville	276

IV. Resonanz.

401. Resonanz	279
402. Fortpflanzung der Schwingungen. — Fortpflanzung durch eine Reihe elastischer Mittel. — Übertragung durch feste Körper. — Messung der Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern. — Gegenseitiger Einfluss	280
403. Resonatoren. — Resonanzkasten. — Menschliches Ohr. — Helm- holtz'sche Resonatoren	284

Zehntes Capitel.

Intensität. — Klangfarbe.

I. Intensität.

404. Physikalische Intensität. — Theoretische Formel. — Messungs- versuche. — Akustische Anziehungen und Abstossungen . . .	286
--	-----

	Seite
405. Physiologische Intensität. — Angenäherte Bestimmung. — Empfindlichkeit des Ohres	289

II. Klangfarbe.

406. Zerlegung eines Klanges in seine Partialtöne nach dem Fourier'schen Satz: Rameau, Monge, Ohm und v. Helmholtz	291
407. Zusammensetzung der musikalischen Klänge	295
408. Einfluss der Phase	296
409. Mechanismus des Hörens	296
410. Die Vocale der menschlichen Stimme	297
411. Theorie der Consonanz. — Die Theorien von Euler, Pythagoras, Sauveur, Euler und Rameau. — Helmholtz'sche Theorie	303

Die Akustik.

Erstes Capitel.

Wesen und Eigenschaften der Töne.

324. Wesen der Töne. — Die Akustik (*ἀκούω*, ich höre) beschäftigt sich mit der Untersuchung der Töne.

In physikalischer Beziehung lässt sich der Ton als eine Schwingungsbewegung definiren, die in einem Körper erregt und zu unserem Ohre durch eine ununterbrochene Reihe ponderabler, elastischer Medien übergeleitet wird.¹⁾

Die Tonempfindung wird durch eine Schwingungsbewegung der Materie verursacht. — Was wir beim Hören eines Tones wahrnehmen, ist die schwingende Bewegung eines materiellen Punktes, der, aus seiner Gleichgewichtslage entfernt, wieder in dieselbe zurückkehrt, sie überschreitet, sodann wieder in entgegengesetzter Richtung dahin zurückkehrt, um sie von Neuem zu verlassen u. s. f. Jede vollständige Schwingung besteht nach der Definition, welche wir für die Pendelbewegung, den Typus der Schwingungsbewegungen, angenommen hatten, aus einem vollständigen Hin- und Rückgange des bewegten Punktes.

Dass in jedem Körper, der einen Ton aussendet, eine schwingende Bewegung aller seiner Theilchen vor sich geht, nehmen wir unmittelbar mit unseren Sinnen wahr: Man *sieht* die Vibrationen einer tönenden Saite, eines Stabes und einer Stimmgabel, oder man bemerkt wenigstens, in Folge der Dauer der Eindrücke auf unserer Netzhaut, gleichzeitig alle Verschiebungen, die zu schnell

¹⁾ Diese Definition deckt sich fast vollkommen mit der von Aristoteles gegebenen: *Γίνεται δ'ὁ κατ' ἐνεργείαν ὁρῶς ἀέρος τινος πρὸς τι καὶ ἐν τινι πληγῇ λόγος ἐστὶν ἡ ποιοῦσα* (Aristoteles, *Περὶ ψυχῆς* 8, 2).

vor sich gehen, als dass man sie einzeln verfolgen könnte: Die Saite verwandelt sich in Folge dessen in eine durchscheinende, an der breitesten Stelle fast durchsichtige Spindel; ein Stab scheint sich fächerförmig auszubreiten, ebenso jede Zinke der Stimmgabel an ihrem oberen Ende. Die Bewegung eines Trinkglases, einer Glocke und einer Stimmgabel, die zum Tönen gebracht werden,

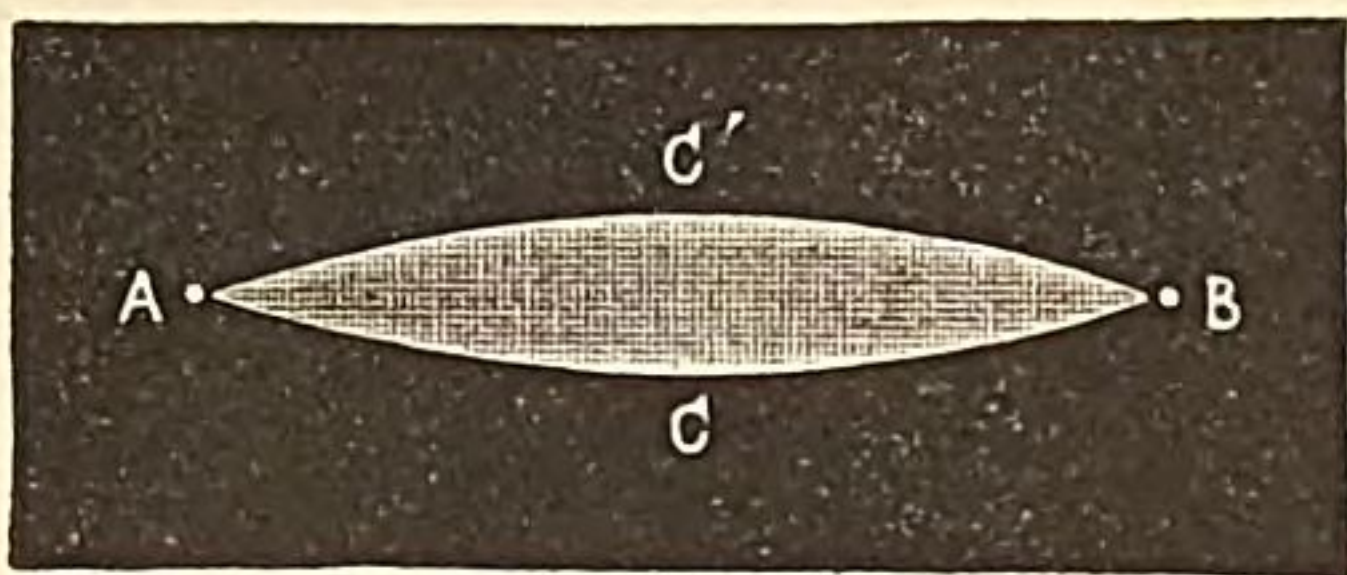


Fig. 1.

fühlt man deutlich bei der Berührung, während der Ton erlischt, sobald die Berührung der Hand die Schwingungen unterbricht. Bringt man eine Spitze in die unmittelbare Nähe einer tönenden Glocke, so *hört* man eine Reihe von Stößen, die in den auf einander folgenden Ausdehnungen und Zusammenziehungen der Glocke ihren Grund haben. Ein ähnlicher Versuch lässt sich mit einem Pendel

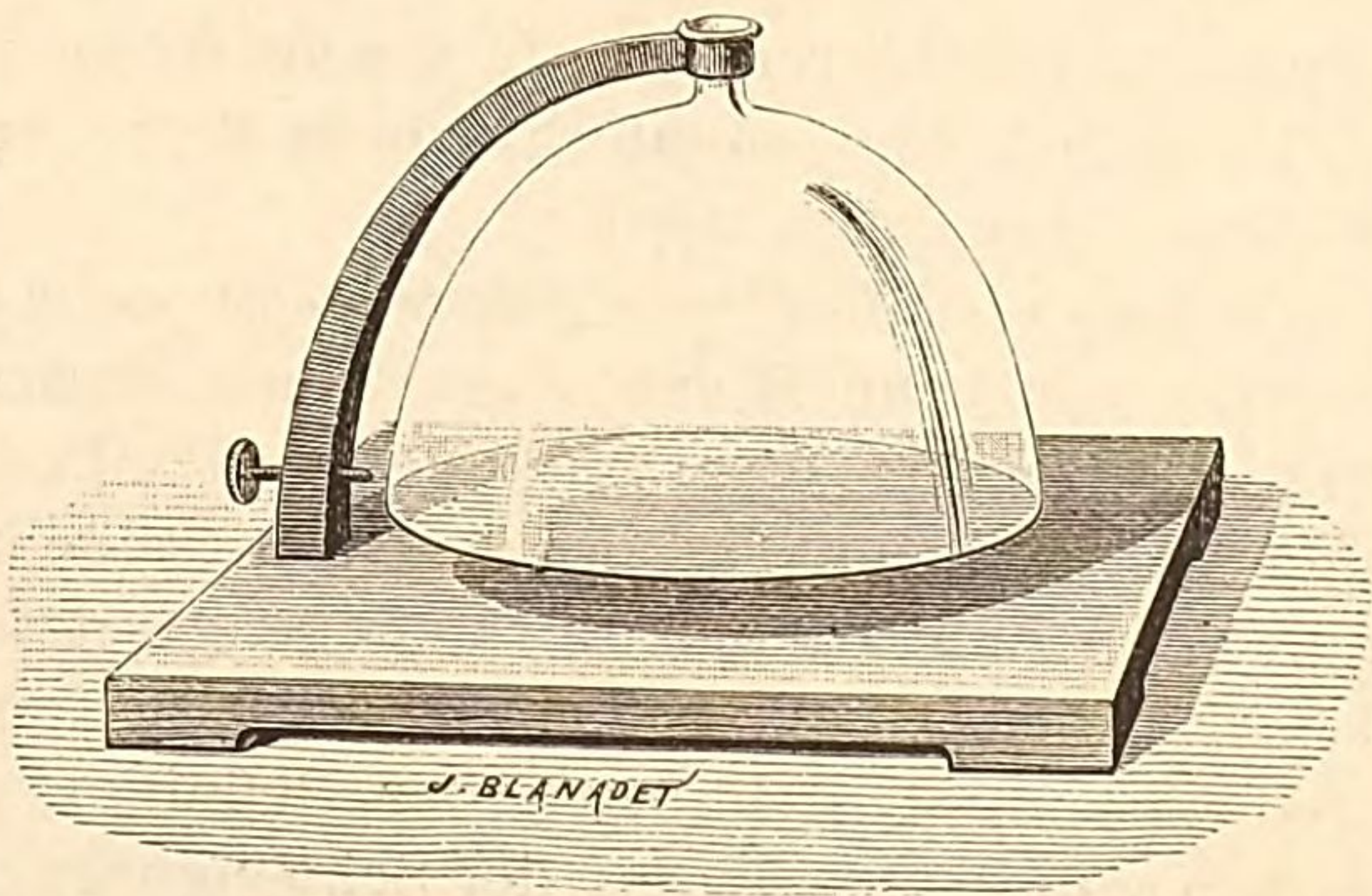


Fig. 2.

anstellen, das man der Glocke oder einem tönenden Stabe, z. B. einer Stimmgabel, nähert: Das Pendel wird fortgeschleudert. Das Aufwirbeln von Sand auf einer Membran, die man in eine tönende Röhre einführt, beweist die schwingende Bewegung der Luft im Innern. Wir werden später die Natur dieser Bewegungen genauer kennen lernen; ihre Existenz ist in allen den Fällen, wo von einem Körper ein Ton ausgeht, durch die angeführten Thatsachen genügend bewiesen.

Der Ton erfordert, um sich bis zu unserem Ohre fortpflanzen zu können, eine ununterbrochene Reihe ponderabler, elastischer Medien. —

Dieser zweite Theil der Definition, der das Vorhandensein eines oder mehrerer ponderabler Medien in fortlaufender Reihenfolge

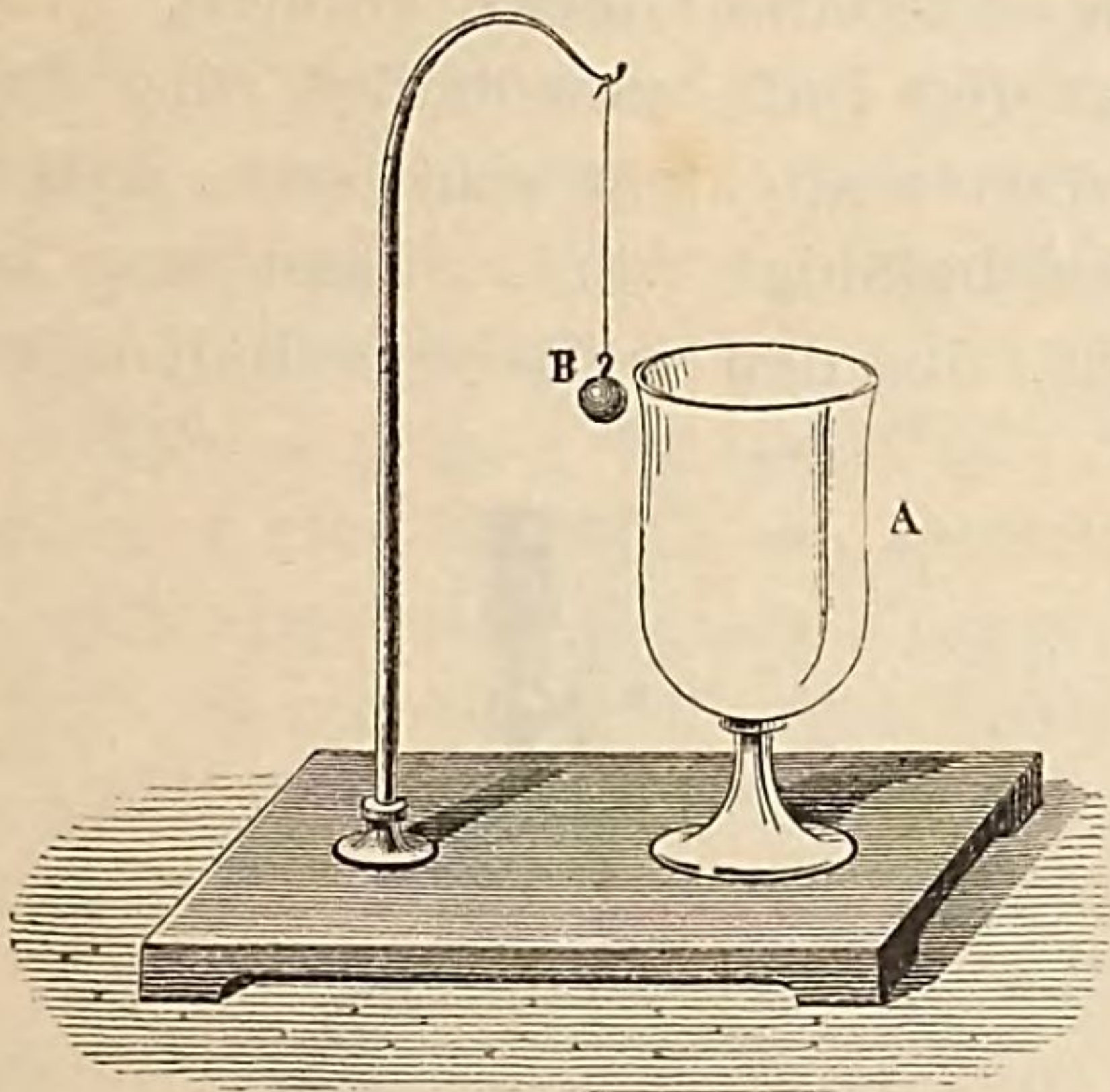


Fig. 3.

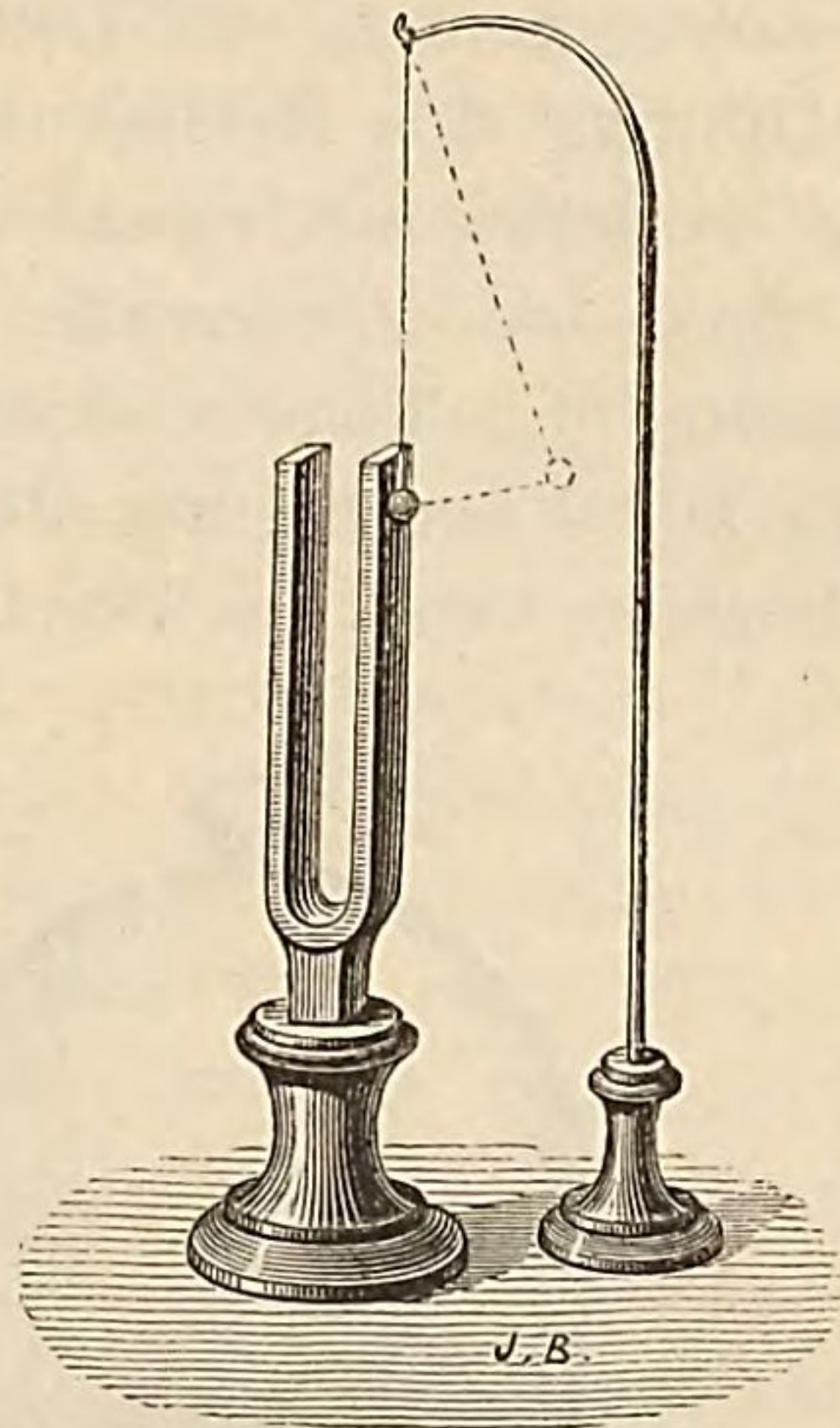


Fig. 4.

zwischen dem tönenden Körper und dem Ohre bedingt, lässt sich leicht nachweisen. Otto v. Guericke¹⁾ hängte im Innern eines

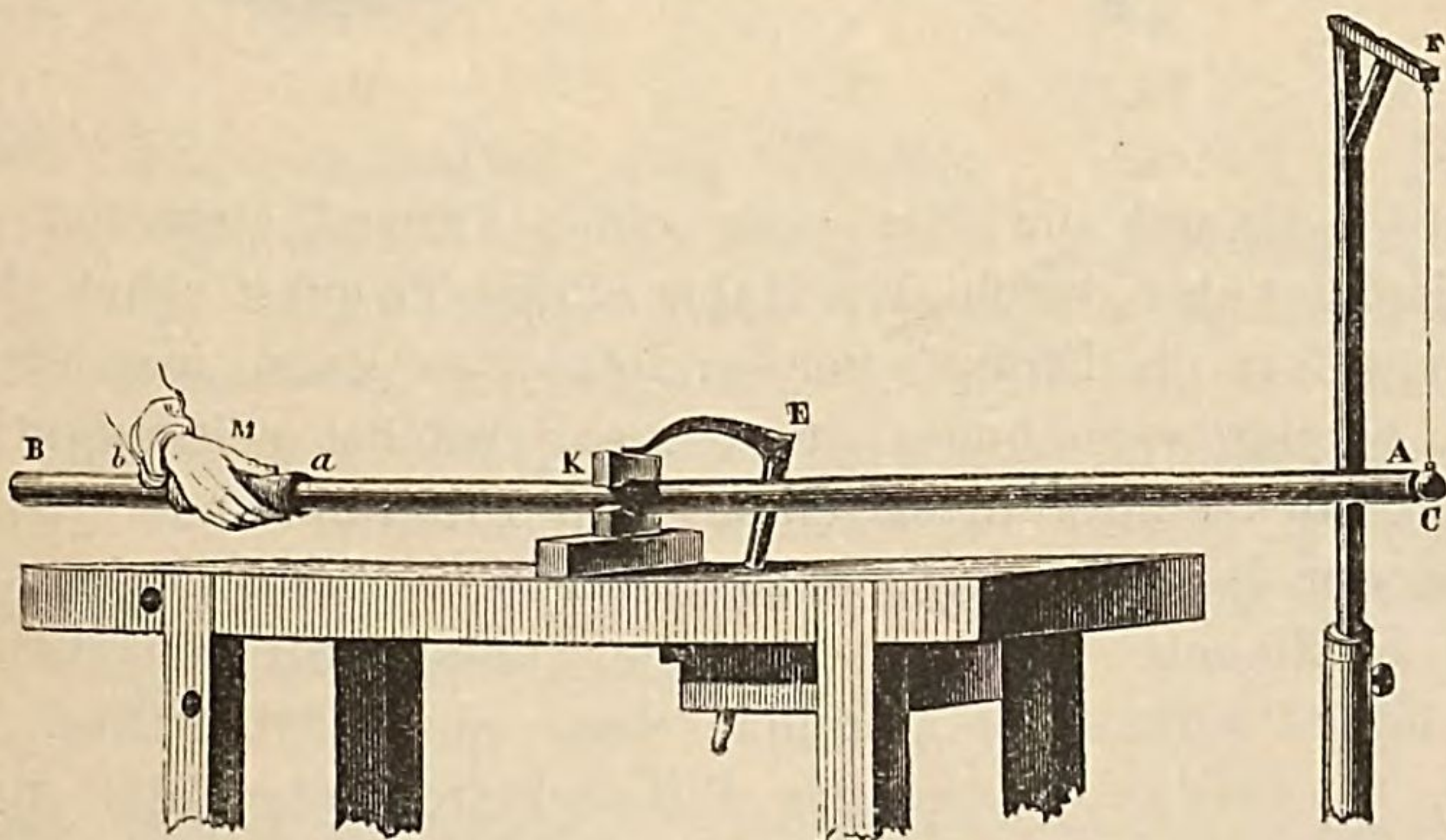


Fig. 5.

Recipienten, den er mit seiner Luftpumpe verband, ein Schlagwerk an einem Faden²⁾ auf und fand, dass die Stärke des Tones in

¹⁾ Otto v. Guericke, *Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica*; Amsterdam 1672.

²⁾ Man muss nothwendigerweise das Schlagwerk möglichst gut isoliren, entweder, indem man es auf einem dicken Kissen aus Watte oder dergleichen ruhen lässt, oder besser, indem man es mittelst eines Fadens befestigt; anderenfalls verschwindet der Ton nicht.

dem Maasse abnahm, als er die Luft auspumpte, und endlich ganz verschwand. Papin¹⁾ machte das Experiment vor den Mitgliedern der Royal Society zu London mit Hülfe einer Pfeife, die er an der Öffnung des Recipienten anbrachte, und Hawksbee wiederholte dasselbe mit einem Ballon, der eine Glocke enthielt.²⁾

Aus dem Umstande, dass die Luft gewöhnlich die Fortpflanzung der Töne vermittelt, darf man nicht schliessen, dass sie allein zur Übertragung derselben befähigt wäre. Lässt man beispielsweise, wie es Biot³⁾ that, in den luftleeren Ballon von

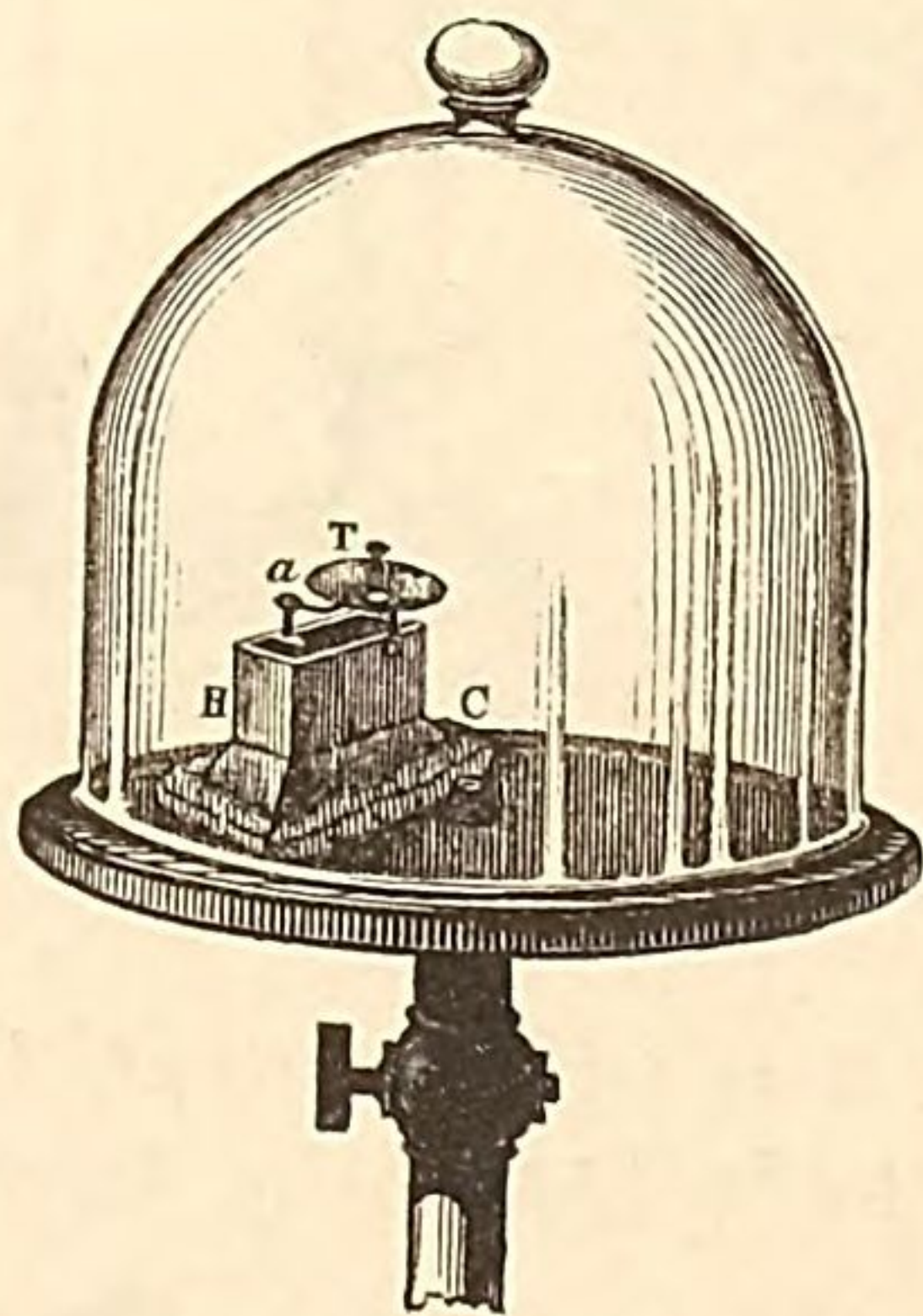


Fig. 6.

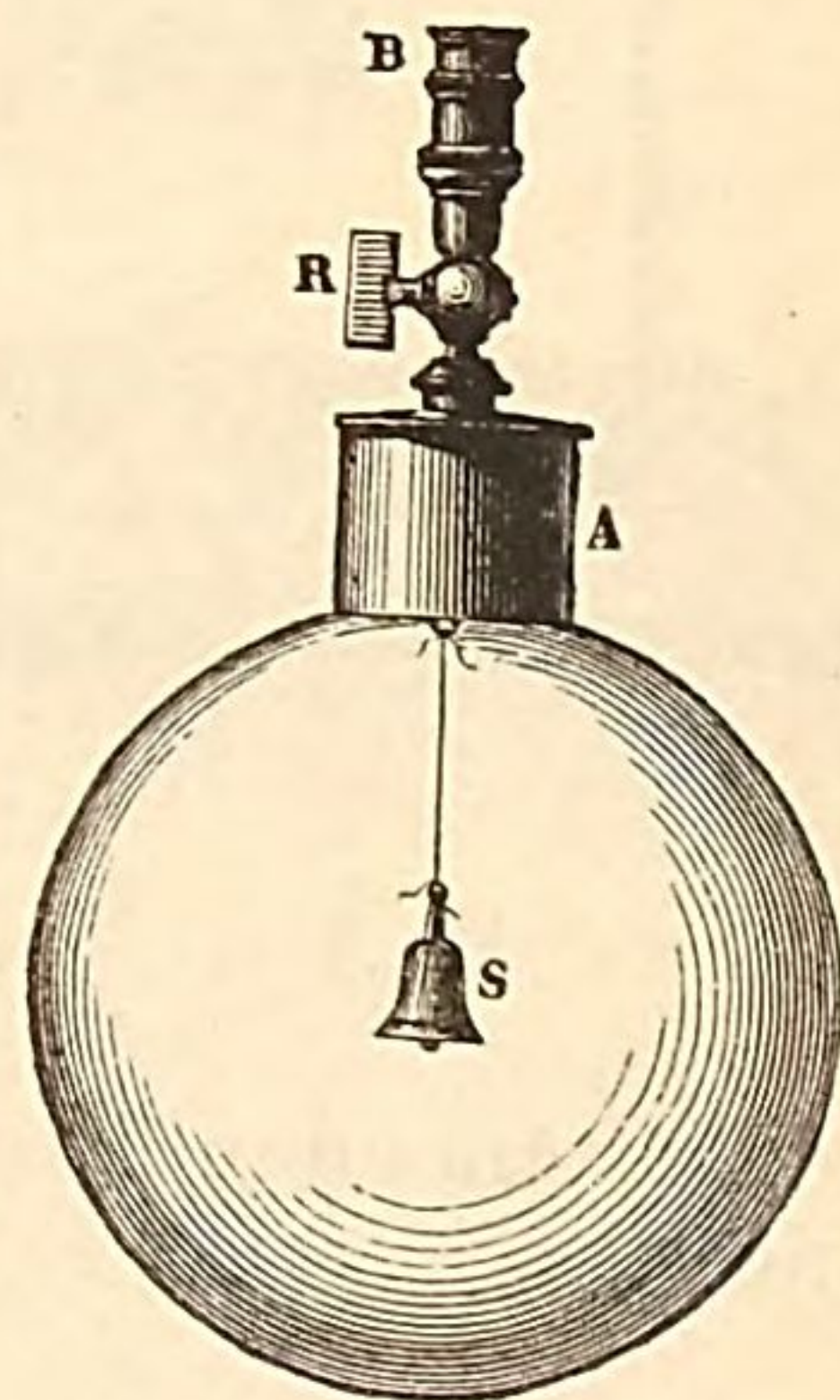


Fig. 7.

Hawksbee irgend ein Gas oder einen Dampf eintreten (indem man beispielsweise durch den Hahn einige Tropfen Äther einführt, die sich sofort in Dampf verwandeln), so kann man den Ton sogleich wieder vernehmen, und zwar wächst seine Stärke mit der Dichte des eingeführten elastischen Fluidums.

Aus der Beobachtung, dass die Fische beim geringsten Geräusche entfliehen, andererseits aber auch auf den Ton einer Glocke oder Pfeife herbeikommen, wenn sie gezähmt sind, schloss Otto v. Guericke, dass die Flüssigkeiten ebenfalls den Ton weiter zu leiten vermögen. In der That hört man, wenn man

¹⁾ Papin, Bericht der Sitzung der Royal Society vom 23. Februar 1685, in Birch, History of the Royal Society 4; London 1757.

²⁾ Er machte auch den umgekehrten Versuch, indem er Luft in dem Ballon comprimirte und zeigte, dass der Ton dann stärker wird (Hawksbee, Phil. Trans.; 1705). Hawksbee, der als „curator of experiments of the Royal Society“ auf Hooke folgte, stellte seine Untersuchungen in seinem Werke Physico-mechanical experiments, London 1709, zusammen.

³⁾ Biot, Traité de physique 2, 4; Paris 1816.

den Kopf unter Wasser hält, vollkommen deutlich das ferne Rollen der Kiesel und unterscheidet selbst die ausserhalb des Wassers gesprochenen Worte, wenn auch stark geschwächt, da nur ein Theil des Tones durch die Trennungsfläche beider Medien dringen kann. Ebenso leiten die elastischen festen Körper den Schall vorzüglich: Das Ohr vernimmt, gegen den Boden gedrückt, aus grosser Entfernung den Donner der Kanonen, das Rollen eines Wagens und das Stampfen der Pferde. Bemerkenswerth ist ferner die Leitungsfähigkeit des Holzes für den Schall: den leichten Stoss eines Stecknadelkopfes gegen das eine Ende eines langen Balkens aus Tannenholz hört man deutlich am anderen Ende. Im Gegensatze hierzu pflanzen die unelastischen Körper, wie Watte, Baumwolle, Flaumfedern, Sägespähe etc. den Schall sehr schlecht fort. Teppiche dämpfen das Geräusch, und eine dicke, gewebte Portiere lässt nichts von dem hören, was im benachbarten Zimmer vor sich geht.

Diese allgemein bekannten Thatsachen beweisen, dass der Schall durch jedes elastische ponderabele Mittel fortgepflanzt werden kann. Im leeren Raume jedoch breitet er sich nicht aus. Die Räume, welche die Himmelskörper trennen, sind in ewiges Schweigen gehüllt, und von den fürchterlichsten Umwälzungen auf einem Gestirne würde auf sämtlichen anderen nichts zu hören sein.

325. Eigenschaften des Tones. — Der Ton wird also durch eine schwingende Bewegung der ponderabelen Materie hervorgerufen. Eine solche kann aber, je nach der Amplitude, nach der Dauer der Schwingung und nach der Gestalt der von jedem Punkte des schwingenden Systems durchlaufenen Bahn, unendlich viele Unterschiede darbieten. Diesen verschiedenen Bedingungen entsprechen die verschiedenen Eigenschaften des Tones: *Stärke*, *Höhe* und *Klangfarbe*.

Amplitud. *Töne* *geschwächt* *höher*

326. Die Tonstärke. — Die Stärke des Tones hängt augenscheinlich von der Amplitude der Schwingungen ab: Je stärker die Saite von dem Violinbogen angestrichen wird, je heftiger der Klöppel die Glocke trifft, desto mächtiger schallt der Ton; umgekehrt wird er bei gleichbleibender Tonhöhe stets in demselben Maasse schwächer, als die Schwingungsweite abnimmt, um schliesslich gleichzeitig mit der Bewegung vollkommen zu erlöschen.

327. Die Tonhöhe. — Die Höhe des Tones ist durch die Anzahl der Schwingungen in der Secunde bestimmt.

Versuche des Pater Mersenne. — Pater Mersenne spannte eine Hanfschnur aus, die so lang war (30 m), dass er mit dem Auge leicht den Verschiebungen folgen konnte: Die Schnur gab dann allerdings gar keinen Ton, wohl aber liess sich die Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit zählen. Er verkürzte sodann die Länge der Schnur auf die Hälfte und fand, dass sie nun in derselben Zeit die doppelte Zahl von Schwingungen ausführte; nahm er nur den dritten, vierten . . . Theil der Länge, so wurden die Schwingungen drei, vier Mal so schnell, und er kam so zu dem Schlusse, dass unter sonst gleichen Verhältnissen die Schwingungszahl einer Saite ihrer Länge umgekehrt proportional ist. Wurde die Schnur genügend verkürzt, so gab sie auch einen Ton von sich, und zwar stieg, wie man schon wusste, die Höhe desselben in dem gleichen Verhältnisse, als man die Schnur verkürzte. Hierdurch war der Beweis geliefert, dass die Tonhöhe mit der Anzahl der Schwingungen zunimmt. Diese Schwingungszahl lässt sich immer aus der Länge der schwingenden Saite bestimmen. Hierauf beruht das Princip des *Sonometers*, dessen specielle Form *Monochord* genannt wird, wenn es nur eine einzige Saite trägt, was für die vorliegenden Untersuchungen ausreichend ist.¹⁾

*Versuche von Chladni.*²⁾ — Man kann denselben Versuch mit einem elastischen Stabe ausführen, den man in einem Schraubstocke festklemmt (Fig. 8). Ist der Stab zunächst so lang, dass sich die Schwingungen zählen lassen, so findet man, dass die Anzahl der Schwingungen in einer Secunde dem Quadrate der Länge des schwingenden Theiles umgekehrt proportional ist; verkürzt man nach und nach den Stab, so wächst auch fortwährend die Höhe des Tones, den er hervorbringt. Chladni hatte sogar gehofft, auf diesem Wege tönende Körper zu erhalten, deren Schwingungszahlen bekannt wären und mit deren Hülfe man leicht die Schwingungszahl irgend eines Tones bestimmen könnte.

¹⁾ Diese Versuche sind in dem umfangreichen Foliobande des Pater Mersenne, *Harmonie universelle*, Paris 1636, beschrieben. Andererseits wurde die Beziehung zwischen Schwingungszahl und Tonhöhe von Galilei in seinen *Gesprächen über zwei neue Wissenschaften* angegeben, welche durch die Elzevir im Jahre 1638 in Leyden veröffentlicht wurden, aber bereits viel früher verfasst worden waren. Es lässt sich schwer entscheiden, wer thatsächlich diese grundlegende Beziehung zuerst erkannt hat. Sie machte das Studium der Töne, das bis dahin nur von physiologischen Gesichtspunkten aus betrachtet worden war, auch der Physik zugänglich.

²⁾ Chladni, *Traité d'acoustique*, franz. Ausg., p. 9; Paris 1809.

Aber das Gesetz, das er zu Grunde legte, erfährt bei der praktischen Anwendung Störungen, welche das ganze Verfahren ungenau machen.

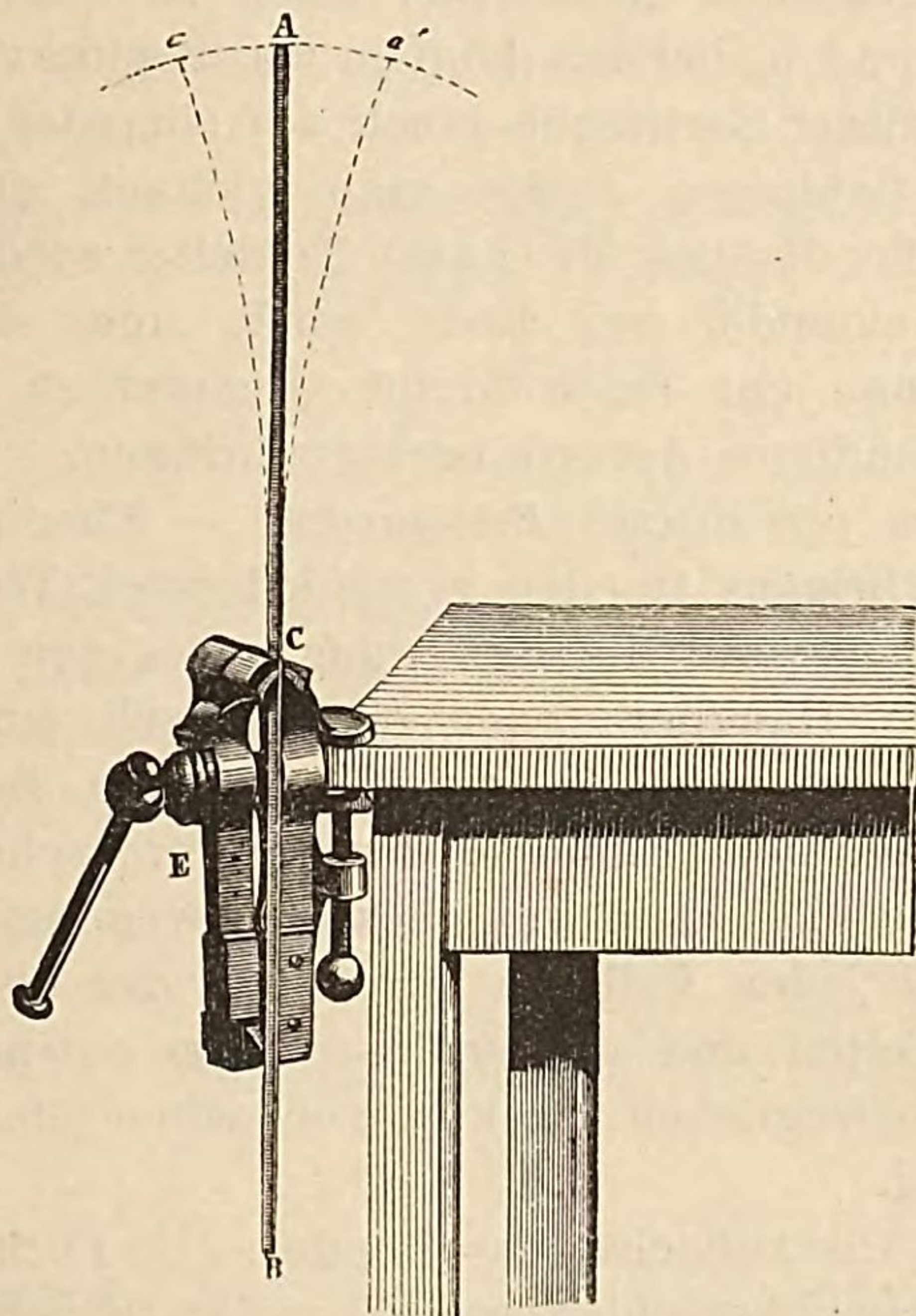


Fig. 8.

328. Periodicität der schwingenden Bewegung, welche einen Ton erzeugt. — Die Methode des Pater Mersenne zeigt ausserdem, dass die Schwingungen der Saite *periodisch* sind, dass der Körper also immer nach Verlauf ein und derselben Zeit, welche man mit dem Namen *Periode* bezeichnet, in den Anfangszustand zurückkehrt. Gerade diese Periodicität charakterisirt den eigentlichen musikalischen Ton, während das Geräusch aus einer Reihe von zusammenhangslosen Erschütterungen besteht: So dringt beim Dröhnen des Sturmes, beim Rollen eines Wagens, beim Rauschen der Blätter im Walde ein Chaos von Tönen an unser Ohr, die sich regellos mischen und überstürzen, so dass man hierbei von einer Tonhöhe eigentlich gar nicht mehr sprechen kann.

Geräusch. — In allen Fällen, wo der Charakter der Tonhöhe zu fehlen scheint, sprechen wir von einem Geräusche, wenn auch bisweilen der Grund dafür, dass wir die Tonhöhe nicht bestimmen können, lediglich in der kurzen Dauer der Schwingungen zu suchen

ist. Thatsächlich ist das Geräusch, das wir beim Aufschlagen des Hammers auf dem Amboss, beim Abfeuern einer Pistole, beim Entkorken einer Flasche vernehmen, ein richtiger Ton, dessen Höhe ein aufmerksamer Beobachter auch zu bestimmen vermag. Am leichtesten und sichersten können wir uns hiervon überzeugen, wenn mehrere dieser Geräusche rasch auf einander folgen. In den physikalischen Cabineten findet man vielfach eine Reihe von Täfeln, welche deutlich die ganze Tonleiter wiedergeben, wenn man sie nach einander zur Erde wirft, und eine Reihe von Flaschen, die man nur rasch hinter einander zu entkorken hat, um einen vollständigen Accord hervorzubringen.

Beispiele von periodischen Bewegungen. — Eine periodische Bewegung kann übrigens in der verschiedensten Weise entstehen: So gehört beispielsweise die Bewegung eines von einem Wasserrade getriebenen Hammers oder eines durch ein Netz zurückgeschlagenen Balles ebenso hierher, wie die Bewegung eines Pendels, das unter dem Einflusse der Schwere schwingt u. s. w.

Um ein deutliches Bild von diesen Bewegungen zu erhalten, zeichnen wir für jeden Fall die Curve, bei der als Abscissen die verschiedenen Zeiten und als Ordinaten die entsprechenden Entfernungen des beweglichen Punktes von seiner Gleichgewichtslage aufgetragen sind.

Betrachten wir zunächst das Pendel: Die Formel, welche die Beziehung zwischen Ausschlag und Zeit darstellt (86) ist gegeben durch

$$\Theta = a \cos ct$$

(wobei $c = \text{Const.}$), oder, wenn man den Beginn der Bewegung um $\frac{\pi}{2c}$ zurückverlegt,

$$\Theta = a \sin ct.$$

Unsere die Bewegung darstellende Curve ist also eine Sinuslinie. In Fig. 9 ist die Periode $eg = \frac{2\pi}{c} = \tau$ in zwölf gleiche Theile getheilt: Der bewegliche Punkt, der von der Gleichgewichtslage e ausgeht, entfernt sich von ihr bis zur Zeit $\frac{3}{12}\tau$, wo er seine grösste positive Entfernung a erreicht hat, dann nähert er sich dieser Gleichgewichtslage wieder, passirt sie zur Zeit $\left(\frac{6}{12}\tau\right)$, entfernt sich wieder bis zum Maximum des Ausschlages ($-a$), kommt zurück, und ist endlich, nach dem Verlauf der Zeit τ , wieder beim Ausgangs-

punkte angelangt; von da ab beginnt dieselbe Bewegung von Neuem. Diese Bewegung lässt sich recht anschaulich machen, wenn man in horizontaler Richtung über die Figur hinweg ein

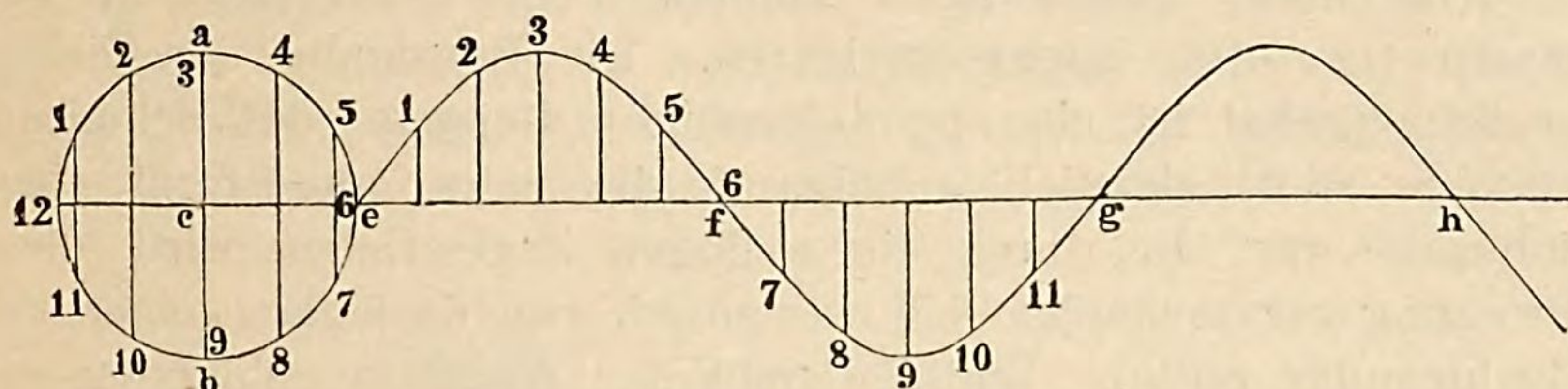


Fig. 9.

Stück Carton gleiten lässt, das mit einem engen, verticalen Spalt versehen ist, welcher nur einen einzigen Punkt der Curve zu sehen gestattet: Der Punkt wird sich längs des Spaltes ebenso verschieben, wie der bewegliche Punkt auf der Curve.¹⁾

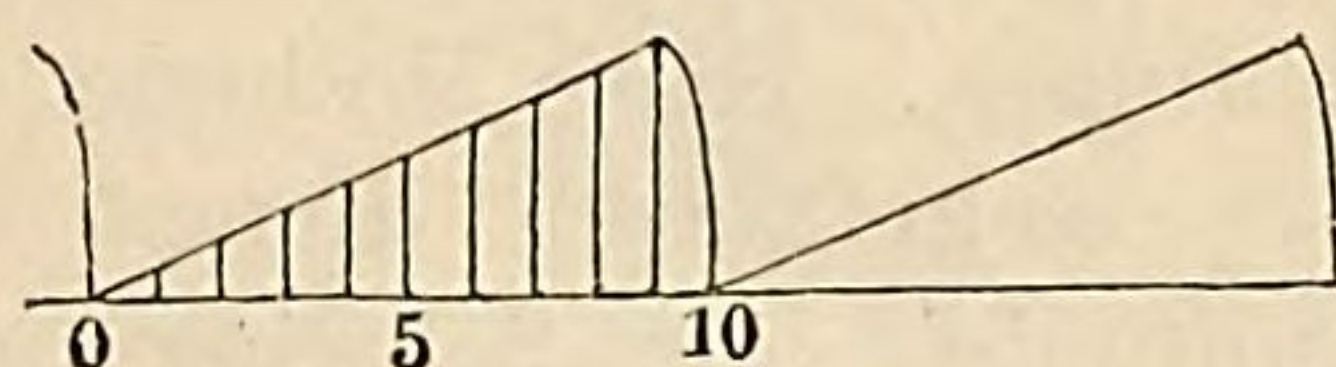


Fig. 10.

Fig. 10 stellt die Bewegung eines Schmiedehammers dar, der während $\frac{9}{10}$ der Periode aufsteigt und plötzlich während des letzten Zehntel zurückfällt.

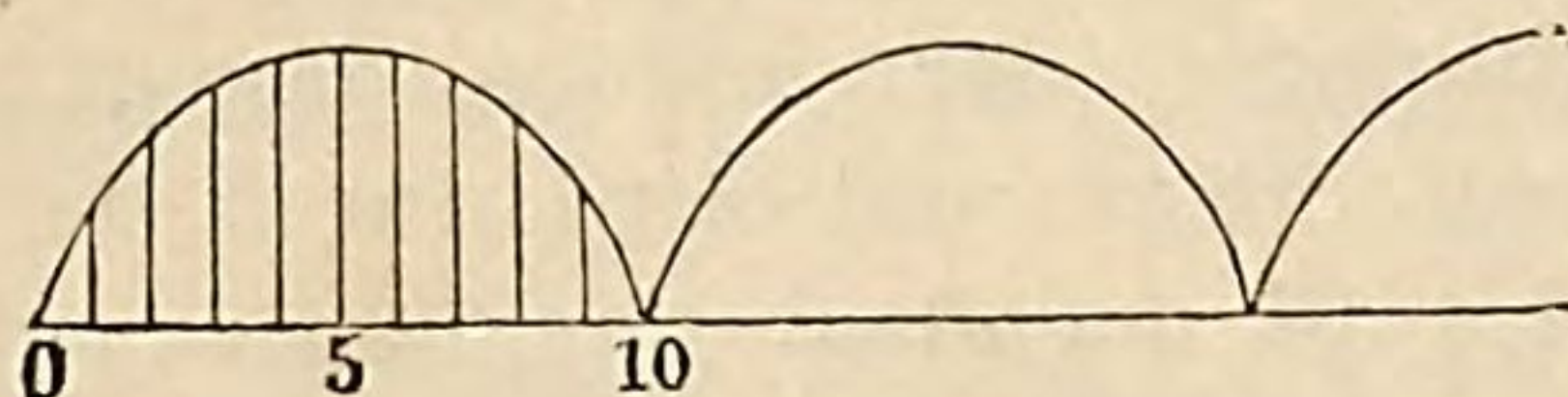


Fig. 11.

Für den von dem Schlagnetz getroffenen Ball besteht die Bewegungscurve aus einer Reihe von parabolischen Bögen (Fig. 11), die in Bezug auf die grösste Ordinate symmetrisch sind (**84**); der

1) Man kann sich die Pendelbewegung auch so versinnbildlichen, dass man sich denkt, ein Punkt a durchlaufe mit gleichförmiger Geschwindigkeit einen Kreis c , den wir uns in grosser Entfernung aufgestellt denken, und zwar so, dass er als gerade Linie erscheint. Dann wird sich der Punkt längs des Durchmessers ab nach demselben Gesetze auf und ab bewegen, welche der Pendelschwingung zu Grunde liegt (86).

Übergang von einem Bogen zum nächsten findet ganz plötzlich statt, und zwar in dem Augenblicke, wo der Ball einen Schlag erhält, der ihn wieder nach oben treibt.¹⁾

Alle diese Bewegungen können Töne hervorbringen, nur müssen sie rasch genug verlaufen. Die Bewegung der Zinken der Stimmgabel ist eine pendelförmige, diejenige des Schmiedehammers stellt ziemlich annähernd die Schwingungsform einer Violine dar, die durch einen Bogen angestrichen wird (diese Bewegung unterscheidet sich wesentlich von derjenigen einer freischwingenden Saite). Endlich giebt der von dem Schlagnetz geschleuderte Ball ein Bild für die Bewegung der Luft, die durch einen plötzlichen Stoss in der Sirene oder an dem Zahnrad aus ihrer ursprünglichen Lage getrieben wird (329).

329. Entstehen des Tones durch eine rasche und gleichmässige Folge von Stössen. — Man kann thatsächlich mittelst einer regelmässigen und hinreichend raschen Folge von Stössen Töne hervorbringen. Diese Methode, welche übrigens zur Bestätigung des oben Angeführten dienen kann, gestattet uns ausserdem noch unmittelbar die Schwingungszahl der Töne zu bestimmen.

Die Schnarre. — Versetzt man beispielsweise eine Schnarre in rasche Umdrehungen, so hört man dauernd einen Ton, oder, genauer gesagt, zwei verschiedene Töne: Der eine derselben wird durch das schwingende Plättchen selbst hervorgebracht, er hängt also von der Beschaffenheit des betreffenden Instrumentes ab, nicht aber bei einem und demselben Instrumente von der Umdrehungsgeschwindigkeit; der andere dagegen beruht auf der Wiederholung dieser Stösse und wird durch deren Anzahl in der Secunde bestimmt. Je nachdem nun das schwingende Plättchen hart und dick ist, oder dünn und biegsam, wird der eine Ton den anderen überwiegen.²⁾ Man kann es sogar leicht so einrichten, dass der durch die Wiederholung der Stösse hervorgebrachte Ton fast allein zu hören ist.

¹⁾ Diese Beispiele und Figuren sind dem bekannten Werke von H. v. Helmholtz, „Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik“ entnommen.

²⁾ Dies lässt sich leicht mit den beiden Schnarren von Marloye bestätigen: Bei der einen ändert sich der Ton nicht mit zunehmender Umdrehungsgeschwindigkeit, aber er sinkt um eine Quinte, wenn man das Bodenstück der Schnarre öffnet; bei der anderen nimmt die Tonhöhe regelmässig mit wachsender Geschwindigkeit zu.

Das Zahnrad. — Ähnlich verhält es sich mit dem Zahnrad von Savart,¹⁾ dessen in gleichen Abständen angebrachte Zähne gegen ein kurzes Stückchen Cartonpapier schlagen. Der Apparat besitzt gewöhnlich vier Zahnräder, bei denen sich die Anzahl der Zähne wie 4:5:6:8 verhält (hierdurch wird ein vollkommener Accord bestimmt). Ertheilt man dem ganzen System nach und nach verschiedene Geschwindigkeiten und hält das

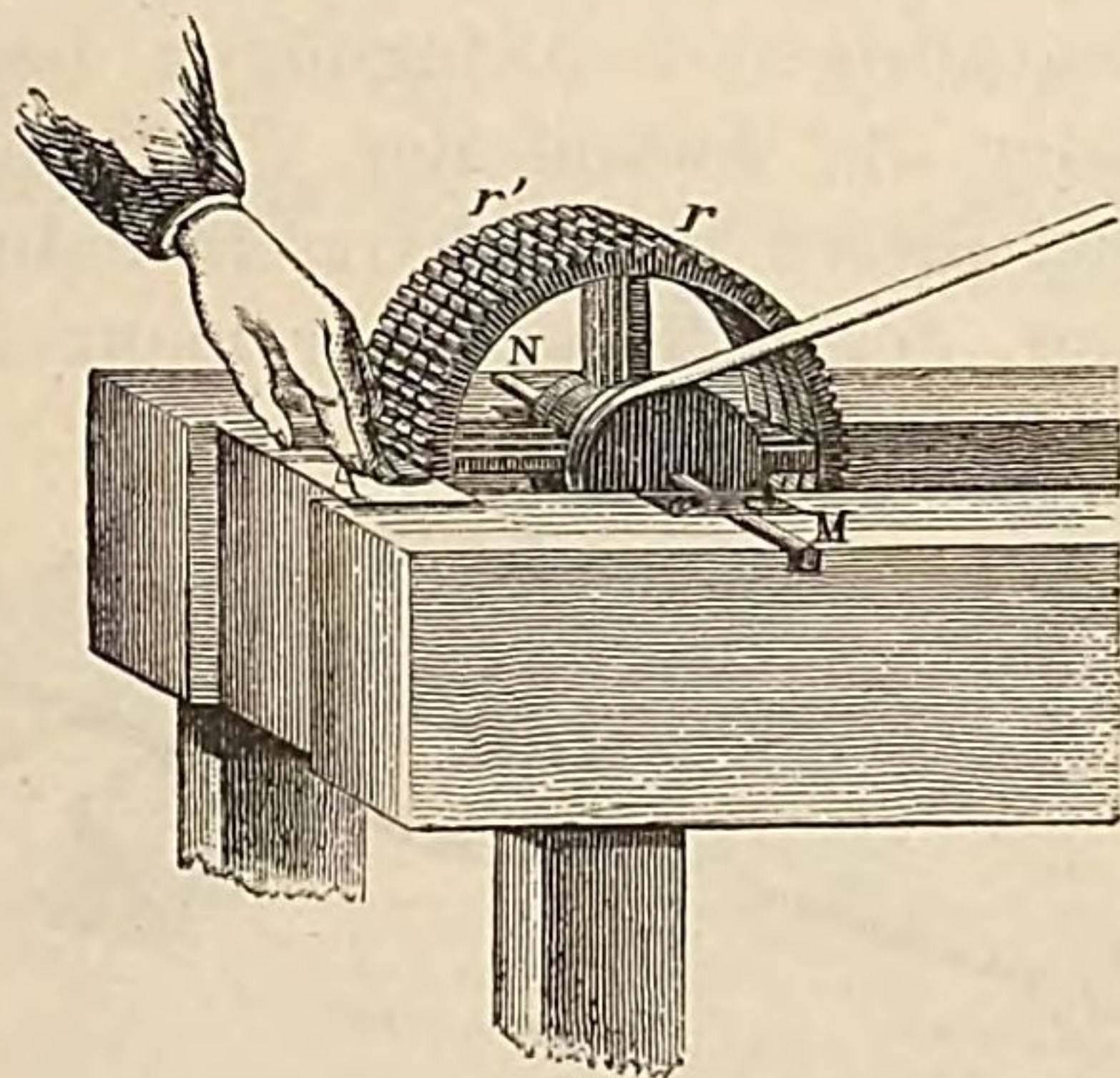


Fig. 12.

Kartenblatt vor die verschiedenen Räder, so erkennt man leicht ohne Zuhülfenahme einer Messung, dass die Tonhöhe sowohl mit der Umdrehungsgeschwindigkeit wie mit der Anzahl der Zähne, d. h. mit der Anzahl der Schwingungen in der Secunde, wächst. Die Schwingungszahl des erzeugten Tones ist in der That gleich der Anzahl der zu Stande gekommenen Stösse, und diese ist wieder das Product aus der Zahl der Zähne des Rades²⁾ in die

¹⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), 44, 337; 1830. Schon Hooke hatte vor der Royal Society zu London im Jahre 1681 Experimente angestellt, welche die Erzeugung eines Tones mit Hülfe von Zahnrädern zum Gegenstande hatten, und Stancari zeigte im Jahre 1706 in der Academie von Bologna, dass ein auf der Peripherie mit langen Nägeln besetztes grosses Rad beim Rotiren in der Luft einen Ton erzeugte, dessen Höhe mit der Umdrehungsgeschwindigkeit zunahm und dessen Schwingungszahl in der Secunde sich leicht berechnen liess, wenn man die Umdrehungsgeschwindigkeit kannte.

²⁾ Als Savart die Zähne von einem Theile der Peripherie entfernte, brauchte er nur zwei benachbarte Zähne in ihrer ursprünglichen Entfernung stehen zu lassen, um den allerdings intermittirend gewordenen Ton in derselben Höhe zu erhalten, wie in dem Falle, wo sämtliche Zähne vorhanden waren, aber er konnte hierbei nicht bestimmen, um welche Zeit der Gehöreindruck die physikalische Erscheinung, die ihn hervorruft, überdauert.

Anzahl der Umdrehungen pro Secunde. Letztere lässt sich nun mit Hülfe eines Tourenzählers bestimmen (ähnlich demjenigen, der später bei der Sirene beschrieben werden soll). Bei grösseren Geschwindigkeiten wandte Savart statt dessen noch ein zweites, auf derselben Achse befestigtes Rad an, das eine dreissig oder vierzig Mal geringere Anzahl von Zähnen trug. Da der Ton dieses zweiten Rades viel tiefer war, konnte man ihn leicht mit einem Tone auf dem Monochord zum Einklange bringen und dann die Anzahl der zugehörigen Schwingungen bestimmen, woraus sich rückwärts wieder die Anzahl der Umdrehungen des Rades berechnen liess. Bei diesen grossen Geschwindigkeiten lässt sich übrigens das Zahnrad, dessen Ton immer mangelhaft bleibt, über-

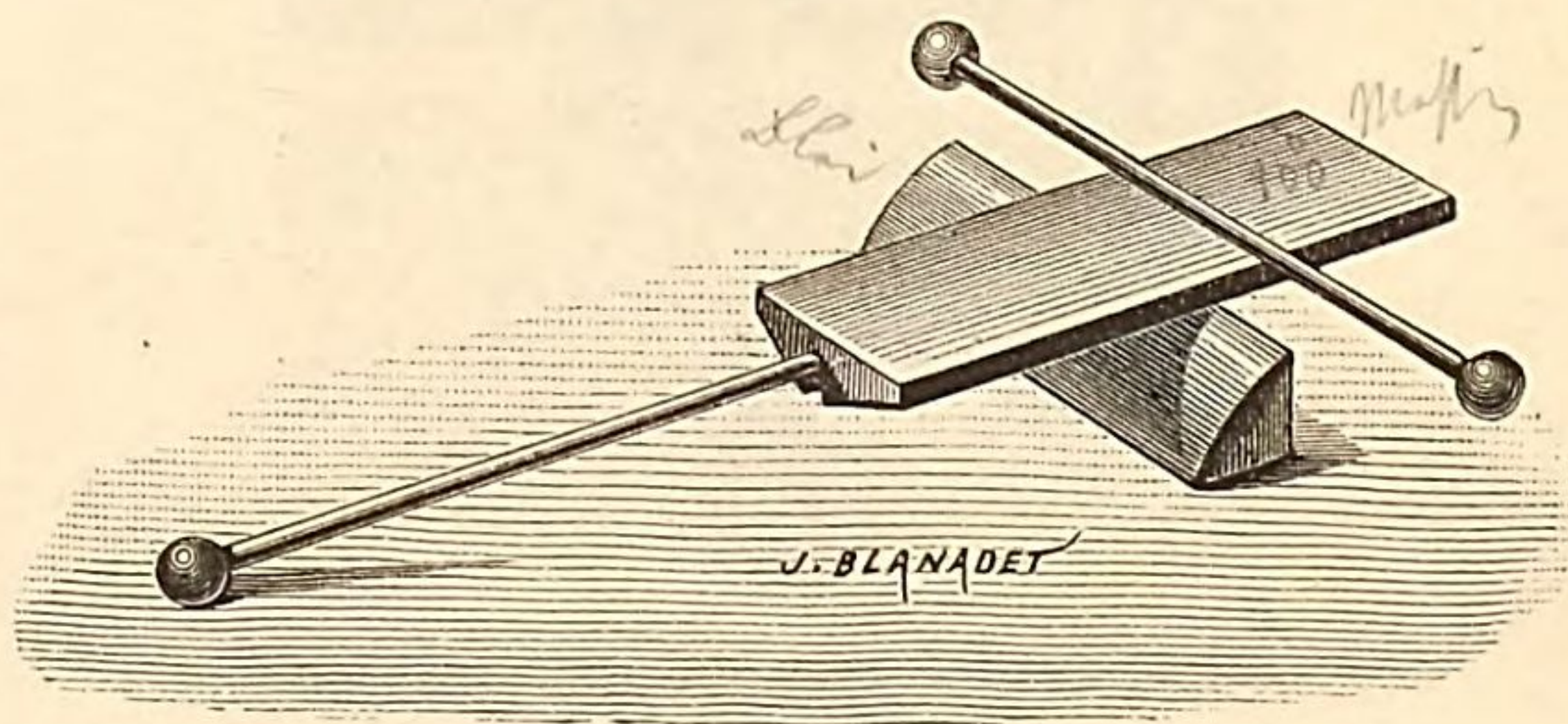


Fig 13.

haupt nicht mehr verwenden: Die Stärke des Tones nimmt bedeutend ab, während gleichzeitig die Messung der Schwingungszahlen sehr ungenau wird, da man keinen Beweis dafür hat, dass das von einem Zahne getroffene Kartenblatt Zeit hatte, wieder in seine ursprüngliche Stellung zurückzukommen, ehe es von dem folgenden Zahne erfasst wurde.

Apparat von Trevelyan. — Ein interessantes Beispiel von einem Tone, der durch eine Reihe von Stössen hervorgebracht wird, liefert uns der Trevelyan'sche Versuch.¹⁾ Ein dreieckiges Prisma aus Messing (Fig. 13), das an der unteren Kante mit einer Rinne versehen ist, wird auf etwas über 100° erhitzt und auf die Kante eines Bleiblockes gelegt: Sofort entsteht ein Ton, während das Prisma

¹⁾ Diese Erscheinung soll zuerst in einer sächsischen Giesserei im Jahre 1805 durch einen gewissen Schwartz beobachtet worden sein, der einen Barren heisses Silber auf einen Amboss gelegt hatte und höchst erstaunt war, als derselbe zu tönen begann. Im Jahre 1829 fand Trevelyan zufällig dasselbe Phänomen wieder, als er ein zu schmiedendes Stück Eisen auf einen Bleiklotz legte; er wiederholte das Experiment, indem er es verschiedenfach veränderte, und gab ihm seine jetzige Gestalt (vgl. Tyndall, Wärme, Anm. zu Vorlesung 4).

deutlich oscillirt. Berührt nämlich einer der Ränder der Rinne den Block, so bringt die Hitze, die von dem Prisma dem Berührungspunkte zugeführt und wegen der schlechten Leitungsfähigkeit des Bleies nur langsam abgeleitet wird, eine plötzliche Ausdehnung und Erhebung hervor, in Folge dessen das Prisma auf die andere Kante wippt, wo sich dasselbe Spiel wiederholt. Das Prisma wird also abwechselnd von rechts nach links und von links nach rechts geworfen, und die Aufeinanderfolge der kleinen

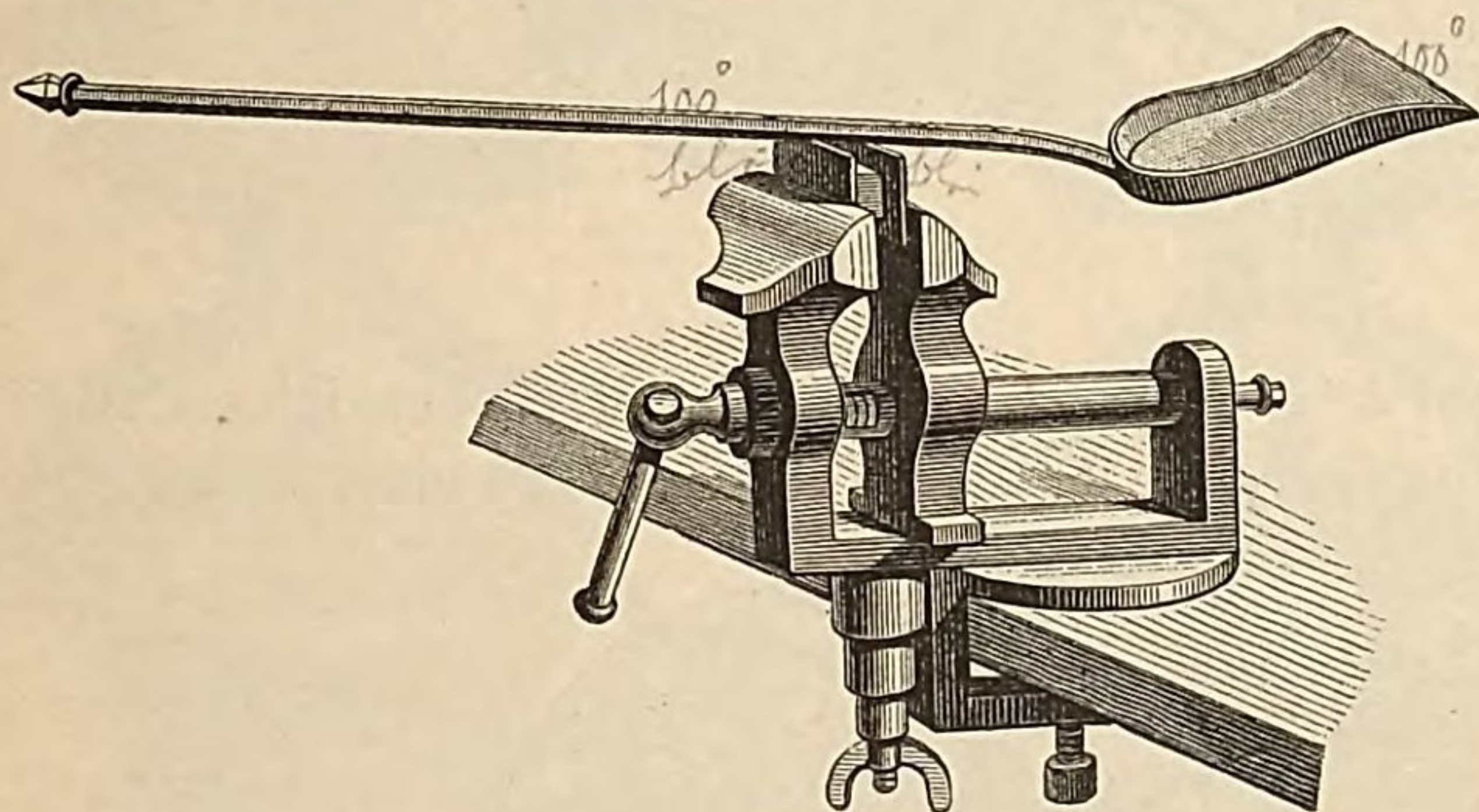


Fig. 14.

Stösse gegen den Bleiklotz verursacht einen musikalischen Ton, dessen Höhe abnimmt, wenn man die Schwingungen durch ein aufgelegtes Gewicht verlangsamt. Tyndall machte den Versuch mit einer Feuerschaufel, die er in erhitztem Zustande auf zwei in einem Schraubstocke festgeklemmte Bleiplatten legte (Fig. 14). Aber auch ein einfacher Ring oder ein erhitztes Geldstück, das man auf einem Bleiklotze auf die hohe Kante stellt, kann ebenso schwingen und tönen.¹⁾

Die Sirene. — Der wichtigste hierher gehörige Apparat ist die von Cagniard de la Tour im Jahre 1819 erfundene Sirene.²⁾

Den wesentlichsten Bestandtheil derselben bildet eine rotirende Scheibe, die mit einer Anzahl gleich weit von einander abstehenden Löchern versehen ist; diese drehen sich nach einander dicht an der Öffnung einer Röhre vorbei, durch welche ein Luftstrom austritt. Jedesmal, wenn beide Öffnungen einander gegenüberstehen, erhält die äussere Luft einen Stoss, der unterbrochen wird, sobald die Röhrenöffnung durch den festen Theil der Platte geschlossen wird. Diese periodischen Stösse bringen, wenn sie rasch genug auf einander

¹⁾ Vgl. Tyndall, Wärme, 2. Aufl.

²⁾ Cagniard de la Tour, Ann. de chim. et de phys. (2), 12, 18 u. 35; 1819—1827.

folgen, einen Ton hervor, dessen Höhe von der Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe abhängt. Der eben beschriebene

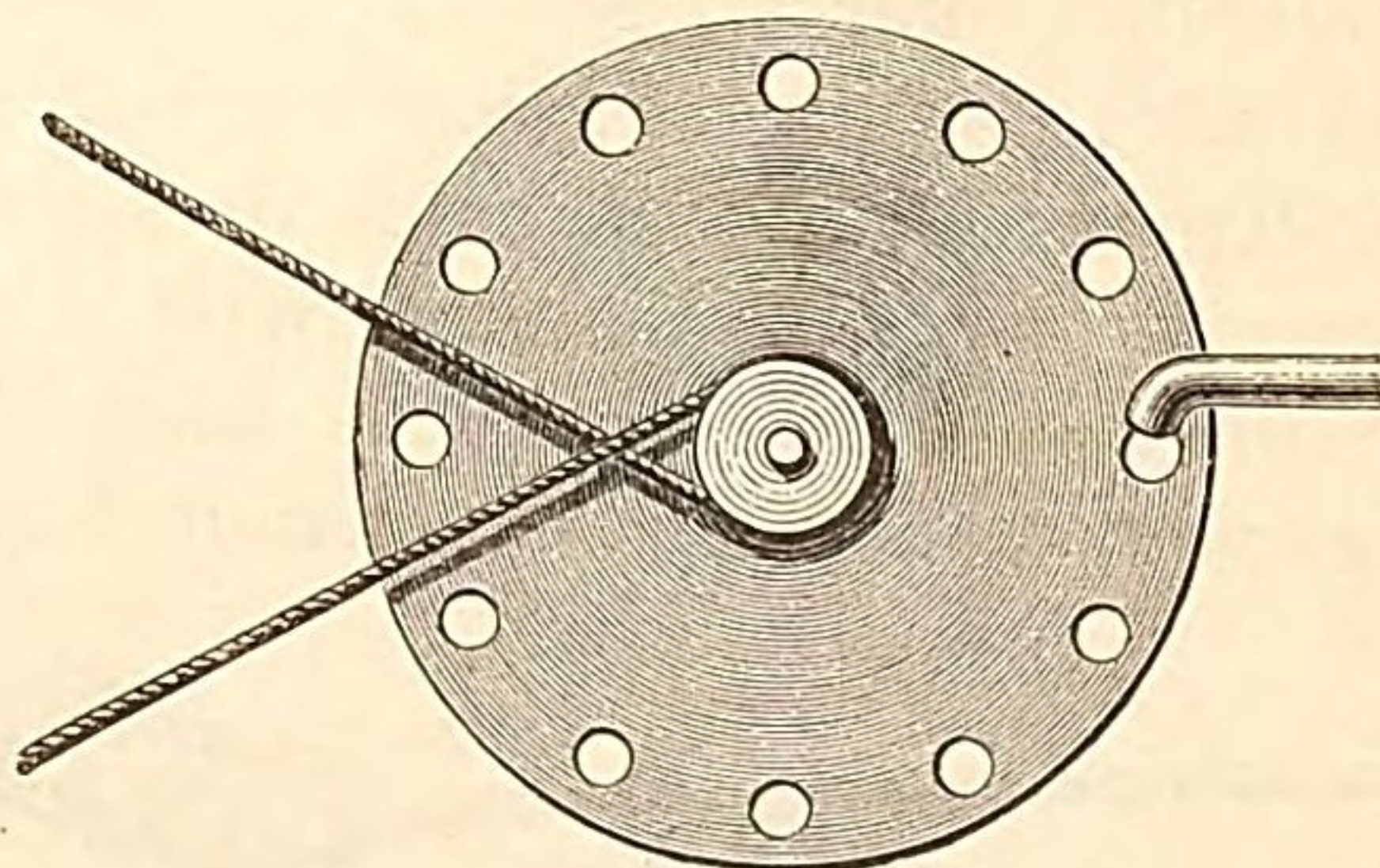


Fig. 15.

Apparat wird häufig als *Seebeck'sche Sirene* bezeichnet, weil Seebeck ihn thatsächlich in dieser Gestalt (mit einer Scheibe, die mit

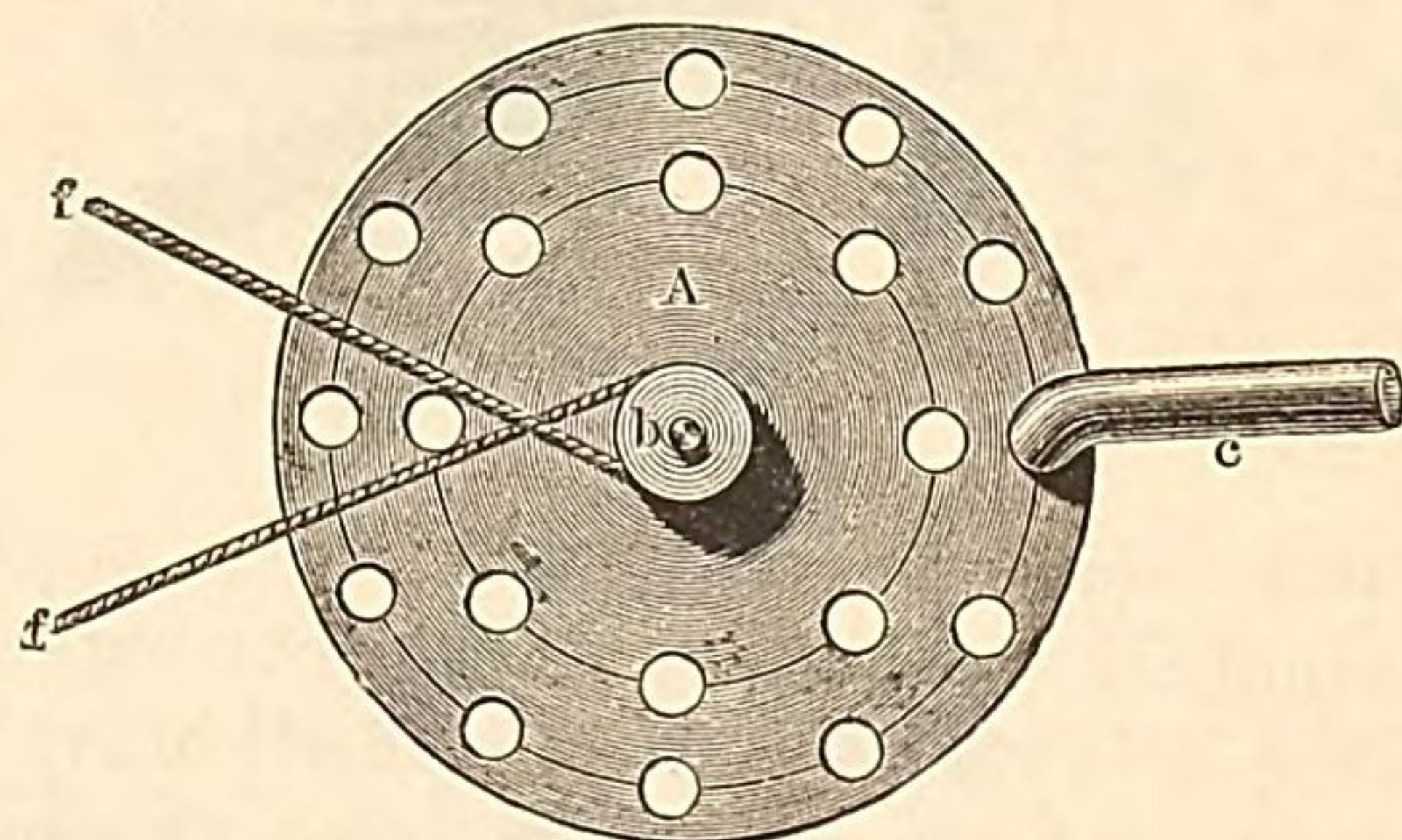


Fig. 16.

mehreren Reihen von Löchern versehen war) zur Untersuchung der Bestandtheile zusammengesetzter Töne verwendete.

Bei dem ursprünglichen Apparate von Cagniard de la Tour, so wie man ihn noch heute herstellt, wird die Bewegung der Scheibe durch den Luftstrom selbst hervorgebracht, und zwar lässt man, um die bewegende Kraft und gleichzeitig auch die Intensität des Tones zu steigern, den Luftstrom nicht durch eine einzige Öffnung austreten, sondern durch eine ganze Reihe von Löchern, die so angeordnet sind, dass sie alle gleichzeitig geöffnet und geschlossen werden. Diese Löcher sind an Zahl den Öffnungen der beweglichen Platte gleich; sie befinden sich (Fig. 17) in der festen Platte *AA*, dem Deckel einer Büchse *HH*, in welche durch das Rohr *F* die Luft aus einem Blasebalge eintritt. Über der Platte *AA* ist in sehr geringer Entfernung die bewegliche Scheibe *BB* an einer verticalen Achse *D* befestigt, die sich frei auf den Spitzen zweier ihre Enden berührenden Schrauben drehen

kann. Die Löcher der beiden Platten liegen in Ebenen, welche der Umdrehungsachse parallel sind, und besitzen entgegengesetzte Neigung; diese Anordnung hat zur Folge, dass, wenn die Öffnungen beider Platten anfänglich über einander stehen, die durch die unteren Löcher *a* eintretende Luft nahezu senkrecht

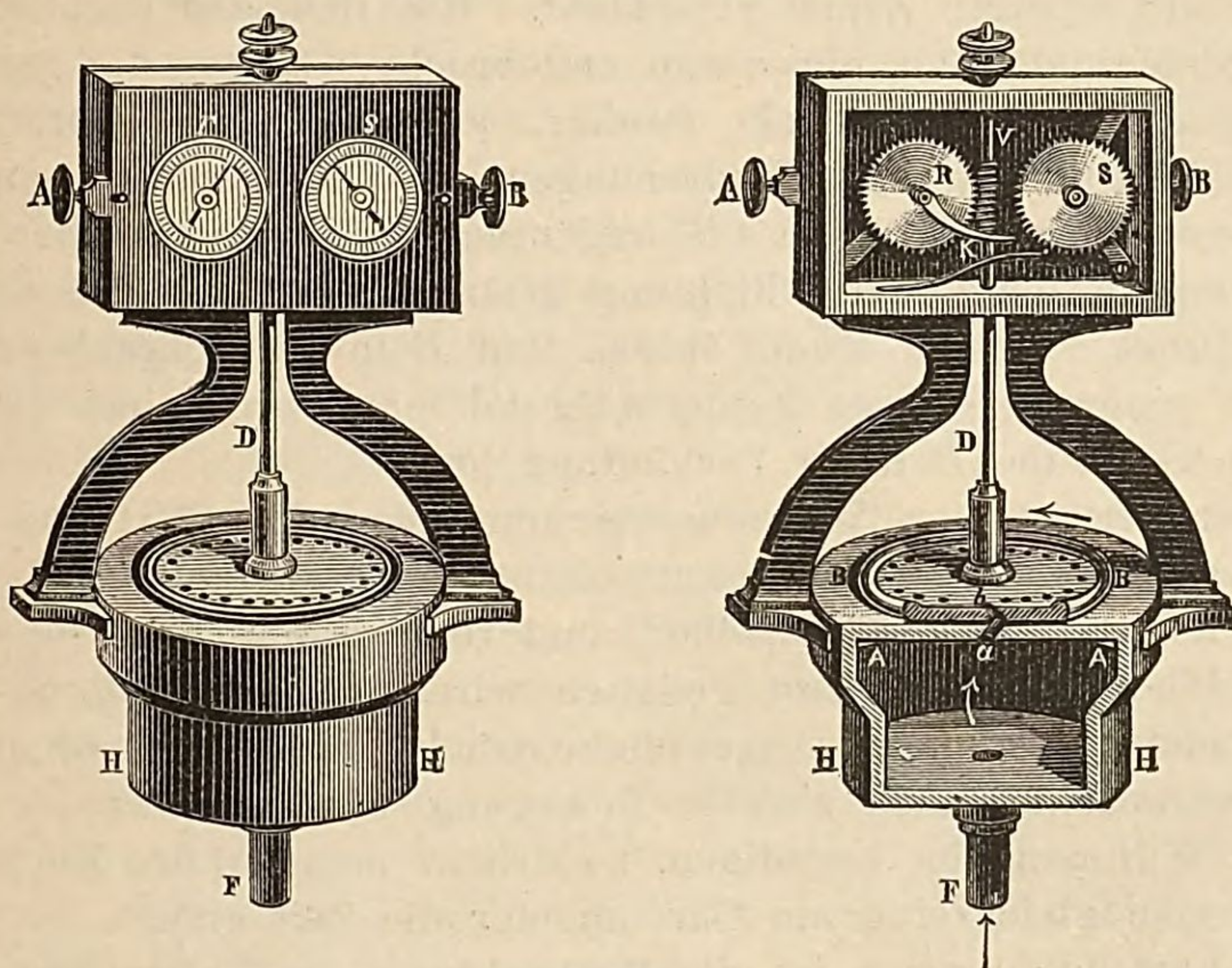


Fig. 17.

gegen die Wandung der oberen Löcher *b* trifft und die bewegliche Platte vorwärts treibt. Diese wird also beginnen, sich zu drehen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, welche von dem Drucke der Luft im Innern der Büchse abhängt; dabei werden die Ausströmungsöffnungen der Luft periodisch geöffnet und geschlossen.¹⁾

Da die Anzahl der Stösse, welche der äusseren Luft mitgetheilt werden, gleich dem Product aus der Anzahl der Löcher in die Zahl der Umdrehungen ist, so hat man diese während einer gegebenen Zeit zu bestimmen. Zu dem Zwecke trägt die Sirene oben einen Tourenzähler, der aus zwei Zahnrädern *R* und *S* besteht. Das Rad *R* greift in eine Schraube ohne Ende *V*, die auf dem obersten Theile der Achse sitzt, und rückt bei jeder

¹⁾ Dreht sich die Sirene ziemlich rasch, so hört man ausser dem Haupttone auch noch einen viel tieferen, den man *Achsenton* nennt, und der dadurch entsteht, dass die Rotationsachse bei jeder Umdrehung zweimal gegen ihre Lager anstösst, wenn sie nicht genau mit der Hauptträgheitsachse zusammenfällt.

Umdrehung der Achse um einen Zahn weiter. Jedesmal, wenn das Rad R eine ganze Umdrehung gemacht hat, stösst ein an demselben befestigter, seitlicher Fortsatz K gegen das Rad S und dreht dasselbe genau um einen Zahn vorwärts, wobei eine kleine, unten angebrachte Feder dafür sorgt, dass sich das Rad nicht auf einmal um mehrere Zähne verschiebt. Hat demnach das Rad R 100 Zähne und zählt ein daran angebrachter Zeiger die ganzen Umdrehungen, so giebt ein zweiter, am Rade S angebrachter Zeiger die Hunderter der Umdrehungen an. Dies ganze System ist an einer verticalen Platte AB angebracht, die eine kleine Verschiebung in horizontaler Richtung gestattet, so dass man durch einen Druck auf den Knopf A das Rad R in die Schraube ohne Ende V eingreifen lassen kann, während man durch einen Druck auf die Schraube B diese Verbindung löst.

Der Verlauf eines Versuches ist nun folgender: Während das Zählwerk noch ausser Thätigkeit bleibt, bringt man den Ton der Sirene auf die gewünschte Höhe¹⁾ und regulirt den Druck so, dass diese Höhe genau constant gehalten wird. In einem durch ein Chronometer bestimmten Augenblicke drückt man auf den Knopf A , der Tourenzähler setzt sich in Bewegung und der Versuch beginnt. Will man ihn beenden, so drückt man auf den Knopf B , indem man gleichzeitig am Chronometer die Zeit abliest.

Nothwendigerweise ist die Beobachtung des Zeitpunktes, in welcher man das Zählwerk in Gang setzt und es wieder anhält, mit einer gewissen Unsicherheit behaftet; da ausserdem das Zählwerk nur die ganzen Umdrehungen anzeigt und nicht auch die Bruchtheile, so kann die Gesamtzahl der beobachteten Schwingungen um $(k-1)$ falsch sein, wenn k die Anzahl der Plattenlöcher bezeichnet. Der Einfluss dieser Fehlerquellen lässt sich dadurch vermindern, dass man die Dauer des Versuches möglichst ausdehnt. Immerhin ist es nicht leicht, den Ton längere Zeit hindurch auf der gewünschten Höhe zu halten, was doch die wesentliche Bedingung für eine genaue Messung ist. Man kann dabei mit Vorthail den Regulator von Cavallé-Coll verwenden, eine Art von kleinem Blasebalg mit Gegengewicht, der von dem Winde des Gebläses durchstrichen wird. Um das Steigen der Tonhöhe zu verhindern, bedient man sich entweder eines auf der Sirene befestigten Flügelregulators, wie

¹⁾ Bei sehr hohen Tönen kann man nach dem Beispiele von Cagniard de la Tour den Apparat mit einem Bande in Bewegung setzen, das man vorher auf der Achse aufgerollt hat, wie den Bindfaden auf einen Kreisel; man muss sodann nur die Geschwindigkeit während der für den Versuch nöthigen Zeit constant erhalten.

Cagniard de la Tour (der im Übrigen nur seinen Mund als Blasebalg gebrauchte), oder eines elektro-magnetischen Regulators;¹⁾ bei einiger Übung genügt auch ganz einfach ein Druck mit dem Finger: Hier wie überall muss die Geschicklichkeit des Experimentirenden den Unvollkommenheiten des Apparates zu Hülfe kommen. Um sich jedoch von den Veränderungen des Tones vollkommen frei zu machen, ertheilt man nach Seebeck's Vorgange der Sirene ihre Rotationsbewegung am besten durch einen unabhängigen Motor; v. Helmholtz verwandte zu diesem Zwecke eine kleine elektromagnetische Maschine, die mit einem Centrifugalregulator versehen war, welcher den Strom unterbrach, sobald die Rotationsgeschwindigkeit eine gewisse Grenze überschritt; er erhielt auf diese Weise „ausserordentlich constante Töne, so dass die Sirene mit den besteingerichteten Orgelpfeifen wetteifern konnte.“

Dove brachte mehrere Reihen von Löchern in der Platte an, die nach Belieben zusammen oder getrennt in Wirksamkeit treten konnten, und v. Helmholtz stellte durch Vereinigung von zwei polyphonen Dove'schen Sirenen ein Instrument dar, das sich für eine grosse Anzahl interessanter Versuche eignet. Endlich soll nicht unerwähnt bleiben, dass die Sirene auch im Wasser tönen kann (daher ihr Name); zu diesem Zwecke genügt es, sie vollkommen einzutauchen und mit Hülfe eines Wasserstromes von passendem Druck in Gang zu halten.

330. Messung der Tonhöhe. — Das Ohr unterscheidet sehr genau, ob zwei Töne gleiche Höhe haben: Sind zwei Saiten zum Einklange gebracht, so braucht man die Länge der einen nur sehr wenig zu ändern, um einen deutlichen Missklang hervorzu-bringen. Mit Hülfe der früher beschriebenen Apparate (Monochord, Sirene, Zahnrad) lässt sich bestimmen, ob zwei Töne, die nach unserer Ansicht übereinstimmen, wie etwa der einer Saite und einer Sirene, dieselbe Schwingungszahl besitzen, so verschieden sie auch in Bezug auf Klangfarbe und Intensität sein mögen. Dieselben Apparate können daher auch dazu dienen, die Schwingungszahl irgend eines gegebenen Tones zu ermitteln. Es genügt zu

¹⁾ Bourbouze construirte eine Sirene, deren Regulirung darauf beruht, dass ein Magnet die Geschwindigkeit einer in seiner Nähe in Bewegung gesetzten Metallmasse verzögert. Eine auf der Achse der Sirene befestigte Kupferscheibe dreht sich zwischen den Polen eines Elektromagneten, dessen Wirkung man durch Nähern oder Entfernen vergrössern oder vermindern kann. Hat man nun die Sirene durch einen etwas zu kräftigen Luftstrom des Gebläses in Bewegung gesetzt, so nähert man die Pole des Magnets, bis man den gewünschten Ton erhält.

diesem Zwecke, auf dem Monochord, der Sirene oder dem Zahnrade den Ton herzustellen, der mit dem gegebenen Tone im Einklang ist, und die Schwingungszahl dieses so erzeugten Tones zu messen.

Sehr rasch lässt sich die Tonhöhe mittelst des *Monochords* bestimmen. Dieses besteht aus einer zwischen zwei festen Stegen ausgespannten Saite, unter welcher ein dritter beweglicher Steg einer Theilung entlang verschoben werden kann. Die Saite ist mit dem einen Ende an einem festen Haken befestigt, mit dem anderen an einer Schraube, mit Hülfe deren sich die Spannung

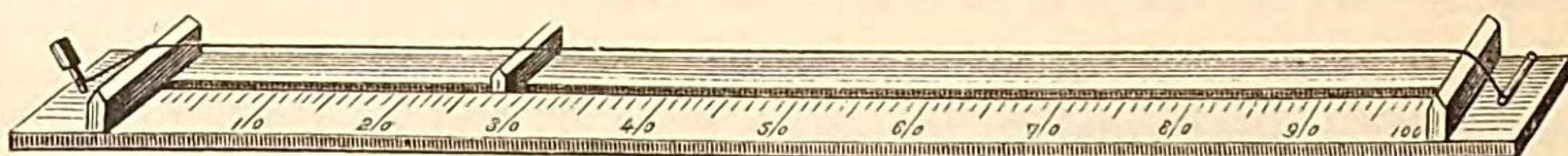


Fig. 18.

verändern lässt. Durch Anziehen dieser Schraube bewirkt man, dass die ihrer ganzen Länge nach schwingende Saite einen bestimmten Ton von bekannter Höhe (etwa a_1 einer Stimmgabel) giebt; hierauf verkürzt man mit Hülfe des beweglichen Steges die Länge des schwingenden Theiles, bis der zu bestimmende Ton entsteht. Die Längen der Saite in beiden Fällen verhalten sich alsdann umgekehrt, wie die zugehörigen Schwingungszahlen.

An Stelle des Monochords kann man mit Vorthail einen Tonmesser verwenden, der mit einem den Ton verstärkenden Resonanzkasten versehen ist und mehrere Saiten trägt. Die An-

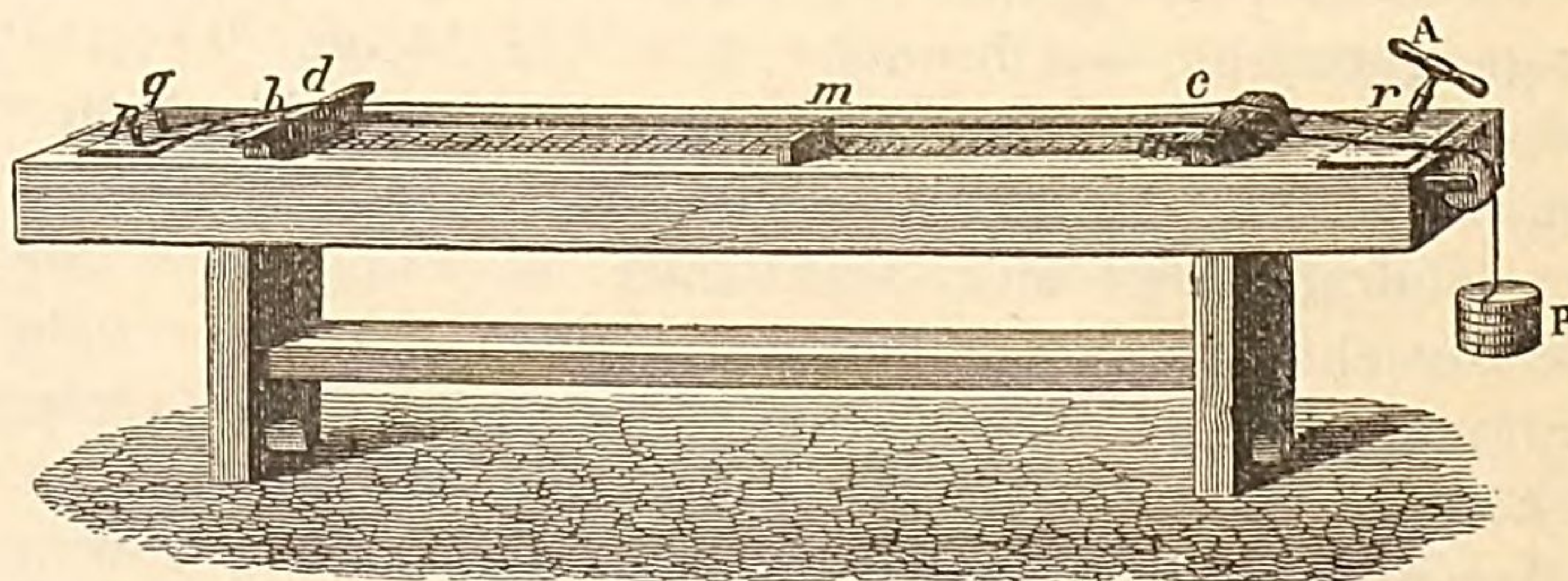


Fig. 19.

wendung einer zweiten Saite, die sich mit der ersten im Einklange befindet, gestattet am Ende des Versuches zu bestimmen, ob die Saite, mit welcher man experimentirt, den Ton gehalten hat, auf den sie abgestimmt war.

Die *Sirene* giebt wesentlich genauere Bestimmungen; sie ist viel leichter zu handhaben und weniger Fehlerquellen unterworfen, als das *Zahnrad*, durch das sie Savart ersetzen wollte.

331. Graphische Methode. — Das genaueste Verfahren zur Bestimmung der Schwingungszahl eines Tones besteht darin, dass man die Schwingungen durch den tönenden Körper selbst aufzeichnen lässt. Eine an dem Körper — in unserer Figur dem schwingenden Stabe *T* — angebrachte Spitze stösst gegen einen berussten Cylinder *EF*; der letztere dreht sich um eine Achse, die derjenigen Ebene parallel ist, in welcher die Schwingungen vor sich gehen. Das eine Ende der Achse trägt ein Schraubengewinde und dreht sich derart in einer festen Mutter, dass der Cylinder sich gleichzeitig vorwärts bewegt; daher erhält die aufgezeichnete Curve die Gestalt einer gezähnelten Schraubenlinie,

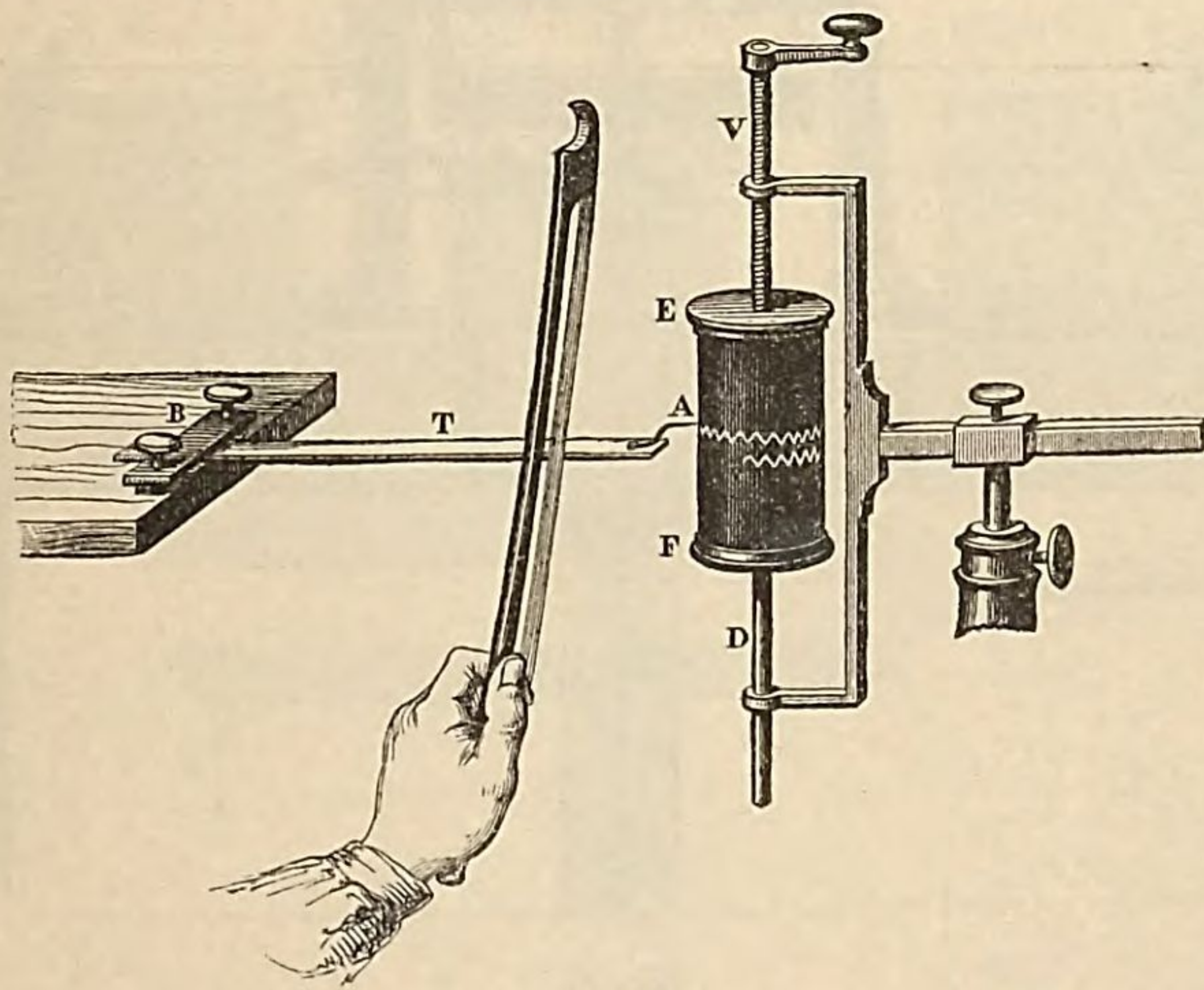


Fig. 20.

bei der jede Ausbiegung einer Schwingung des zu untersuchenden Körpers entspricht. Die Zahl der in einer gegebenen Zeit ausgeführten Schwingungen lässt sich daraus unmittelbar bestimmen, wenn man die Umdrehungsgeschwindigkeit des Cylinders kennt. Mit Hülfe passender Regulatoren (82) gelingt es, trotz der veränderlichen Reibung des Systems, eine gleichförmige Rotationsbewegung zu erzielen und ihre Geschwindigkeit mittelst eines Chronometers zu bestimmen. Man kann sogar durch ein Chronometer am Ende jeder Secunde auf dem rotirenden Cylinder eine Marke anbringen lassen. Aber abgesehen von der Schwierigkeit, dass diese Marken sich oft nicht genau genug abheben, hat man stets zu besorgen, dass der Stoss und die Reibung zwischen Spitze und Cylinder den Gang des Chronometers stören könnten.¹⁾

¹⁾ Diese Fehlerquelle lässt sich vermeiden, wenn man ein von einer astronomischen Uhr gegebenes elektrisches Signal verwendet, und zwar

Chronographische Stimmgabel. — Am besten misst man die Zeit dadurch, dass man einen Körper von bekannter Schwingungszahl seine Schwingungen gleichzeitig mit denjenigen des zu untersuchenden Körpers aufzeichnen lässt. Diese Methode der Zeitbestimmung verdanken wir Thomas Young,¹⁾ der sich zu dem Zwecke eines mit einer Spitze versehenen Stabes bediente; Duhamel²⁾ wandte dieselbe Methode bei der Untersuchung der Schwingungen von Saiten an, und Wertheim³⁾ benutzte dabei eine Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl. Fig. 21 stellt ein graphisches Zähl-

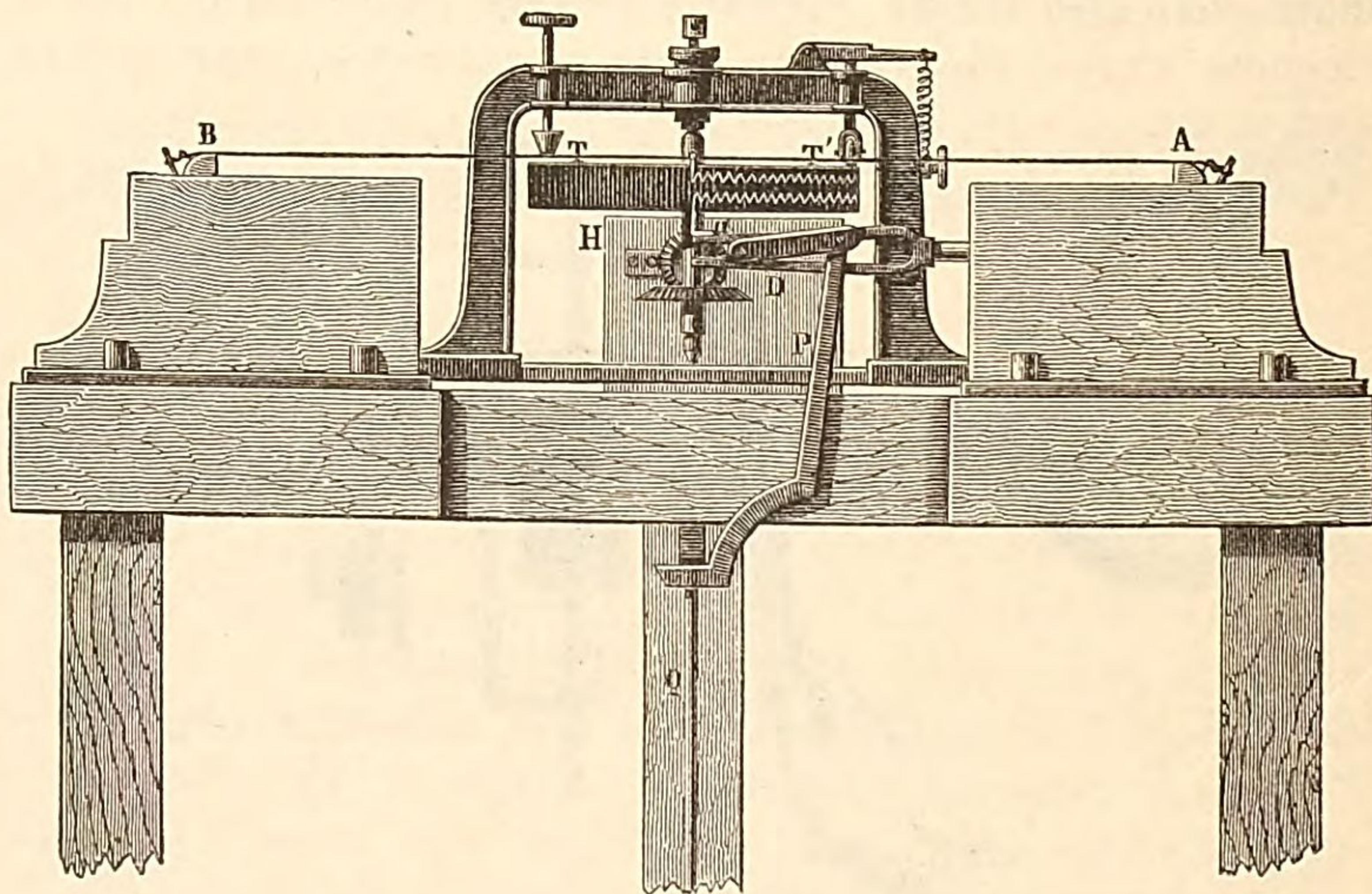


Fig. 21.

werk dar, das zum gleichzeitigen Aufzeichnen der Schwingungen einer Saite *AB* und einer Stimmgabel *D* eingerichtet ist. Der Hebel *PQ*, der durch ein an seinem unteren Ende angebrachtes Pedal in Bewegung gesetzt werden kann, presst ein Stück Holz *a* zwischen die Zinken der Stimmgabel, die hierdurch in starke Schwingungen geräth. Dann zeichnet ein an der Stimmgabel angebrachter Stift eine Sinuslinie auf der berussten Trommel *TT'* auf, während ein anderer in der Mitte der Saite befestigter Stift eine zweite Curve in geringer Entfernung von der ersten zieht. Das Verhältniss der Anzahl von Ausbuchtungen, welche bei beiden

kann man mit Vortheil das Signalzeichen mit der Curve verbinden, welche von der chronographischen Stimmgabel aufgezeichnet wird (346).

¹⁾ Young, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts 1, 191; 1807.

²⁾ Duhamel, C. R. 11, 15, 810 u. 957; 1841.

³⁾ Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (2), 12, 385; 1844.

Curven zwischen zwei Marken liegen, giebt direct das Verhältniss der Schwingungszahlen von Saite und Stimmgabel an. Hieraus lässt sich leicht die absolute Schwingungszahl der Saite während einer Secunde bestimmen, da die Schwingungszahl der Stimmgabel bekannt ist.¹⁾ In unserem Falle wird die Trommel TT' durch ein Uhrwerk H in Bewegung gesetzt; es ist jedoch einleuchtend, dass auf die Gleichmässigkeit der Bewegung kein besonderer Werth gelegt zu werden braucht; man kann also hierbei ohne Nachtheil auch die Einrichtung von Fig. 20 gebrauchen und den Cylinder einfach mit der Hand drehen.

Es wird kaum nöthig sein, darauf hinzuweisen, dass die graphische Methode nicht allein über die Anzahl, sondern auch über die Amplitude und die Gestalt der Schwingungen, also über die Beschaffenheit des untersuchten Tones überhaupt, Aufschluss giebt.

Betrachtet man auf diese Weise das Schwingen einer angeschlagenen Stimmgabel, so findet man, dass die entstandene

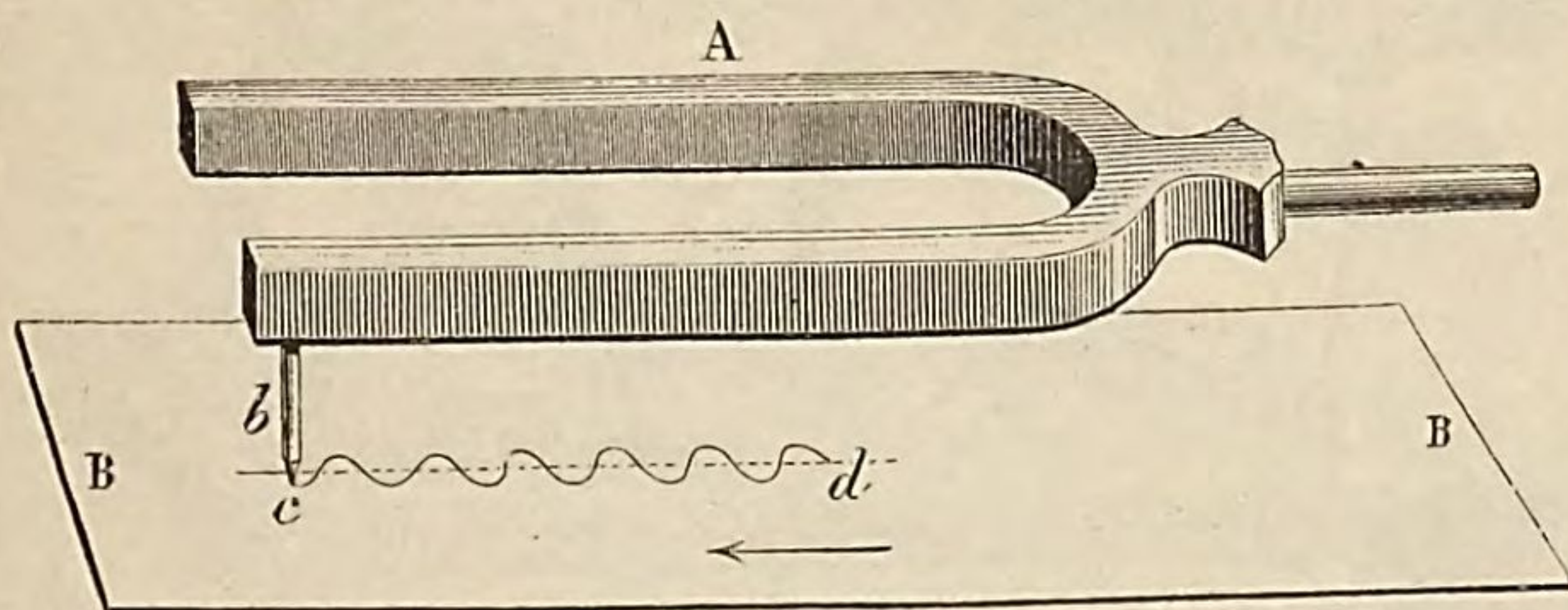


Fig. 22.

Curve eine vollkommene Sinuslinie ist. Die Bewegung der Zinken der Stimmgabel ist also eine pendelförmige, was auch durch die optische Methode bestätigt wird.

Dasselbe finden wir bei der Bewegung einer Saite, die man ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat und dann allein der Wirkung der Molecularkräfte überlässt.

Bei der Saite oder der Stimmgabel bietet die directe Aufzeichnung der schwingenden Bewegung keinerlei Schwierigkeit dar; dies ist jedoch nicht immer der Fall. Will man z. B. die Schwingungen einer tönenden Röhre aufzeichnen, so muss man dieselben erst auf einen Körper übertragen, der sie aufzunehmen und graphisch wiederzugeben vermag.

¹⁾ Selbstverständlich hat man dabei stets zu berücksichtigen, dass durch Anbringung selbst des leichtesten Schreibstiftes an einer Zinke der Stimmgabel die Tonhöhe und somit auch die Schwingungszahl der letzteren geändert wird. — G.

Phonautoskop. — Zu diesem Zwecke verwandte Scott¹⁾ eine Membran, die er im Brennpunkt eines weiten, parabolischen Trichters *A* anbrachte; dieselbe konnte mit Hülfe eines beweglichen Rahmens *D*, der an dem Rande des Trichters anlag, mehr oder weniger straff gespannt werden. König fügte noch eine Gleitschiene *G* hinzu, die mit einer Schraube *V'* befestigt wird und noch eine zweite Schraube *V* trägt, mit Hülfe deren man an einem beliebigen Punkte einen bestimmten Druck ausüben kann, so dass die Membran leicht unter der Einwirkung des Tones in Schwingungen geräth, den man an der Öffnung des Trichters erzeugt. Ein Schreib-

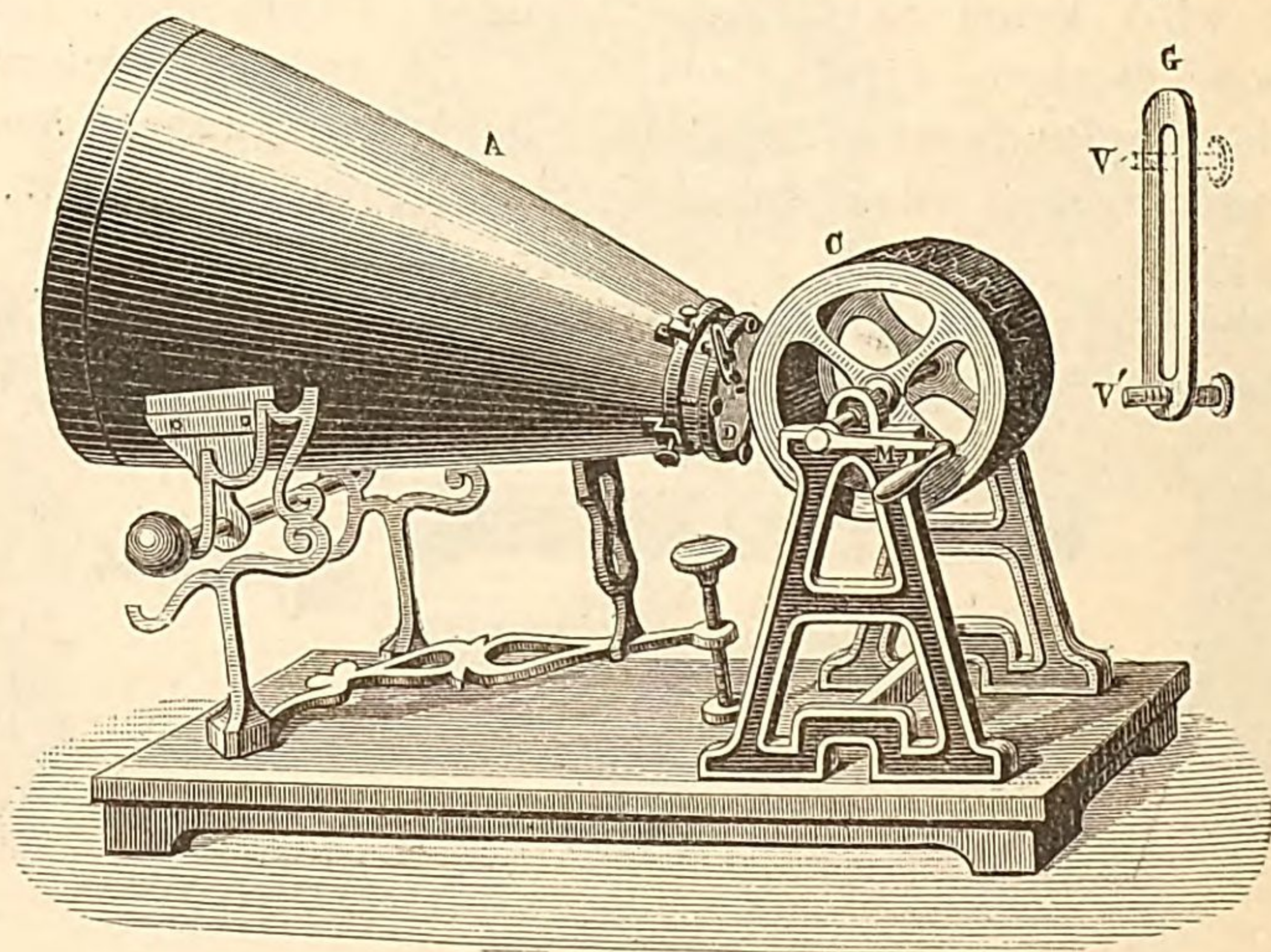


Fig. 23.

stift, bestehend aus einer Schweineborste, die an ihrem Ende einen Federbart trägt und an der Membran mit einem Stückchen Wachs befestigt ist, zeichnet die Schwingungen in vergrössertem Maassstabe auf dem Cylinder *C* auf, den man mittelst einer Handkurbel *M* dreht. Dieser Apparat leistete beim Studium verschiedener akustischer Fragen gute Dienste, wenn er auch keineswegs die Hoffnungen seines Erfinders erfüllte, der in ihm das Mittel gefunden zu haben glaubte, die Worte eines Redners zu fixiren. Ein beliebiger Ton kann nämlich nur dann einer bestimmten Membran mitgetheilt werden, wenn er eine aussergewöhnliche Stärke besitzt; im Allgemeinen aber schwingt die Membran nur unter der Einwirkung derjenigen Töne, welche dem speciellen Tone, auf welchen sie abgestimmt ist, nahe liegen, und dann erzeugt die Membran

¹⁾ Scott, Reports of British Association; 1859.

vermöge ihrer Schwingungsform eine Curve, deren Gestalt einer regelmässigen Sinuslinie ziemlich genau entspricht.¹⁾

¹⁾ Im Jahre 1877 unterbreitete Charles Cros der Academie der Wissenschaften zu Paris den Vorschlag, die Scott'sche phonautographische Aufzeichnung, welche auf einer horizontalen, berussten Platte hervorgebracht werden sollte, durch Photographie auf eine Metallplatte zu übertragen und dort einzugraviren; dann würde es möglich sein, vermittelst eines an einer Membran angebrachten Stiftes umgekehrt wieder die ursprünglichen Laute hervorzurufen. Allerdings machte er gleichzeitig darauf aufmerksam, dass bei dieser Art der Aufzeichnung in

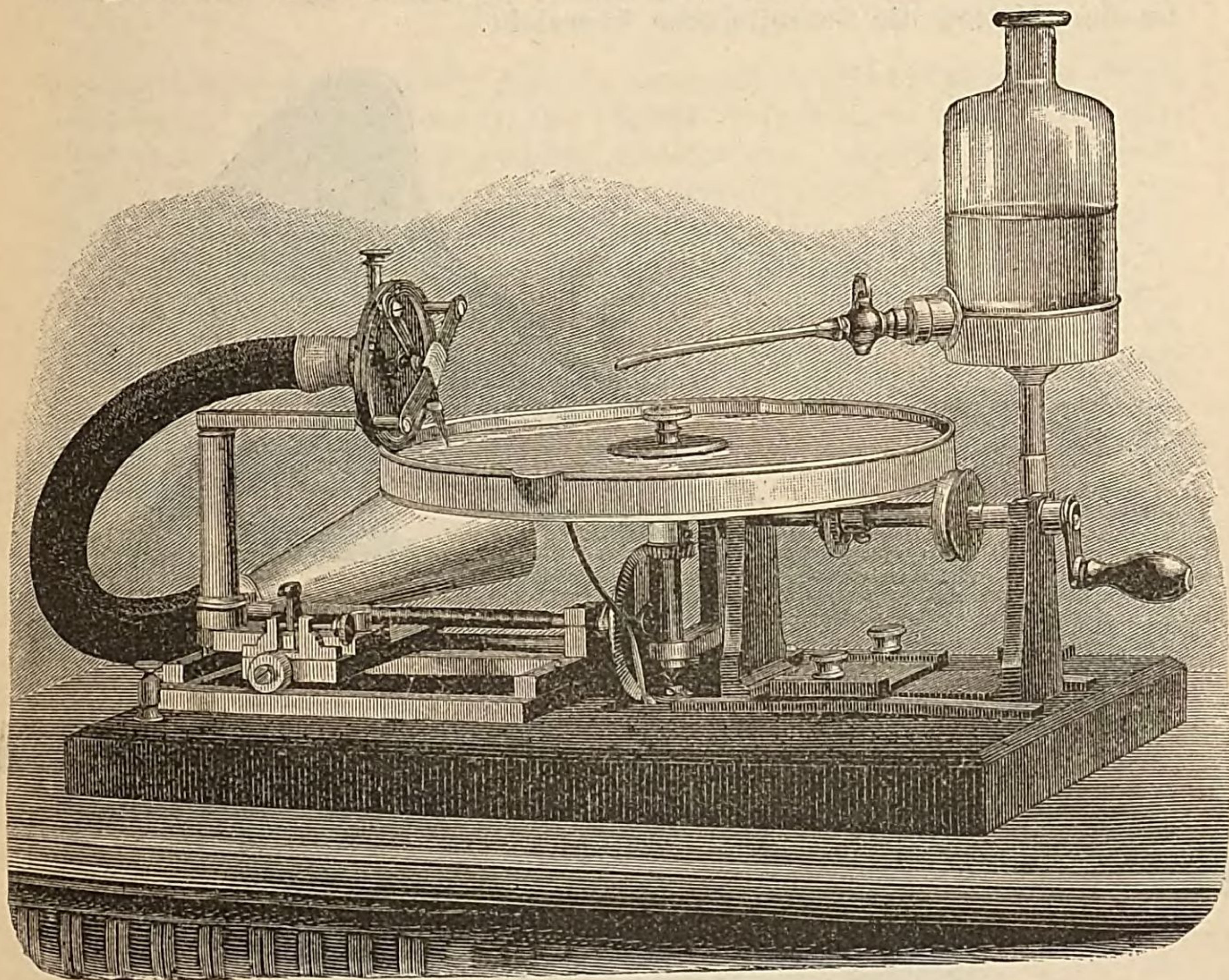


Fig. 23 a.

Spirallinien gleichen Längen ungleiche Zeiten entsprechen würden, deshalb sei es zweckmässiger, an Stelle der Platte einen Cylinder zu wählen (C. R. 85). Cros selbst führte, wahrscheinlich abgeschreckt durch die technischen Schwierigkeiten, seine Ideen nicht selbst praktisch aus, sie liegen jedoch dem inzwischen von Emile Berliner (Washington) construirten Grammophon zu Grunde. Dieser Apparat besteht aus getrennten Theilen für die Aufnahme und die Wiedergabe von Tönen (Fig. 23^a und Fig. 23^b). Bei dem ersteren befindet sich links oben der Schallschreiber, eine flache Dose, in welche der Schall durch einen Schlauch gelangt. Diese Dose ist auf der Vorderseite durch eine Membran aus Marienglas geschlossen, auf welcher mittelst eines Stiftes eine Zeichen-

feder aus einem elastischen Streifen Kupferblech mit feiner Iridiumspitze parallel zur Fläche der Membran befestigt ist.

Als Schreibfläche dient eine kreisrunde, völlig ebene Platte aus Zinkblech; dieselbe ruht auf dem in der Mitte des Apparates befindlichen Teller, welcher durch eine Handkurbel oder durch einen anderen Motor in schnelle, möglichst gleichmässige Drehbewegung versetzt werden kann. Bei der Drehung des Tellers beschreibt die Federspitze auf der Zinkplatte eine Kreislinie; damit diese aber nicht in sich selbst zurücklaufe, wird der den Schallschreiber tragende Arm mittelst einer Schraube langsam gegen die Mitte der Zinkscheibe hin bewegt, so dass eine feine Spirale entsteht, welche in einer Länge von mehreren hundert Metern die Schreibfläche überzieht.

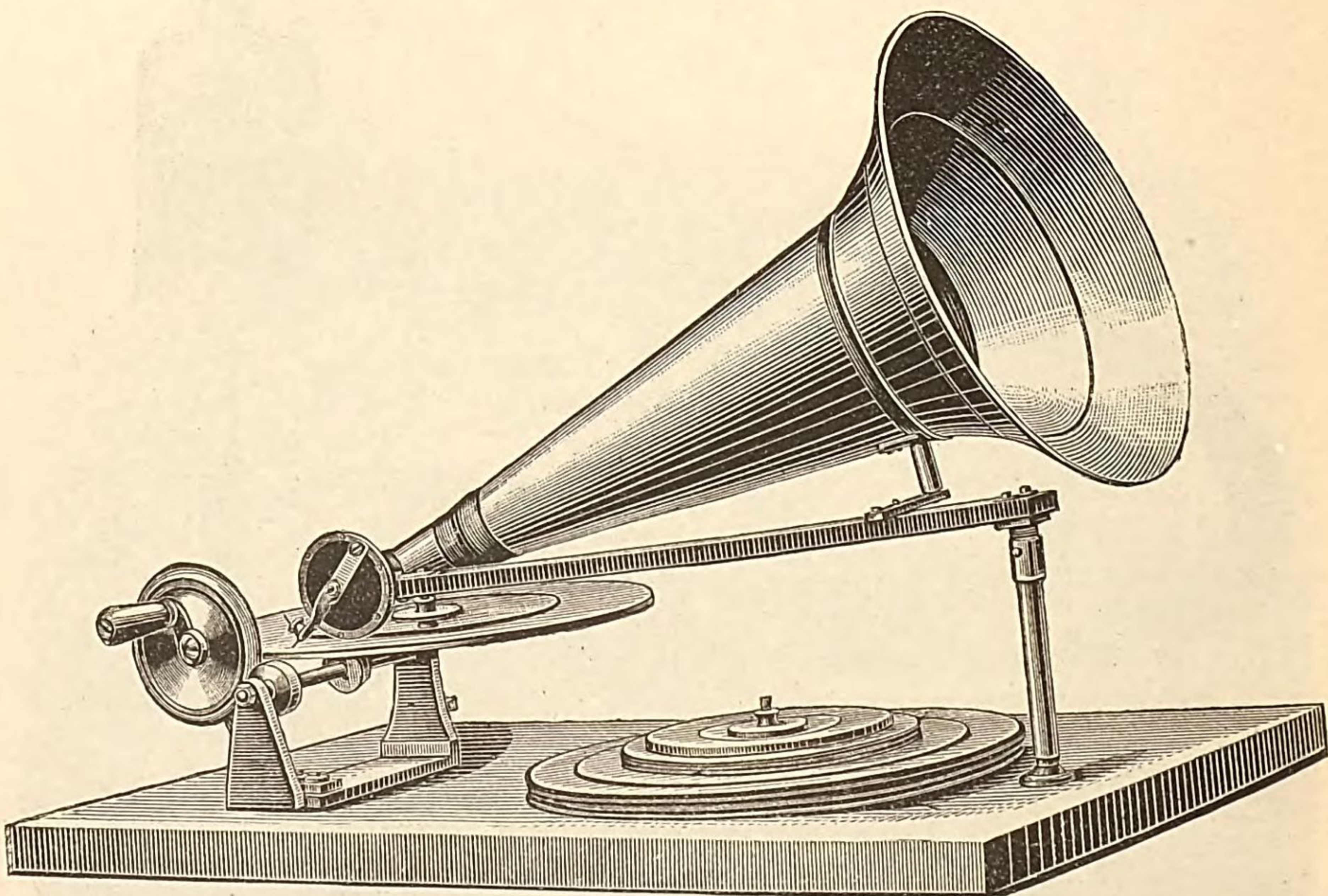


Fig. 23 b.

Die Zinkscheibe muss vor dem Gebrauche mit einem äusserst feinen Ätzgrunde überzogen sein, der aus einer Auflösung von Wachs in Benzin besteht. Damit die von dem Schreibstifte blossgelegten Curvenzüge nicht durch Staubtheilchen verunreinigt werden, wird die Platte während der Schallaufnahme fortwährend mit einer dünnen Schicht von Alkohol bedeckt erhalten, welche aus der über dem Apparate aufgestellten Flasche langsam zuträufelt. Nach Beendigung der Aufnahme wird die Platte an den freigelegten Stellen durch zehnpromcentige Chromsäure geätzt und ist nun zur Wiedergabe fertig.

Will man die aufgenommenen Töne wieder hervorbringen, so lässt man durch die eingezähten Schallfurchen eine Nadelspitze laufen, die mit einer schwingenden Membran nebst Hülse zu einer Schalldose verbunden ist; die Schallplatte wird wieder mittelst Handkurbel oder be-

Phonograph. — Edison¹⁾ brauchte indessen das Instrument nur wenig zu verändern, um den Phonographen daraus herzustellen, welcher nicht nur das gesprochene Wort aufzuzeichnen,²⁾ sondern es auch beliebige Zeit nachher wieder zu reproduciren gestattet. Zu diesem Zwecke ersetzte er das berusste Papier durch ein Stanniolblatt, und zwar wurde dasselbe über einen Cylinder *C* gewickelt, welcher mit einer schraubenförmige Rille von der Ganghöhe der Schraube *A'* versehen war. An Stelle des Federbartes verwendete er einen sehr kurzen, metallischen Stift, der von einer Feder *a* gehalten wurde; die Verbindung zwischen dem

liebigen Motors gleichmässig gedreht, während die Nadelspitze nur durch das Gewicht der Schalldose in der Furche festgehalten wird. Die Nadel muss dann dieselben Bewegungen wiederholen, welche der ursprüngliche Ton der schreibenden Feder mitgetheilt hatte, und die mit der Nadelspitze verbundene Membran muss den Ton wieder hervorrufen. Er gelangt zu den Zuhörern durch einen grossen Schalltrichter oder besser durch direct zum Ohre führende Gummischläuche. Die Schallplatten haben den Vorzug, durch andauernden Gebrauch besser zu werden, da die Nadelspitze die Furchen polirt und ebnet; sie lassen sich ferner auf galvanoplastischem Wege beliebig vermehren und mittelst der Photographie auch noch vergrössern, wodurch der Ton der Originalplatte verstärkt werden kann.

Das Grammophon giebt nicht nur das gesprochene Wort, sondern auch Instrumentalmusik und Gesang vollkommen deutlich und mit sehr beträchtlicher Tonstärke wieder. Allerdings muss bei der Aufnahme und Reproduction von Musikstücken dafür gesorgt werden, dass die Bewegung der Scheibe vollständig gleichmässig erfolgt, da sonst die Tonhöhe nicht constant bleibt.

Fig. 23^c stellt die Phonautogramme mehrerer Vocale dar. — G.

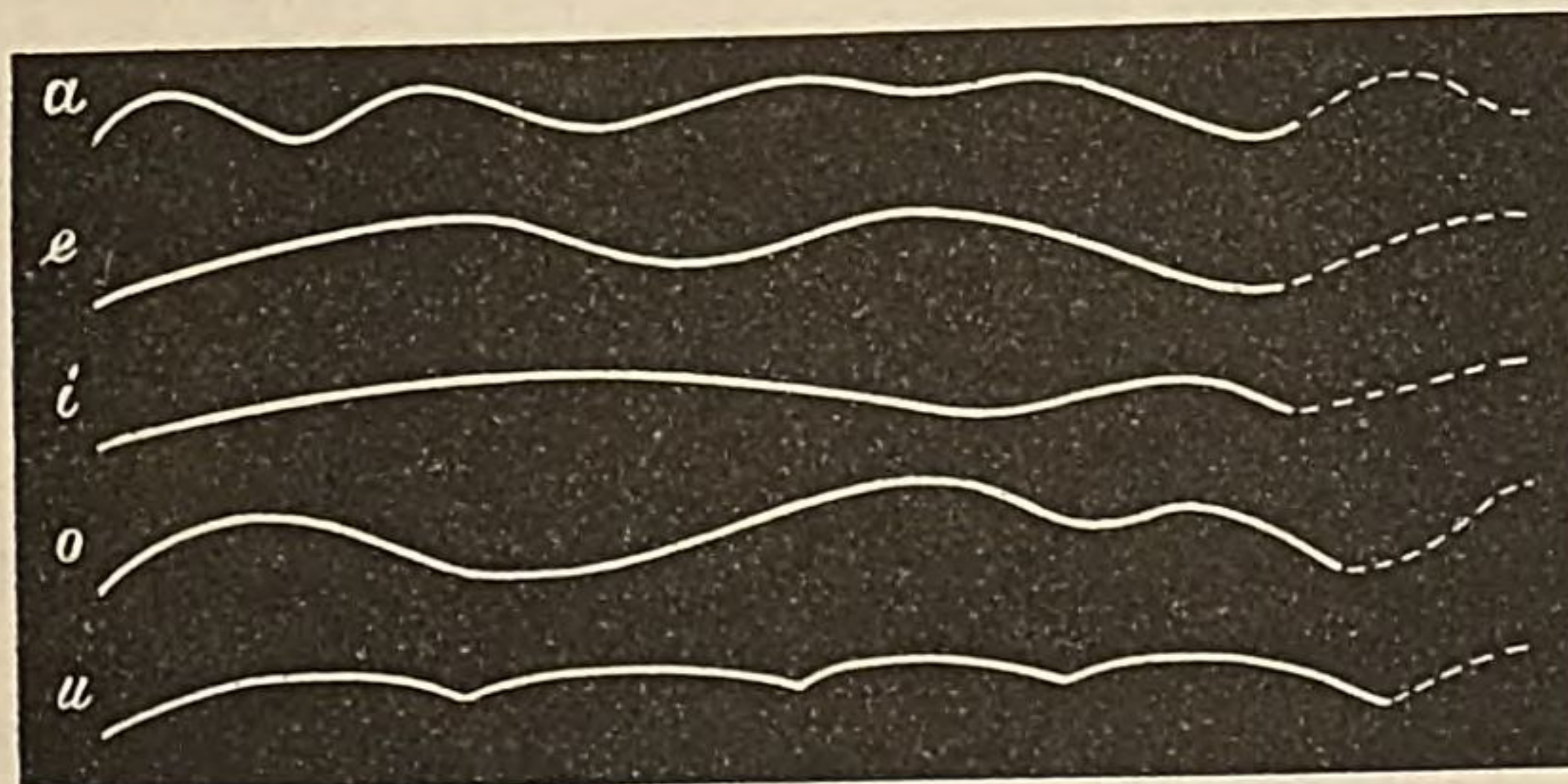


Fig. 23^c.

¹⁾ Edison, Nature; 1877.

²⁾ Im Jahre 1864 führte Barlow der Royal Society in London einen *Logograph* vor, welcher auf einem Papierstreifen ohne Ende mit Tinte die Curven von Tönen aufzeichnete, die vor einem mit einer Membran geschlossenen Mundstücke erzeugt worden waren, ganz wie bei dem Apparate von Scott.

Stifte und der Membran *m* stellte er mittelst zweier, den Ton schwächenden Stückchen Kautschukschlauches her; endlich wählte er als Membran eine dünne Platte aus Eisenblech, die er am Boden des Schalltrichters *E* befestigte. Spricht man nun gegen die Platte, während gleichzeitig der Cylinder gedreht wird, so bringt der Stift mehr oder weniger tiefe Eindrücke hervor, welche die Schwingungen der Membran mit allen Einzelheiten darstellen.

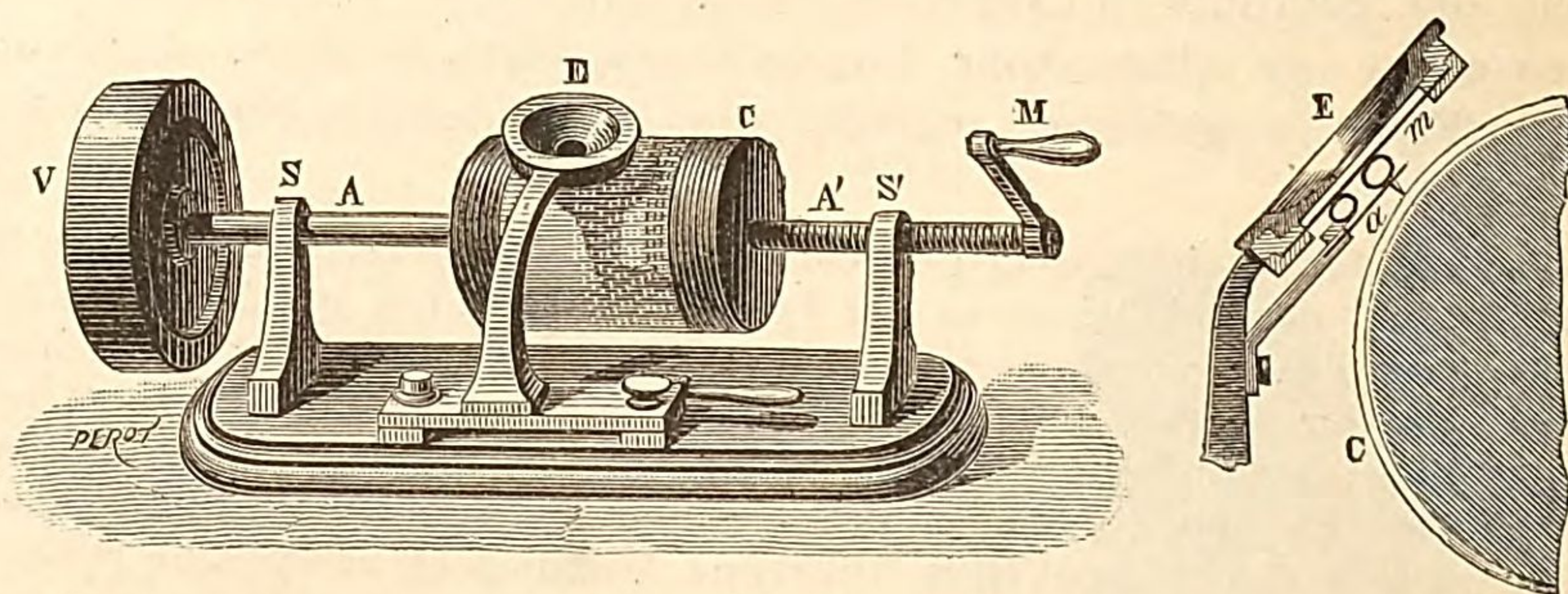


Fig. 24.

Um nun den so eingravirten Ton wieder hervorzurufen, hat man nur den Stift an den Ausgangspunkt zurückzusetzen und den Cylinder wieder vorwärts zu drehen. Dann wird der Stift durch die Erhöhungen und Vertiefungen, welche sich unter ihm vorbei bewegen, abwechselnd gehoben und gesenkt, und die Membran wird denselben Bewegungen unterworfen, die sie unter dem Einflusse der Stimme ausführte, d. h. es entsteht derselbe Ton wieder — vorausgesetzt, dass auch die Umdrehungsgeschwindigkeit des Cylinders wieder die frühere ist¹⁾ — nur klingt er geschwächt²⁾ und näselnd.³⁾

¹⁾ Um die Gleichmässigkeit der Bewegung zu erhöhen, ist am Ende *A* der Achse ein schweres Schwungrad *V* angebracht.

²⁾ Diesem Mangel kann dadurch einigermaassen abgeholfen werden, dass man das Mundstück mit einem Trichter versieht, welcher den Ton verstärkt.

³⁾ In neuerer Zeit hat Edison seinen Phonographen nach den verschiedensten Richtungen hin bedeutend verbessert. An Stelle des Stannioblattes wendet er jetzt Hohlcyylinder aus einer von Tainter erfundenen Composition aus Wachs, Kolophonium etc. an, von deren Zusammensetzung die Reinheit und Schönheit des Klanges ganz wesentlich abhängt. Dieser Wachscylinder *A* wird auf einen Metallkern *B* geschoben, der durch einen Elektromotor mit Helmholtz'schem Regulator oder durch einen Wassermotor in ganz gleichmässige Rotation versetzt werden kann. Vor dem Gebrauche muss der Cylinder jedesmal mittelst eines Messerchens, unter welchem der Cylinder hinweggleitet, vollständig glatt

332. Grenzen der hörbaren Töne. — Nicht jede periodisch schwingende Bewegung, welche unser Ohr trifft, wird noth-

abgeschliffen werden, da jede kleine Unebenheit des Cylinders bei der Reproduction störende Nebengeräusche verursacht.

Eine weitere ganz wesentliche Verbesserung besteht darin, dass Edison zur Aufnahme und Wiedergabe neuerdings zwei verschiedene Stifte benutzt. Der Schreibstift *a* (Recorder) wird durch den scharfen Rand einer Kugelschale von 0,77 mm Durchmesser gebildet (Fig. 24^b); derselbe gräbt Spiralschlangen in den Wachscylinder ein, auf deren Grunde die den einzelnen Tonschwingungen entsprechenden Erhöhungen und Vertiefungen

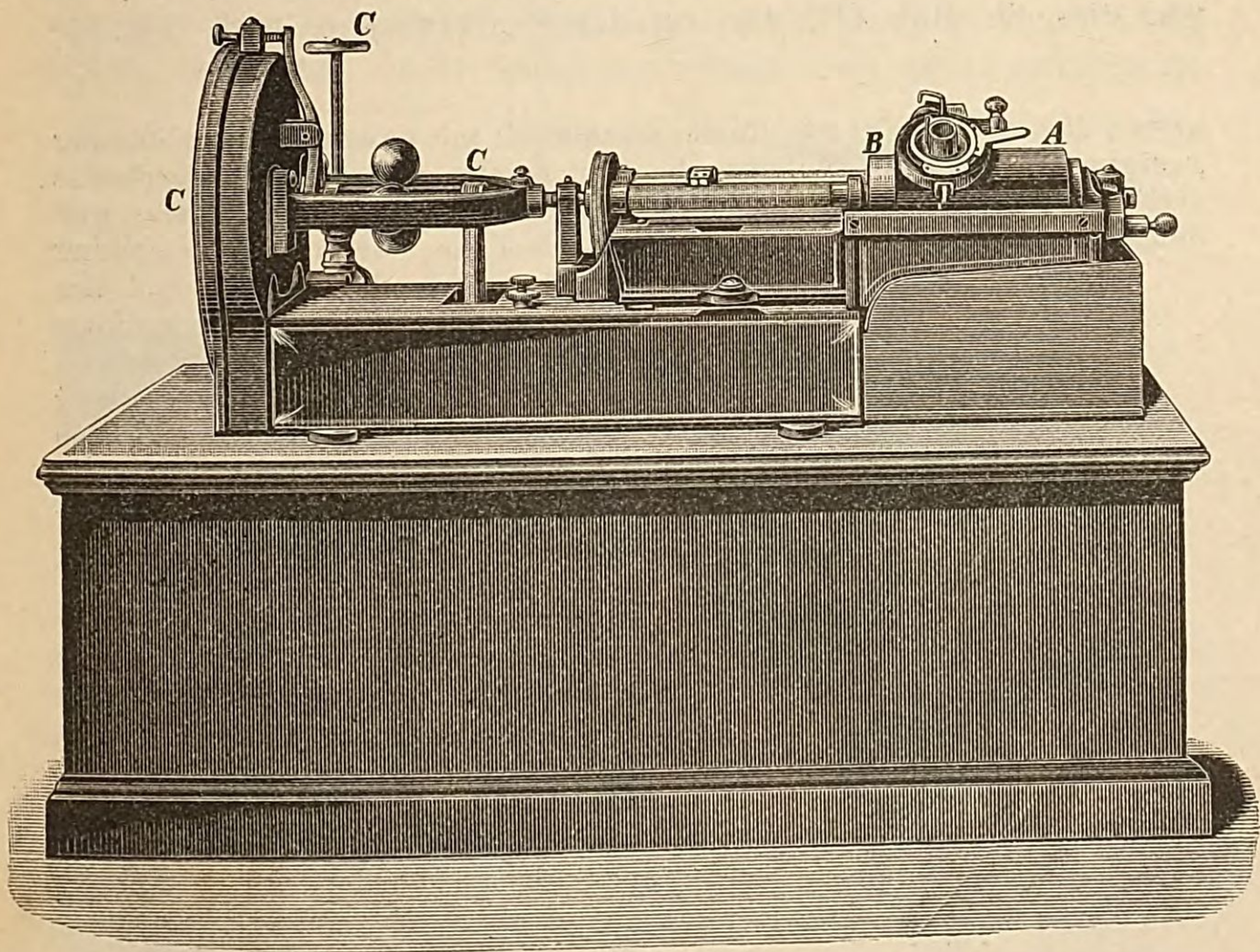


Fig. 24^a.

zu Stande kommen. Über diese gleitet bei der Wiedergabe der „Reproducer“ *b* hinweg, eine kleine Kugel von dem Durchmesser des Schneidmessers, deren Bewegungen, durch ein Hebelsystem *c* vergrößert, auf die Membran *d* übertragen werden. Diese besteht aus einer feinen geschliffenen, planparallelen Glasplatte von ca. 35 mm Durchmesser und 0,05 mm bis 0,15 mm Dicke, und zwar befinden sich Schreibstift und Reproducer entweder auf zwei verschiedenen Membranen, die durch einen einfachen Handgriff ausgewechselt werden können, oder wie bei Fig. 24^b auf ein und derselben Membran, welche sich dann durch eine kleine Drehung in die jeweilig erforderliche Stellung bringen lässt.

Zur Aufnahme von Musik benutzt man einen grossen Schalltrichter, dessen Eigentöne möglichst gedämpft sein müssen; zur Aufnahme der

wendigerweise von uns als Ton vernommen, vielmehr muss ein Ton, den wir hören sollen, innerhalb gewisser Grenzen liegen. Die untere Grenze scheint etwa durch die Schwingungszahl 16 bestimmt zu sein — es ist dies die Schwingungszahl der tiefsten Pfeife grosser Orgeln, und auch bei diesen Pfeifen vernehmen wir nach Helmholtz¹⁾ den Grundton nur noch als eine Reihe von getrennten Stössen; den Eindruck eines Tones erhalten wir erst bei etwa 30 Schwingungen. Savart²⁾ hatte die Grenze für die tiefen Töne viel niedriger gelegt; er wandte einen Apparat an, der auch heute noch als *Savart's rotirender Stab* bekannt ist. Es war dies ein Stab *AB*, der auf der Savart'schen Bank (Fig. 25)

gewöhnlichen Rede ist ein Rosshaarschlauch mit passender Mundöffnung geeigneter. Soll die Wiedergabe vor einem grösseren Zuhörerkreise erfolgen, so bedient man sich auch hierbei eines Schalltrichters; weit deutlicher und edeler klingen jedoch die Töne, wenn die Verbindung zwischen Reprodutorplatte und dem Ohre des Hörers direct durch dünne Gummischläuche vermittelt wird.

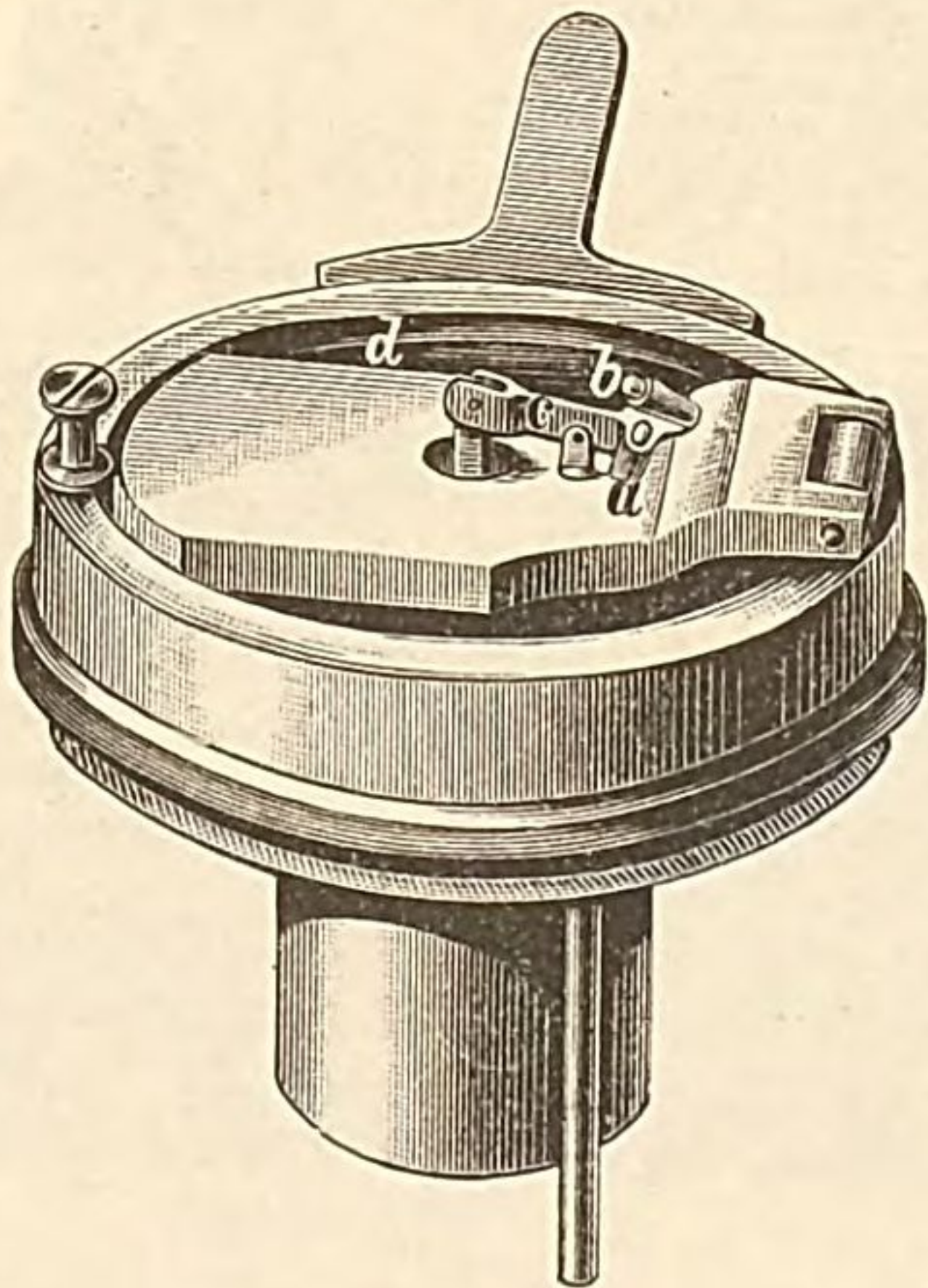


Fig. 24b.

Bei sorgsamster Behandlung lassen sich mit dem Phonograph auch die complicirtesten Musikstücke jeglicher Art in überraschend vollkommener Weise wiedergeben. Am leichtesten gelingen die Aufnahmen von Blasinstrumenten, sowohl einzelner Instrumente wie ganzer Capellen, am schwierigsten und undankbarsten ist die Aufnahme des Claviers. Weit weniger Sorgfalt erfordert die Aufnahme der gewöhnlichen Rede, von welcher meist nur die Zischlaute unvollkommen wiedergegeben werden.

Eine directe und unbegrenzte Vervielfältigung der Aufnahmen, wie sie das Berliner'sche Grammophon

auf galvanoplastischem Wege gestattet, ist beim Phonographen selbstverständlich nicht möglich, doch gelang es bei Versuchen in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt (Verhandl. der Physikal. Gesellschaft, Berlin, 8, 14), die Aufnahme stärkerer Musikstücke, sowie sehr deutlich gesprochener Rede durch eine directe Schlauchverbindung von einem Phonographen auf einen zweiten zu übertragen, dessen Walze dann ebenfalls die ursprünglichen Töne und Worte deutlich, wenn auch stark geschwächt, wiedergab.

Trotz der verhältnissmässigen Weichheit des Materials gestatten die Wachscylinder doch bei sorgfältiger Behandlung eine grosse Anzahl von Reproduktionen. — G.

¹⁾ v. Helmholtz, loc. cit., p. 293.

²⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), 47, 69; 1821.

an Stelle des Zahnrades angebracht war und in mehr oder minder rasche Rotation versetzt werden konnte. Bei jeder halben Umdrehung passirte der Stab eine rechteckige Spalte *CDEF*, deren Ränder er streifte, und verursachte so ein Geräusch von betäubender Heftigkeit. Anfangs, so lange die Rotationsbewegung eine sehr langsame ist, lassen sich die einzelnen Schläge von einander trennen; bei 7—8 Durchgängen in der Secunde wird jedoch der Ton vollständig zusammenhängend und zeigt eine bedeutende Stärke und Tiefe. Nach diesem Versuche würde also die untere Grenze bei 8 Schwingungen zu liegen scheinen. Indessen zeigte Despretz, dass man die Höhe des Tones nicht ändert, wenn man in der Bahn des Stabes noch eine zweite Spalte

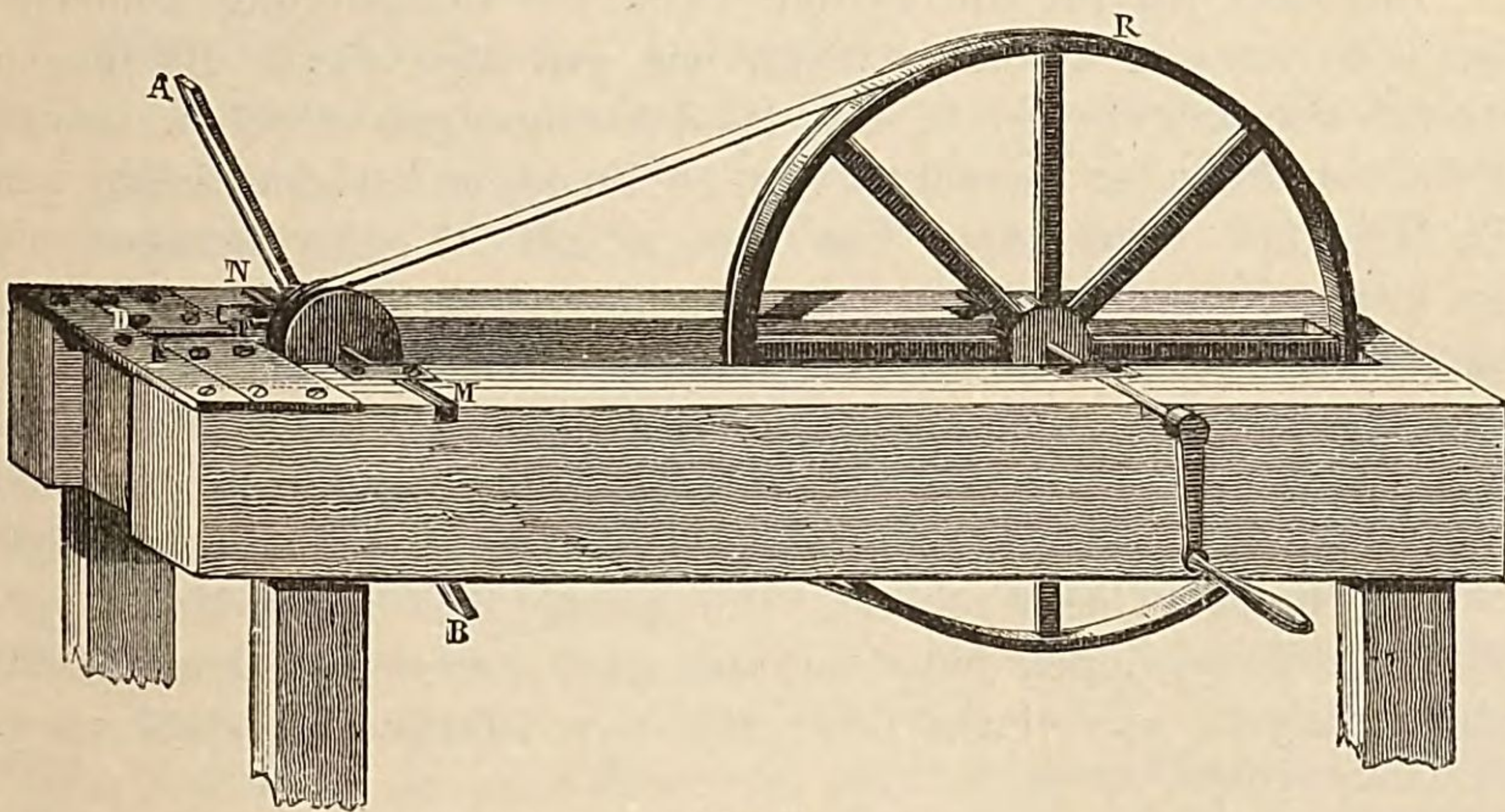


Fig. 25.

anbringt, so dass die Anzahl der Durchgänge in derselben Zeit verdoppelt wird; es war also nicht der durch 8 Stösse hervorbrachte Ton, den man hörte, sondern einer seiner Obertöne, die fast unvermeidlich bei jedem musikalischen Tone auftreten, zumal, wenn dieser von vereinzelt Stößen herrührt, deren Dauer im Vergleiche zu derjenigen der ganzen Schwingungsperiode nur sehr kurz ist. Um den Einfluss dieser Obertöne zu vermeiden, muss man möglichst einfache Töne wählen, wie sie z. B. eine gedeckte Pfeife oder eine in der Mitte mit einer Scheibe belastete Saite geben (v. Helmholtz); dann aber erhält man nur schwer eine genügende Stärke, und in dieser Hinsicht sind die Bedingungen weniger günstig, als bei dem Savart'schen Versuche, bei dem es wegen der beträchtlichen Stärke des erzeugten Tones nicht unmöglich ist, dass man bei Anwendung von einer oder zwei Spalten einfach den ersten Oberton mit 16 Schwingungen hört.

Die obere Grenze zu bestimmen ist noch schwerer. Despretz¹⁾ kam mit Stimmgabeln, die von Marloye dem Gehöre nach auf Octaven abgestimmt waren, bis zum Tone dis_7 ²⁾ mit ungefähr 38 000 Schwingungen.³⁾ Diese Zahl, die von verschiedenen Beobachtern bestätigt worden ist, lässt auch v. Helmholtz gelten. Übrigens hat Wollaston nachgewiesen, dass viele Leute nicht mehr das spitze Zirpen der Grillen vernehmen können, ja bisweilen nicht einmal das Piepen der Sperlinge; die Grenze ist also je nach der Beschaffenheit des Ohres ganz verschieden.

Alles in Allem können also die Grenzen der hörbaren Töne auf 16 und 38 000 Schwingungen pro Secunde festgesetzt werden, was einem Intervalle von ungefähr 11 Octaven entspricht.

Das Intervall für die in der Musik zur Verwendung kommenden Töne ist viel kleiner. Wenn wir von dem durch die langen Orgelpfeifen gegebenen C_2 mit 16 Schwingungen absehen (offene Pfeife von 32 oder gedeckte von 16 Fuss), so ist der tiefste von den Musikern verwendete Ton das A_2 mit 27 Schwingungen bei den neuen Flügeln; der tiefste Ton der Orchesterinstrumente ist das E_1 der Contrabässe mit 41 Schwingungen. Die grossen Piano-forte steigen bis zum a_4 mit 3500, bisweilen zu c_5 mit 4200 Schwingungen; nur ganz ausnahmsweise gebraucht man noch höhere Noten, deren höchste das d_5 der kleinen Flöte mit 4700 Schwingungen zu sein scheint. Die gewöhnlich in der Musik verwendeten Töne liegen jedoch thatsächlich zwischen 30 und 4000 Schwingungen, was einem Intervalle von 7 Octaven gleichkommt.

¹⁾ Despretz, C. R.; 1845.

²⁾ Um die verschiedenen Octaven unterscheiden zu können, versieht man sie mit Indices, wie wir später noch sehen werden.

³⁾ Zur Hervorbringung sehr hoher Töne kann man sich auch gläserner oder stählerner Cylinder bedienen, die man in longitudinale oder transversale Schwingungen versetzt. Savart fand nach dieser Methode 25 000, König nur 20 000 als oberste Grenze. Hagenbach stellte in dieser Hinsicht ein hübsches Experiment an. Nachdem er eine passend regulirte empfindliche Flamme (vgl. weiter unten) in der richtigen Entfernung aufgestellt hatte, strich er mit dem Violinbogen nach einander die nach abnehmendem Durchmesser geordneten Cylinder von König an. Jedesmal zuckte die Flamme, und zwar auch dann noch lebhaft, wenn das ganz nahe an den letzten Cylinder gehaltene Ohr keinen Ton mehr zu vernehmen vermochte.

Zweites Capitel.

Musikalische Intervalle.

333. Musikalische Intervalle. — Obgleich nach dem Früheren die Grenzen der musikalisch verwendbaren Töne ziemlich eng sind, so können doch weitaus nicht alle Töne innerhalb dieser Grenzen in fortlaufender Reihe verwendet werden. Bei allen Völkern und zu allen Zeiten, in der einfachsten Melodie wie in der complicirtesten Harmonie, folgen die Töne in bestimmten Intervallen auf einander und nicht in einer ununterbrochenen Reihenfolge. Diese stufenweise Veränderung des Tones ist für das Wesen der Musik ebenso charakteristisch, wie der Rhythmus.

Ausserdem liefert uns die Beobachtung eine Thatsache, die wir für den Augenblick nur feststellen wollen, ohne den Versuch zu machen, sie zu erklären: Sowohl bei zwei auf einander folgenden Tönen (Melodie), als auch bei zwei gleichzeitig erklingenden (Harmonie) hat das Ohr nur dann eine angenehme Eupfindung, wenn das Verhältniss der Schwingungszahlen ein einfaches ist. Dieses Verhältniss bestimmt das *Intervall* der beiden Töne, und zwar ganz unabhängig von deren absoluter Höhe.

Der Einheit entspricht der *Einklang*, die *Prim*.

Das hierauf folgende einfachste Verhältniss ist die Zahl 2; sie bezeichnet die *Octave*, und zwar die höhere Octave, wenn die Schwingungszahl die doppelte ist, die tiefere Octave, wenn die Schwingungszahl nur die Hälfte beträgt.

Hieran schliesst sich die Zahl 3, welche die *Quinte* der *Octave* charakterisirt, dann die Zahl 4, welche den um zwei Octaven höheren Ton definirt, u. s. f.

Diese Reihe 1, 2, 3, 4, 5 bildet die *harmonische Reihe* und die Töne 2, 3, 4, 5 heissen die *Obertöne* des Grundtones 1.

334. Consonanzen. — Beschränken wir uns auf die innerhalb einer Octave liegenden Intervalle, dann führt uns die An-

wendung des oben ausgesprochenen Gesetzes auf die folgenden Intervalle:

$\frac{1}{1}$ Einklang, Prim,	$\frac{5}{4}$ grosse Terz,
$\frac{2}{1}$ Octave,	$\frac{6}{5}$ kleine Terz,
$\frac{3}{2}$ Quinte,	$\frac{5}{3}$ grosse Sexte,
$\frac{4}{3}$ Quarte,	$\frac{8}{5}$ kleine Sexte.

Die letztere bildet die Grenze der Consonanzen, die jedoch keine absolute Bedeutung beanspruchen kann. Mathematisch betrachtet hat man kein Kriterium dafür, wo die einfachen Verhältnisse aufhören, und auch in der Praxis giebt es keine scharfe Trennung zwischen den Consonanzen und Dissonanzen; diese Trennung hängt vielmehr von dem Bau der Tonleiter ab. Während beispielsweise die sieben Tonarten der Griechen die Grundlage für unsere beiden Tonleistersysteme, Dur und Moll, lieferten, wurde die Terz, die zuerst als Dissonanz galt, im Mittelalter zwar schon als unvollkommene Consonanz aufgefasst, man schloss sie jedoch noch vom Endaccorde aus; später wurde auch die grosse Terz gebräuchlich, während man erst seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die kleine Terz in Anwendung brachte, um in scharfer Weise den Mollklang hervorzuheben. Auch die Verwendung der kleinen Sexte gehört der neueren Zeit an. Bei der Mehrzahl der Instrumente klingt das Intervall der natürlichen Septime $\frac{7}{4}$ mindestens ebenso gut, als die kleine Sexte, und doch wurden die mit der Zahl 7 gebildeten Intervalle von den Musikern nicht angenommen. Dies hat seinen Grund weniger darin, dass die Zahl 7 zu gross ist (man verwendet noch grössere), als darin, dass die Zahl als Primzahl vollkommen ausserhalb der übrigen Intervalle unserer Tonleiter steht. So befindet sich zwischen den letzten Consonanzen, die durch die Zahl 5 charakterisirt sind, also den Terzen und den Sexten, und den Dissonanzen, die durch die höheren, mit 2, 3 und 5 theilbaren Zahlen gebildet werden, wie z. B. die grosse Secunde, eine vollständige Lücke, die durch die Zahl 7 ausgefüllt wird.¹⁾

¹⁾ Es ist durchaus nicht unmöglich, dass sich auch die harmonische Septime eine Stelle in der Musik erobert. Sie klingt nicht sowohl unangenehm, als eigenthümlich, und die Eigenthümlichkeit ihres Klanges

Die Dissonanzen haben übrigens ihre volle Existenzberechtigung, denn sie wirken als Contrastmittel und bereiten auf die Consonanzen vor. Ihre Wichtigkeit nimmt in der modernen Musik von Tag zu Tag zu, denn diese trägt kein Bedenken, den mit der Consonanz eintretenden Ruhepunkt immer weiter hinaus zu schieben.

335. Accorde. — Die Regel, welche für das Zusammenklingen zweier Töne gilt, erstreckt sich auch auf gleichzeitiges Erklängen mehrerer Töne, die *Accorde*. Damit ein aus drei oder mehr Tönen bestehender Accord eine Consonanz bildet, müssen sich nicht nur die Intervalle zwischen den verschiedenen Tönen und dem Grundtone, sondern auch diejenigen zwischen sämtlichen Tönen unter einander durch einfache Zahlen ausdrücken lassen; ist dies nicht der Fall, dann wird die Harmonie des Accordes durch irgend eine Dissonanz gestört erscheinen.

Der Typus der aus drei Tönen bestehenden Consonanz ist der *Durdreiklang*

$$\begin{array}{ccccc} c & & e & & g \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & 5 & & 6 & \\ & \frac{5}{4} & & \frac{6}{5} & \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & \\ & & 3 & & \\ & & \frac{3}{2} & & \end{array}$$

der, wie man sieht, aus zwei über einander liegenden Terzen besteht, einer grossen und einer kleinen Terz, so dass der Grundton der ersten mit dem oberen Tone der zweiten eine Quinte bildet.

Der typische *Molldreiklang*

$$\begin{array}{ccccc} c & & es & & g \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \\ & 6 & & 5 & \\ & \frac{6}{5} & & \frac{5}{4} & \\ & & \underbrace{\hspace{2cm}} & & \\ & & 3 & & \\ & & \frac{3}{2} & & \end{array}$$

enthält dieselben Intervalle, aber in anderer Reihenfolge; hier liegt die kleine Terz unten. Diese Umkehrung allein würde nicht dazu ausreichen, die starke Verschiedenheit der beiden Accorde zu erklären, wenn sie nicht im Mollaccorde eine gewisse Störung mit sich brächte, wie wir weiterhin (389) noch sehen werden.

beruht wohl mehr auf unserer Gewohnheit, als auf ihrer wahren Natur. Ihre regelmässige Anwendung jedoch liesse sich nur durch vollständige Revolution gegen das thatsächlich vorhandene System einführen (vgl. Blaserna, *Le son et la musique*, p. 78; Paris, Germer-Baillière, 1879).

Die einzigen, aus drei Tönen bestehenden consonirenden Accorde innerhalb einer Octave sind:

<i>c</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>c</i>	<i>es</i>	<i>g</i>
<i>c</i>	<i>f</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>f</i>	<i>as</i>
<i>c</i>	<i>es</i>	<i>as</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>

Wenn man statt: $c-f-a$ und statt $c-f-as$ schreibt: $G-c-e$ und $G-c-es$ und statt $c-es-as$ und $c-e-a$: $e-g-c_1$ und $es-g-c_1$, so ergeben sich die Quartsextaccorde und die Terzsextaccorde als Umkehrungen der Grundaccorde. Man erhält also den Quartsextaccord, indem man die Quinte des Grundaccords eine Octave tiefer legt, und den Terzsextaccord, indem man den Grundton des Grundaccords um eine Octave erhöht. Somit lassen sich die consonirenden Accorde auch folgendermassen schreiben:

<i>c</i>	<i>e</i>	<i>g</i>		<i>c</i>	<i>es</i>	<i>g</i>	
	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>c</i> ₁		<i>es</i>	<i>g</i>	<i>e</i> ₁
		<i>g</i>	<i>c</i> ₁	<i>e</i> ₁		<i>g</i>	<i>c</i> ₁
oder							<i>es</i> ₁
4	5	6		10	12	15	
	5	6	8		12	15	20
		3	4	5		15	20
							24

336. Die Tonleiter. — Unter *Tonleiter* versteht man die Reihe der innerhalb einer Octave vorkommenden Töne, die in den vorschriftsmässigen Intervallen auf einander folgen.

Diatonische Tonleiter. — Unsere gebräuchliche Tonleiter besteht, abgesehen von der Octave, aus sieben Tönen; dieselben werden durch folgende Zahlen definirt, welche ihre Verhältnisse zum Grundtone (der *Tonika*) wiedergeben:

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c</i> ₁ ¹⁾
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

oder, in ganzen Zahlen:

24	27	30	32	36	40	45	48
----	----	----	----	----	----	----	----

¹⁾ Die französischen Bezeichnungen für die Noten der Tonleiter wurden im elften Jahrhundert durch den Benedictiner Guido v. Arezzo eingeführt; derselbe wählte für jede Note die erste Silbe der Versanfänge in einem Hymnus auf den heiligen Johannes: *Ut* queant laxis *Resonare* fibris *Mira* gestorum *Famuli* tuorum, *Solve* polluti *Labii* reatum, *Sancte* *Ioannes*; also:

ut re mi fa sol la si.

Abgesehen von den bereits früher erwähnten Consonanzen, der *grossen Terz* $\frac{5}{4}$, der *Quarte* $\frac{4}{3}$, der *Quinte* $\frac{3}{2}$, der *Sexte* $\frac{5}{3}$ und der *Octave* 2, deren Namen offenbar von ihrer Stellung in der Tonleiter herrühren, finden wir in ihr als Dissonanzen die *grosse Secunde* $\frac{9}{8}$ und die *grosse Septime* $\frac{15}{8}$.

Diese ganze Tonleiter ist nichts anderes, als die Entwicklung des Durdreiklangles: der Accord mit der *Tonika* *c* liefert *e* und *g*; geht man von der *Dominante* *g* aus, dann findet man *h* und *d*; aus dem Accorde dagegen, dessen oberer Ton *c*₁ ist, erhält man *f* und *a*.

Die Verhältnisse der Töne zu einander, oder, mit anderen Worten, ihre Intervalle, sind folgende:

$$\begin{array}{ccccccc} c & d & e & f & g & a & h & c \\ \hline \frac{9}{8} & \frac{10}{9} & \frac{16}{15} & \frac{9}{8} & \frac{10}{9} & \frac{9}{8} & \frac{16}{15} \end{array}$$

Sie bilden drei verschiedene Classen: die *grossen ganzen Töne* $\frac{9}{8}$, die *kleinen ganzen Töne* $\frac{10}{9}$ und die *grossen halben Töne* $\frac{16}{15}$.

Man bezeichnet die letzteren als *grosse halbe Töne*, um sie von einem anderen Intervalle, dem *kleinen halben Tone* $\frac{25}{24}$ zu unterscheiden, den wir demnächst kennen lernen werden.

Der kleine ganze Ton lässt sich als die Summe von einem

Früher waren die Noten mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet worden, und die verschiedenen Octaven wurden folgendermaassen geschrieben:

$$ABCDEFGG; abcdefg; aabbcc \dots$$

An der Spitze dieser Reihe fügte man später eine Note hinzu, die man mit *F* bezeichnete; von ihr rührt der französische Name *gamme* für die Tonleiter her. In Deutschland und England wurde die Bezeichnung mit Buchstaben beibehalten. Wir haben also:

Deutsche Bezeichnung	.	.	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>
Englische	"	.	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
Französische	"	.	<i>ut</i>	<i>re</i>	<i>mi</i>	<i>fa</i>	<i>sol</i>	<i>la</i>	<i>si</i>

Zur Unterscheidung der verschiedenen Octaven verwendet man grosse und kleine Buchstaben, sowie Indices, also:

$$\begin{array}{cccccccc} C_2 & C_1 & C & c & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ ut_{-2} & ut_{-1} & ut_1 & ut_2 & ut_3 & ut_4 & ut_5 & ut_6 & ut_7. \end{array}$$

Das Stimmgabel-*a* ist *a*₁.

grossen halben und einem kleinen halben Ton auffassen; es ist nämlich

$$\frac{16}{15} \cdot \frac{25}{24} = \frac{10}{9},$$

denn die Summe zweier Intervalle wird durch das Product der zugehörigen Verhältnisszahlen ausgedrückt, ebenso wie ein Intervall allein durch einen Quotienten.

Der Unterschied zwischen einem grossen ganzen und einem kleinen ganzen Ton ist $\frac{81}{80}$; dies Intervall heisst ein *Komma*. Sieht man davon ab, so kann man sagen, die Tonleiter bestehe aus einer Aufeinanderfolge von zwei ganzen Tönen, einem halben Ton, drei ganzen Tönen und einem halben Tone. Dies ist unsere aus der Pythagoräischen Tonleiter abgeleitete Durtonleiter.

Die Pythagoräische Tonleiter. — Die Stufen dieser Tonleiter waren durch die folgenden Verhältnisse bestimmt, welche nur die Factoren 2 und 3 enthalten:

<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>a</i>	<i>h</i>	<i>c</i>
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2,

oder

1	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^5}{2^7}$	2;
---	-------------------	-------------------	-----------------	---------------	-------------------	-------------------	----

mit anderen Worten, die Pythagoräische Tonleiter schritt nur in Quinten fort. Hatte man nun diese Scala angenommen, um die Saiten der Lyra leicht stimmen zu können, oder stand sie in Verbindung mit der Harmonie der Zahlen, in welche Pythagoras durch die ägyptischen Priester eingeführt worden war? Wie dem auch sei, jedenfalls führte das scheinbar einfache Princip für bestimmte Verhältnisse zu sehr complicirten Zahlen. Ganz abgesehen von der Septime, welche als blosser Übergangston ohne wesentliche Nachtheile von der Tonika entfernt werden konnte, zeigen doch Terz und Sexte einen Mangel an Einfachheit, der sie für die Harmonie unbrauchbar macht.¹⁾

¹⁾ Diese mangelhafte Beschaffenheit der Terz und der Sexte hat zweifelsohne die Entwicklung der harmonischen Musik bei den Griechen wesentlich gehindert, und die Einführung der harmonischen $\frac{5}{4}$ an Stelle der dissonirenden $\frac{81}{64} = \frac{5}{4} \cdot \frac{81}{80}$ war sicherlich der bedeutendste Fortschritt für unsere Tonleiter. Schon im 4. Jahrhundert v. Chr. giebt Archytas den wahren Werth $\frac{5}{4}$ für die consonirende grosse Terz in dem enharmonischen System an. Didymus führt ihn im ersten Jahrhundert unserer Zeit-

Nach Cornu und Mercadier¹⁾ dagegen sind die Pythagoräischen Intervalle gerade die wirklich melodischen Intervalle. Um die Grösse eines melodischen oder eines harmonischen Intervalls scharf zu bestimmen, liessen sie es auf der Violine

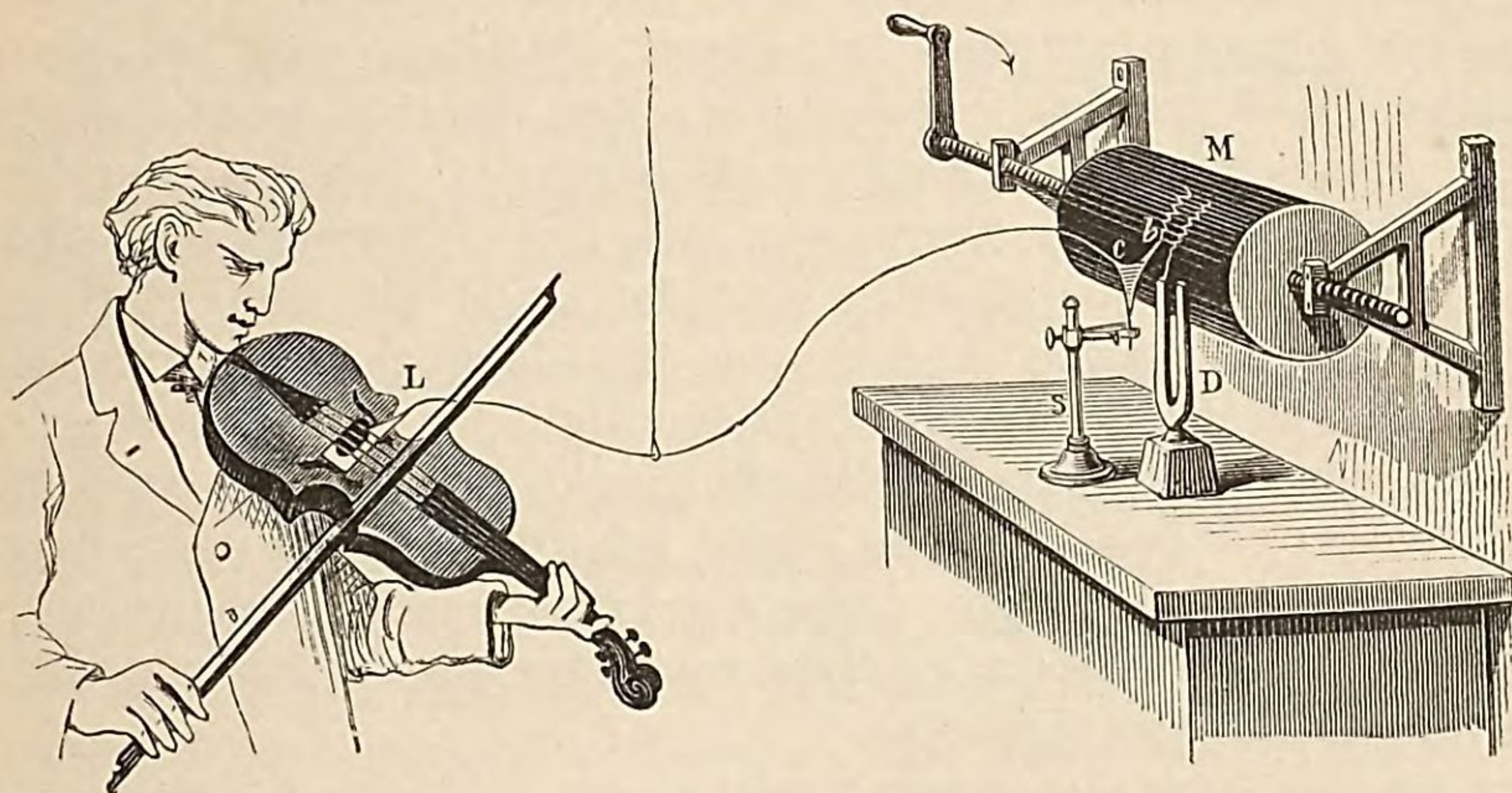


Fig. 26.

spielen, und zwar entweder im Verlaufe einer Melodie, oder als Accord, indem zwei auf das gewünschte Intervall abgestimmte Saiten gleichzeitig angestrichen wurden; die Schwingungen der beiden Töne wurden dann durch eine höchst sinnreiche Vor-

rechnung beim diatonischen Tetrachord ein, das er folgendermaassen eintheilt:

$$\begin{array}{ccccc} h & & c & & d & & e \\ \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \\ \frac{16}{15} & & \frac{10}{9} & & \frac{9}{8} & & \end{array}$$

Ptolemäus gab diesem Tetrachord, das er syntonisches nannte, folgende abweichende Einrichtung:

$$\begin{array}{ccccc} h & & c & & d & & e \\ \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \underbrace{\quad} & & \\ \frac{16}{15} & & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \end{array}$$

Abgesehen von der Abweichung in Betreff der beiden Arten von ganzen Tönen findet sich die grosse Terz $c - e$ hier mit demselben Werthe $\frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{4}$; aber die Griechen verwendeten dies Intervall nicht als Consonanz, erst im Mittelalter begann man, es als unvollkommene Consonanz gelten zu lassen. Unsere Tonleiter stammt thatsächlich erst aus dem Ende des sechzehnten Jahrhunderts (Zarlin).

¹⁾ Cornu et Mercadier, C. R.; 1869—1872.

richtung fixirt. Unter dem Stege der Violine brachten sie ein Plättchen L aus dünnem Messingblech an, das am einen Ende eines durch Kautschukringe in der Schwebe gehaltenen Metalldrahtes befestigt war. An das andere Ende des Drahtes war ein Plättchen Rauschgold c angelöthet, welches von einem schweren Stativ s getragen wurde. An diesem Plättchen war mit etwas Wachs ein Federbart b festgeklebt, der den mit berusstem Papiere überzogenen Metallcylinder M berührte. Brachte man eine Saite zum Tönen, so übertrugen sich ihre Schwingungen durch den Steg, das Messingplättchen und den Draht auf den Federbart; dieser führte dieselbe Anzahl von Schwingungen aus, wie die Saite und zeichnete dieselben auf dem Cylinder neben den Schwingungen einer chronographischen Stimmgabel D auf. Cornu und Mercadier fanden auf diese Weise, dass die harmonischen Intervalle stets mit denjenigen unserer gebräuchlichen Tonleiter übereinstimmten, die melodischen Intervalle dagegen mit denjenigen der Pythagoräischen Tonleiter.

Die auf einander folgenden Intervalle bei der Pythagoräischen Tonleiter sind:

$$\begin{array}{ccccccc} c & d & e & f & g & a & h & c \\ \hline \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{256}{243} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{256}{243} \end{array}$$

Hierin sind sämtliche ganzen Töne unter einander gleich und stimmen mit unserem grossen ganzen Tone überein; die halben Töne sind klein und zeigen kein einfaches Verhältniss, finden sich aber an derselben Stelle, wie bei unserer gebräuchlichen Tonleiter.

Molltonleiter. — In der Musik verwendet man noch eine zweite Tonleiter, welche durch die kleine Terz charakterisirt ist und *Molltonleiter* heisst; sie besteht aus folgenden Verhältnisszahlen:

$$1 \quad \frac{9}{8} \quad \frac{6}{5} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{8}{5} \quad \frac{9}{5} \quad 2$$

mit nachstehenden Intervallen,

$$\frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{10}{9} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{16}{15} \quad \frac{9}{8} \quad \frac{10}{9};$$

dies sind dieselben, wie sie in der Durtonleiter vorkommen, nur in anderer Reihenfolge.

Nennt man T und T' die beiden ganzen Töne und t den halben Ton, dann hat man:

Durtonleiter $TT' t TT' T t$
 Molltonleiter $T t T' T t TT'$ ¹⁾.

337. Änderung der Tonart (Transponiren). — In unserem harmonischen Systeme besitzt der Grundton (die *Tonika*) eine vorwiegende Bedeutung. Darauf ist die Wichtigkeit der Änderung der Tonart zurückzuführen, nicht nur, wenn es sich darum handelt, das Musikstück auf eine für das Instrument oder die Singstimme passende Höhe zu bringen, sondern auch, wenn es gilt, den Grundton zu verlassen, um später auf denselben zurückzukommen (*Modulation*). Für die Singstimme bietet das Transponiren keinerlei Schwierigkeiten; man kann beim Singen eines Liedes stets von einem beliebigen Tone ausgehen, denn die Intervalle hängen nicht von der absoluten Tonhöhe ab. Für die Mehrzahl der Instrumente dagegen lässt sich das Transponiren nicht auf eine ebenso einfache Weise durchführen. Fassen wir beispielsweise ein nach unserer gewöhnlichen musikalischen Scala gestimmtes Instrument ins Auge, das nur mit festen Tönen versehen ist, und nehmen an, wir wollten darauf, mit g beginnend, die Durtonleiter spielen; dann erhalten wir successive die Töne:

$$\underbrace{g}_{T'} \underbrace{a}_{T} \underbrace{h}_{t} \underbrace{c_1}_{T} \underbrace{d_1}_{T'} \underbrace{e_1}_{t} \underbrace{f_1}_{T} \underbrace{g_1},$$

d. h., wenn man dabei von den beiden Arten von ganzen Tönen T und T' zu Anfang absieht, die für die Durtonleiter charakteristische Reihe von ganzen und halben Tönen, nur steht in diesem Falle der letzte halbe Ton an vorletzter, statt an letzter Stelle. Um bis auf das Komma die ursprüngliche Reihenfolge wieder herzustellen, genügt es, das f_1 um einen kleinen halben Ton zu erhöhen, d. h. es mit einem Kreuze zu versehen.²⁾ Eine solche

¹⁾ Dies gilt wenigstens für die absteigende Tonleiter; für die aufsteigende braucht man statt dessen die Reihe

$$T t T' T T' T t,$$

die aus der ersten Hälfte der Molltonleiter und der zweiten Hälfte der Durtonleiter besteht.

²⁾ Die Erhöhung des Tones pflegt man durch das Anhängen der Silbe *is*, die Erniedrigung durch das Anhängen der Silbe *es* zu bezeichnen; des Wohlklanges wegen lässt man dabei nach einem Vocale das *e* weg, also $c^\sharp = cis$, $d^\flat = des$ und $a^\flat = as$.

Erhöhung entspricht der Multiplication der Schwingungszahl mit $\frac{25}{24}$, eine Erniedrigung also der Multiplication mit $\frac{24}{25}$. Will man genau das Intervall $h - c_1$ wieder erhalten, dann hat man *fis* aus *g* dadurch abzuleiten, dass man letzteres um einen grossen halben Ton erniedrigt. Die hierfür von Delezenne angegebene Regel lautet folgendermaassen: Um einen Ton zu erhöhen, hat man die Schwingungszahl des in der diatonischen Tonleiter auf ihn folgenden Tones mit $\frac{15}{16}$ zu multipliciren; um ihn zu erniedrigen, multiplicirt man die Schwingungszahl des vorhergehenden mit $\frac{16}{15}$. Die Schule Galin-Paris-Chev , welche die Pythagoräische Tonleiter angenommen hat, befolgt dieselbe Regel; nur erhöht man, da der Pythagoräische halbe Ton $\frac{256}{243}$ beträgt, nach ihr eine Note dadurch, dass man die unmittelbar darauf folgende im Verhältniss von $\frac{243}{256}$ erniedrigt, und man erniedrigt dieselbe, indem man die vorhergehende um $\frac{256}{243}$ erhöht. Der erhöhte Ton ist dann etwas höher, als der erniedrigte, eine Bestimmung, die von den meisten neueren Lehrbüchern der Musik angenommen worden ist.

338. Die musikalische Temperatur. — Welches System man nun auch annehmen mag, man würde bei einem Instrumente mit festen Tönen doch nicht alle diese Erhöhungen und Erniedrigungen einführen können. Dieser Unmöglichkeit verdankt die *temperirte Stimmung* ihr Entstehen. Nach mehrfachen Versuchen, sich mit angenähert richtigen Intervallen zu begnügen, welche gestatteten, die nur wenig von einander abweichenden Töne als gleich anzusehen, gelangte man zu der jetzt gebräuchlichen *temperirten Tonleiter*; bei dieser ist die Octave in zwölf unter einander gleiche Theile getheilt, deren jeder in Folge dessen der Grösse $\sqrt[12]{2} = 1,05946$ entspricht. Dies Intervall fasste man als halben Ton auf, während jeder ganze Ton hiernach aus zwei halben Tönen bestehen würde. Die Erhöhung eines Tones entspricht dann der Erniedrigung des unmittelbar darauf folgenden Tones, wie die folgende Tabelle zeigt. In dieser enthält die Columne A die Erhöhungen und Erniedrigungen nach der alten Regel des Aristoxenes, die noch vor 50 Jahren allgemein im Gebrauch war, die Columne D die nach Delezenne veränderten Töne (im Intervalle eines kleinen ganzen Tones stimmen die beiden Regeln überein); die Columne C die Noten nach Chev :

	Ptolemäische Tonleiter		Temperirte Tonleiter	Pythagoräische Tonleiter	
	A	D		C	
<i>c</i>	1 = 1,00000 . . .		$2^{\frac{0}{12}} = 1,00000$	1 = 1,00000	<i>c</i>
<i>cis</i>	$\frac{25}{24} = 1,04167$	$\frac{135}{128} = 1,05469$	$2^{\frac{1}{12}} = 1,05946$	$\frac{2187}{2048} = 1,06787$	<i>cis</i>
<i>des</i>	$\frac{27}{25} = 1,08000$	$\frac{16}{15} = 1,06667$		$\frac{256}{243} = 1,05350$	<i>des</i>
<i>d</i>	$\frac{9}{8} = 1,12500$. . .		$2^{\frac{2}{12}} = 1,12246$	$\frac{9}{8} = 1,12500$	<i>d</i>
<i>dis</i>	$\frac{75}{64} = 1,17187$	$\left. \begin{array}{l} \frac{6}{5} = 1,20000 \end{array} \right\}$. . .	$2^{\frac{3}{12}} = 1,18921$	$\frac{19683}{16384} = 1,20136$	<i>dis</i>
<i>es</i>	$\frac{6}{5} = 1,20000$			$\frac{32}{27} = 1,18519$	<i>es</i>
<i>e</i>	$\frac{5}{4} = 1,25000$. . .		$2^{\frac{4}{12}} = 1,25992$	$\frac{81}{64} = 1,26563$	<i>e</i>
<i>f</i>	$\frac{4}{3} = 1,33333$. . .		$2^{\frac{5}{12}} = 1,33484$	$\frac{4}{5} = 1,33333$	<i>f</i>
<i>fis</i>	$\frac{25}{18} = 1,38889$	$\frac{45}{32} = 1,40625$	$2^{\frac{6}{12}} = 1,41421$	$\frac{729}{512} = 1,42383$	<i>fis</i>
<i>ges</i>	$\frac{36}{25} = 1,44000$	$\frac{64}{45} = 1,42222$		$\frac{1024}{729} = 1,40467$	<i>ges</i>
<i>g</i>	$\frac{3}{2} = 1,50000$. . .		$2^{\frac{7}{12}} = 1,49831$	$\frac{3}{2} = 1,50000$	<i>g</i>
<i>gis</i>	$\frac{25}{16} = 1,56250$	$\left. \begin{array}{l} \frac{8}{5} = 1,60000 \end{array} \right\}$. . .	$2^{\frac{8}{12}} = 1,58740$	$\frac{6561}{4096} = 1,60181$	<i>gis</i>
<i>as</i>	$\frac{8}{5} = 1,60000$			$\frac{128}{81} = 1,58024$	<i>as</i>
<i>a</i>	$\frac{5}{3} = 1,66667$. . .		$2^{\frac{9}{12}} = 1,68179$	$\frac{27}{16} = 1,68750$	<i>a</i>
<i>ais</i>	$\frac{125}{72} = 1,73611$	$\frac{225}{128} = 1,75781$	$2^{\frac{10}{12}} = 1,78180$	$\frac{59049}{32768} = 1,80202$	<i>ais</i>
<i>b</i>	$\frac{9}{5} = 1,80000$	$\frac{19}{9} = 1,77778$		$\frac{16}{9} = 1,77778$	<i>b</i>
<i>h</i>	$\frac{15}{8} = 1,87500$. . .		$2^{\frac{11}{12}} = 1,80775$	$\frac{243}{128} = 1,89844$	<i>h</i>
<i>c'</i>	2 = 2,00000 . . .		$2^{\frac{12}{12}} = 2,00000$	2 = 2,00000	<i>c'</i>

Kein einziges Intervall bleibt bei der temperirten Stimmung unverändert; die grösste Änderung erleidet die Terz, deren Abweichung von der natürlichen Terz $\frac{1}{126}$ beträgt, eine Grösse, die keineswegs zu vernachlässigen ist; man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, dass bei der mittelsten Octave des Claviers in Folge der temperirten

Stimmung das e um 2,5 Schwingungen¹⁾ zu hoch steht, während in derselben Octave der Unterschied zwischen der grossen und kleinen Terz, der vollkommen genügt, um den ganzen Charakter eines Tonstückes zu verändern, nur 13 Schwingungen beträgt.

339. Normal-Stimmgabel. — Da die relativen Werthe der verschiedenen Töne der Tonleiter bekannt sind, genügt es zur Bestimmung aller Töne, den absoluten Betrag eines einzigen festzusetzen. Der Ton, auf welchen alle übrigen bezogen werden, ist das a der Stimmgabel $= a_1$.

Früher war dieser Normalton nichts weniger als fest bestimmt. Aus den Messungen von Sauveur, den ältesten, welche wir über diesen Gegenstand besitzen, ergab sich, dass im Jahre 1700 zu Paris der gewöhnliche Orgel- und Clavierton 405 Schwingungen in der Secunde machte. Während des 18. Jahrhunderts schwanken die Bestimmungen zwischen 410 und 425 Schwingungen. Im Jahre 1833 fand Scheibler allein zu Paris in der Oper zwei Gabeln von 426,5 und 434, in der italienischen Oper und im Conservatorium zwei andere von 435 und 440,5. Einige Jahre später war diese Stimmung noch mehr in die Höhe gegangen, und im Jahre 1857 maass Lissajous in der Oper sogar die Schwingungszahl 448. Um dieser Unordnung Einhalt zu thun, bestimmte eine Verfügung vom 16. Februar 1859 für Frankreich das Stimmgabel- a zu 435 Schwingungen in der Secunde.²⁾

Die Tonleiter, welche sich auf diesem a aufbaut, ist folgendermaassen zusammengesetzt:

c_1	d_1	e_1	f_1	g_1	a_1	h_1	c_1
261	293,625	326,25	348	391,5	435	489,375	522

und die auf einander folgenden Octaven:

¹⁾ Die Pythagoräische Terz ist an dieser Stelle um 4 Schwingungen zu hoch.

²⁾ Sauveur und später Chladni hatten als Ausgangspunkt ein c_1 von 256 Schwingungen gewählt; da sich hiernach jedes c als eine Potenz von 2 ergibt, so findet dies System bei den Physikern noch häufig Verwendung; das a_1 hat dann 426,66 Schwingungen. In Deutschland hatte man sich nach der Stuttgarter Convention vom Jahre 1834 dem Scheibler'schen a_1 mit 440 Schwingungen angeschlossen, das sich von dem in Frankreich gewählten nur wenig unterschied, aber für die Berechnung bequemer war. Die zu Wien im Jahre 1885 zusammengetretene internationale Stimmtonconferenz entschied sich für $a_1 = 435$ Schwingungen und empfahl eine amtliche Beglaubigung der Stimmgabeln; diese wird für Deutschland von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Charlottenburg ausgeführt. In England ist der Kammerton ungefähr um einen halben Ton höher als bei uns.

$$\begin{array}{lll}
 C_{-2} = 16,3125 & c = 130,5 & c_3 = 1044 \\
 C_{-1} = 32,625 & c_1 = 261 & c_4 = 2088 \\
 C = 65,25 & c_2 = 522 & c_5 = 4176
 \end{array}$$

Vermittelst dieser Zahlen und der früher angegebenen Intervalle lassen sich die Schwingungszahlen eines beliebigen Tones leicht berechnen.

340. Akustische Logarithmen. — Da die Intervalle durch Quotienten dargestellt werden, so empfiehlt sich selbstverständlich für alle diese Berechnungen die Anwendung der Logarithmen. Wir geben hier eine kleine Tafel mit den hauptsächlichsten *akustischen Logarithmen*, wie man die Logarithmen der verschiedenen musikalischen Intervalle zu nennen pflegt.

Intervalle		Akustische Logarithmen	
Prime, Einklang	1	0,000 0000	0
Komma	$\frac{81}{80}$	0,005 3950	11
Kleiner halber Ton	$\frac{25}{24}$	0,017 7288	35
Temperirter halber Ton	$\sqrt[12]{2}$	0,025 0858	50
Grosser halber Ton	$\frac{16}{15}$	0,028 0287	56
Kleiner ganzer Ton	$\frac{10}{9}$	0,045 7575	91
Grosser ganzer Ton	$\frac{9}{8}$	0,051 1525	102
Kleine Terz	$\frac{6}{5}$	0,079 1812	158
Grosse Terz	$\frac{5}{4}$	0,096 9100	193
Quarte	$\frac{4}{3}$	0,124 9387	249
Quinte	$\frac{3}{2}$	0,176 0913	351
Kleine Sexte	$\frac{8}{5}$	0,204 1200	407
Grosse Sexte	$\frac{5}{3}$	0,221 8488	442
Kleine Septime	$\frac{9}{5}$	0,255 2725	509
Grosse Septime	$\frac{15}{8}$	0,273 0013	544
Octave	2	0,301 0300	600

Da sich der Logarithmus von 2 nur sehr wenig von 0,300 unterscheidet, so erhält man durch Multiplication obiger Logarithmen mit 2000 sehr angenäherte Werthe für die verschiedenen Intervalle in Sechshundertstel einer Octave, d. h. in Hundertstel eines ganzen Tones. Zieht man von jedem solchen Producte noch $\frac{1}{300}$ seines Werthes ab, dann findet man, bis auf weniger als eine Einheit, den genauen Betrag in Hundertstel eines ganzen Tones, wie er in der letzten Columnne unserer Tabelle angegeben ist.

Drittes Capitel.

Fortpflanzung des Schalles.

341. Fortpflanzung einer schwingenden Bewegung in einem elastischen Medium. — Wird an einer bestimmten Stelle eines elastischen Mediums irgend eine Erschütterung hervor gebracht, so pflanzt sich dieselbe nach und nach bis zu den entferntesten Theilen des Mediums fort.

Ein ganz bekanntes Beispiel für diese Thatsache, auf das schon die Stoiker aufmerksam machten, liefern die Wellen, welche auf der Oberfläche des Wassers entstehen, wenn man einen Stein hineinwirft: Um die getroffene Stelle herum bildet sich eine Vertiefung, der bald eine Erhebung folgt; dann breiten sich Thal und Berg auf der Oberfläche des Wassers aus, so dass eine kreisförmige Welle sichtbar wird, deren Radius sich fortwährend vergrößert. Beobachtet man gleichzeitig einen auf der Flüssigkeitsoberfläche schwimmenden leichten Gegenstand, z. B. einen Strohhalm, so bemerkt man, wie sich derselbe beim Vorübergang der Welle einen Augenblick senkt, dann emporsteigt, wieder sinkt und so fort, ohne sich dabei merklich von der Stelle zu bewegen. Also nicht das Wasser selbst verschiebt sich, sondern die Bewegung schreitet fort, indem sie sich immer neuen Molecülen mittheilt, während die früher in Bewegung gesetzten Theilchen wieder zur Ruhe kommen.

342. Flüssigkeitswellen. — Nach den eingehenden Experimentaluntersuchungen der Gebrüder Ernst Heinrich und Wilhelm Weber¹⁾ beschreibt das Flüssigkeitstheilchen gewöhnlich einen Kreis. Wir wollen beispielsweise annehmen, dass jedes Molecül einen vollen Umlauf vollendet, während sich die Bewegung vom Molecül 0 bis zum Molecül 12 fortpflanzt; dann ist

¹⁾ Ernst Heinrich und Wilhelm Weber, Wellenlehre, auf Experimente gegründet; Leipzig 1825.

am Ende einer Viertelperiode das Molecül 0 am tiefsten Punkte seiner Bahn angelangt, also am unteren Ende des verticalen Durchmessers, die Molecüle 1 und 2 haben $\frac{2}{12}$ bzw. $\frac{1}{12}$ ihrer Bahn zurückgelegt, während die Molecüle 3 bis 12 sich noch in Ruhe befinden. Nach einer halben Periode, wenn die Wellenbewegung das Molecül 6 erreicht, ist das Molecül 0 wieder in seine ursprüngliche

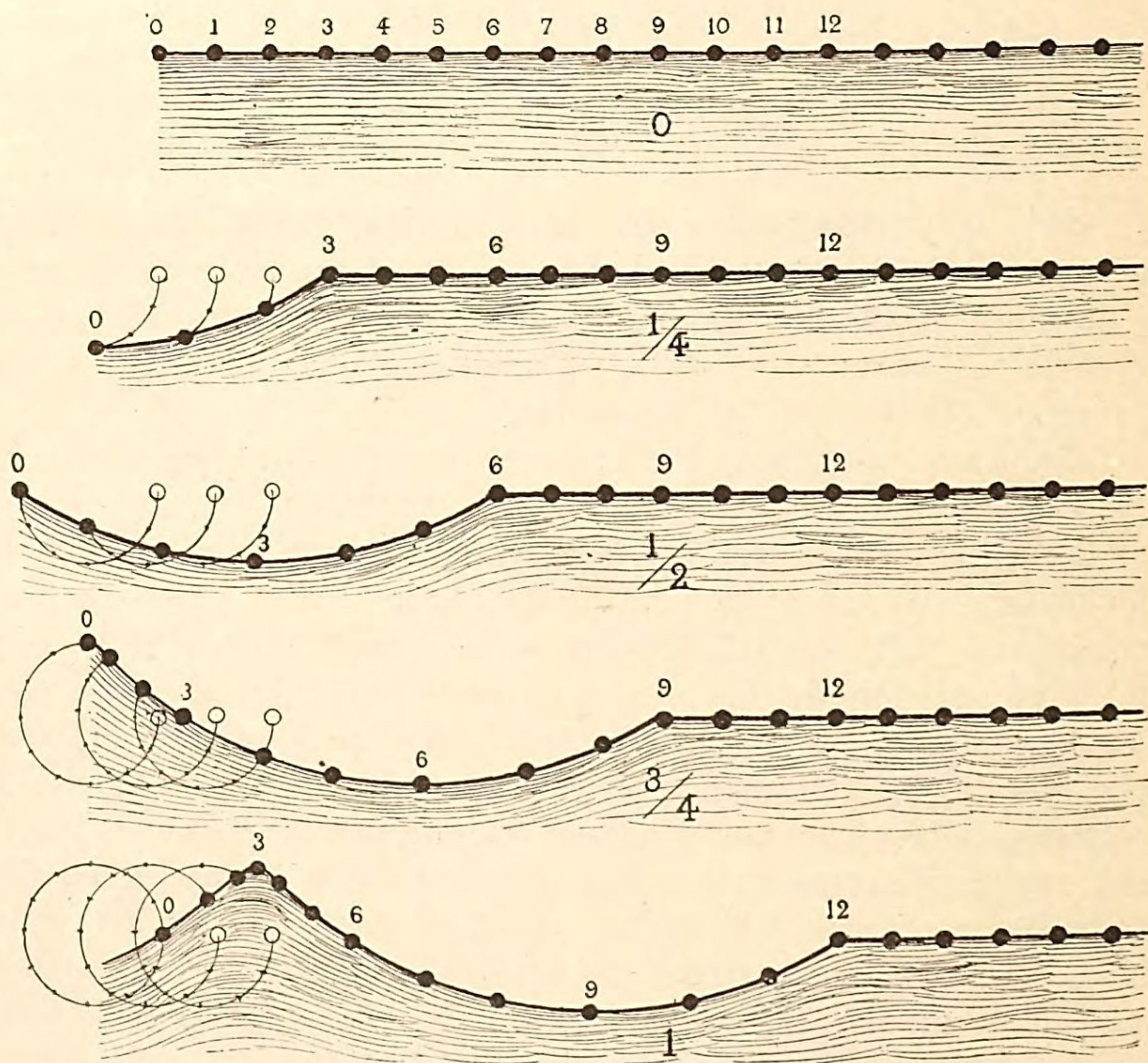


Fig. 27.

Horizontalebene zurückgelangt, aber an demjenigen Ende des horizontalen Durchmessers, welcher dem Ausgangspunkte gegenüber liegt. Sein Ausschlag in horizontaler Richtung hat in diesem Augenblicke ein Maximum erreicht, die Molecüle 1 und 2 sind wieder im Aufsteigen begriffen, nachdem sie $\frac{5}{12}$ bzw. $\frac{4}{12}$ der Kreisperipherie durchlaufen haben, während die Molecüle 3, 4 und 5, die $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$ und $\frac{1}{12}$ ihrer Bahn zurückgelegt haben, sich genau in derselben Stellung befinden, wie die Molecüle 0, 1 und 2

nach dem Verlauf einer Viertelperiode. Auf der Oberfläche des Wassers ist somit ein Thal entstanden, dem nunmehr ein Berg folgt; der eine Abhang desselben ist schon nach drei Viertel der Periode ausgebildet, der zweite kommt beim vierten Viertel hinzu, und nach Verlauf einer ganzen Periode hat sich die Welle vollständig ausgebildet und erstreckt sich von 0 bis 12. Sie pflanzt sich nun fort und zwar besteht sie stets aus einem Thale, bei dem die Molecüle weiter von einander entfernt sind, und aus einem Berge, bei welchem die Molecüle dichter gedrängt liegen.

Nehmen wir nun an, dass das Molecül 0 nach diesem ersten Umlaufe seine regelmässige Bewegung auf der Kreisperipherie

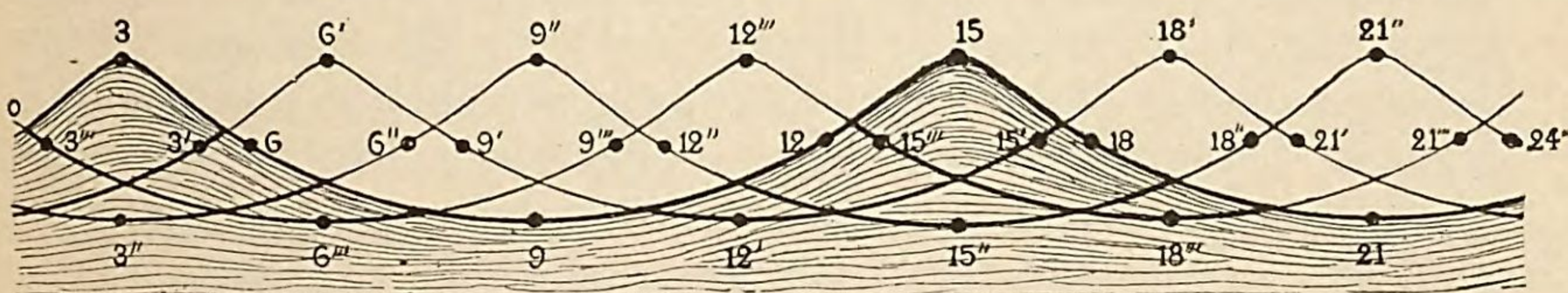


Fig. 28.

beibehält, dann werden der ersten Welle andere identische Wellen folgen, wie es Fig. 28 andeutet.^{1) 2)}

343. Longitudinale und transversale Schwingungen.

Aus der Kreisform kann die Bahn eines Molecüls in die elliptische Gestalt übergehen, ja, sie reducirt sich sogar in vielen Fällen auf eine senkrechte Gerade, auf welcher sich das Molecül ebenso verschiebt, wie die Projection eines die Kreisperipherie durchlaufenden Punktes auf dem verticalen Durchmesser. Berg und Thal werden dann einander genau entgegengesetzt gleich, und das Profil der Welle besteht aus den beiden symmetrischen Bogen einer Sinuslinie. Wenn, wie in diesem Falle, die Schwingungsrichtung auf der Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrecht steht, so nennt man die Schwingung *transversal*; hierher gehören beispielsweise die Schwingungen einer Violinsaite. Die Fortpflanzung der transversalen Wellen lässt sich leicht an einer schwach gespannten elastischen Schnur von mehreren Metern Länge

¹⁾ Die Erscheinung ist in Wirklichkeit sehr complicirt. Boussinesq, Lord Rayleigh und Gouy haben interessante Untersuchungen über diesen Gegenstand veröffentlicht.

²⁾ Über die verwickelten Vorgänge bei den Wirbelbewegungen etc., welche auch in der Akustik eine wesentliche Rolle spielen, vgl. ferner die wissenschaftlichen Abhandlungen über Hydrodynamik von H. v. Helmholtz. — G.

beobachten (Kautschukschlauch¹⁾ oder Messingspirale), deren eines Ende man befestigt, während man das andere Ende mit der Hand festhält. Zuckt man nun mit der Hand rasch senkrecht zur Richtung der Schnur, so durchläuft die Erschütterung die ganze Schnur in Gestalt einer deutlich sichtbaren Welle; bringt man mit der Hand eine Reihe von rhythmischen Erschütterungen hervor, dann sieht man, wie eine entsprechende Reihe von Schwingungen ganz regelmässig bis zum anderen Ende der Schnur läuft. Hierbei ist es ganz klar, dass nur die Bewegung sich fortpflanzt, während jedes Molecül nur eine transversale Verschiebung erleidet.

Anstatt senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung kann die Verschiebung der schwingenden Molecüle auch in Richtung der Fortpflanzung selbst erfolgen. Dies ist der Fall bei bestimmten Tonschwingungen in festen Körpern, sowie bei allen denjenigen, die sich in Flüssigkeiten und Gasen fortpflanzen. Diese Thatsache charakterisirt schon zur Genüge die Wichtigkeit, welche die *longitudinalen Schwingungen* für die Akustik besitzen.

344. Fortpflanzung einer longitudinalen Erschütterung in einem elastischen Cylinder. — Der Mariotte'sche Versuch mit den sieben Elfenbeinkugeln (191) zeigt aufs deutlichste die

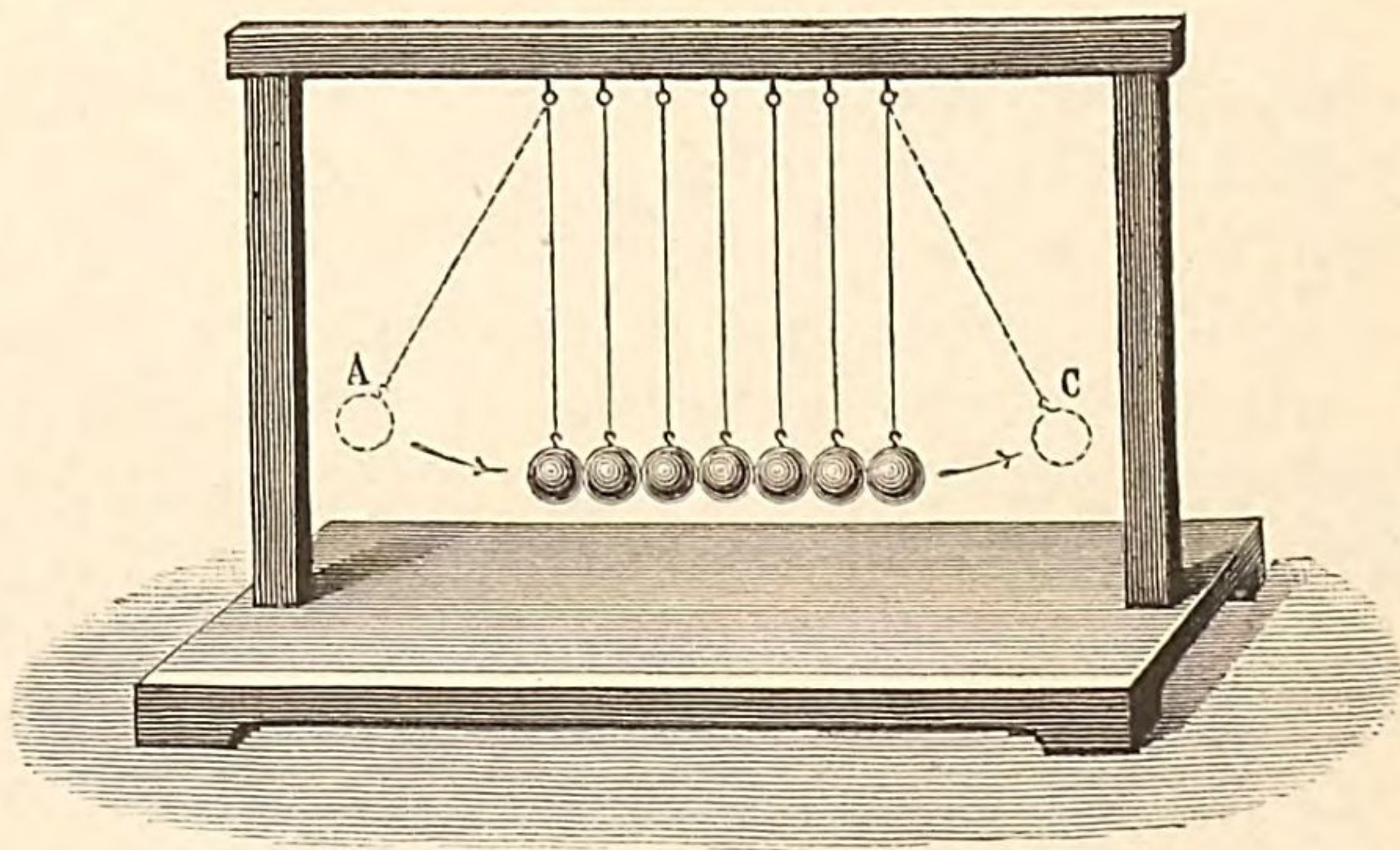


Fig. 29.

Art der Fortpflanzung einer longitudinalen Erschütterung in einem elastischen Medium, indem jede Kugel von der vorhergehenden die ganze Geschwindigkeit empfängt und diese auf die folgende überträgt, während die erste Kugel nunmehr in Ruhe verbleibt; die

¹⁾ Man kann den Kautschukschlauch auch unter der Einwirkung seines eigenen Gewichtes frei von der Decke herabhängen lassen, indem man ihn nöthigenfalls mit Sand füllt.

Bewegung schreitet auf diese Weise gleichförmig in einer Richtung vorwärts.

Wir fassen nun einen Cylinder aus irgend einem elastischen Medium ins Auge. In ihm möge an einer bestimmten Stelle dadurch eine Erschütterung hervorgebracht worden sein, dass alle in ein und demselben Querschnitte liegenden Molecüle gleiche Verschiebungen erfahren und gleiche Geschwindigkeiten parallel zur Cylinderachse erlangt haben; im Übrigen sollen sich sowohl Verschiebungen wie Geschwindigkeiten von einem Querschnitte zum anderen in der ganzen Ausdehnung der in Betracht kommenden Strecke nach irgend einem Gesetze verändern. Die elastischen Kräfte, welche bei der Verschiebung der direct erschütterten Molecüle ausgelöst werden, bestimmen die Verschiebung der benachbarten Molecüle; hierbei treten neue elastische Kräfte auf, welche eine Verschiebung der weiter entfernten Molecüle bewirken, und so breitet sich die Erschütterung in der Säule aus, indem gleichzeitig alle in ein und demselben Querschnitte gelegenen Molecüle dieselbe Bewegung parallel der Cylinderachse ausführen.

Eine in der Entfernung x vom Coordinatenanfangspunkt gelegene Ebene M sei zur Zeit t nach M' in eine Entfernung $x + u$

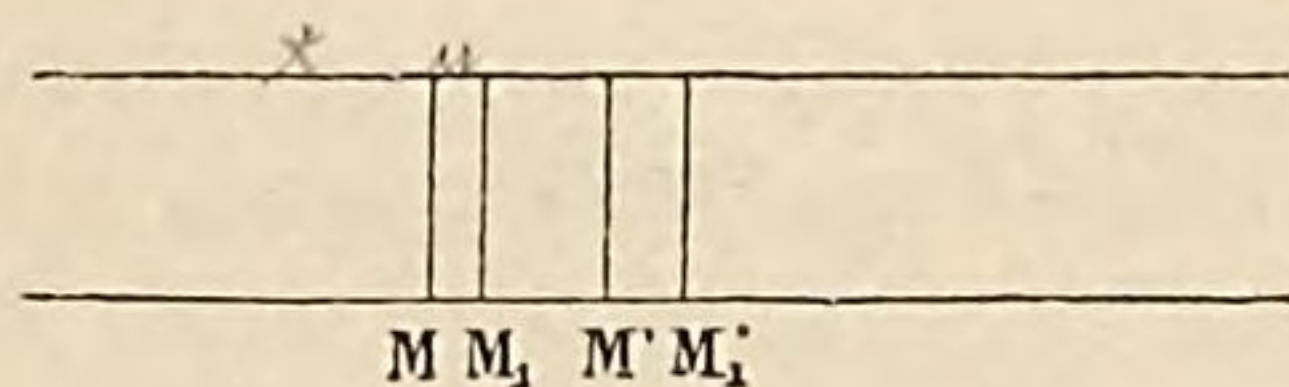


Fig. 30.

gekommen, während eine unendlich nahe, in dem Abstand $x + dx$ befindliche Ebene M_1 nach M_1' , also in die Entfernung $x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ gelangt sein möge. Die ursprüngliche Entfernung dx der beiden Ebenen ist also $dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ geworden; es repräsentirt demnach $\frac{\partial u}{\partial x}$ die Änderung der Längeneinheit in der Richtung der Cylinderachse; andererseits bezeichnet auch, wenn man die Volumenänderung ins Auge fasst, $-\frac{\partial u}{\partial x}$ die Änderung der Dichte γ , da der Querschnitt der gleiche geblieben ist.

Dadurch, dass sich die Entfernung der beiden Ebenen M' und M_1' geändert hat, tritt zwischen ihnen eine elastische Kraft auf, welche der Gestaltsänderung proportional ist (135) und demnach für die Oberflächeneinheit die Gröse $E \frac{\partial u}{\partial x}$ besitzt. Da diese elastische Kraft gleich derjenigen ist, welche die Gestaltsänderung hervorgebracht

hat, und nur das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, so ist die Grösse der deformirenden Kraft gleich $-E \frac{\partial u}{\partial x}$; hierbei bedeutet das negative Vorzeichen, dass die auf die Ebene M (Fig. 31) wirkende Kraft nach der linken Seite zu gerichtet ist. Auf eine in der Ent-

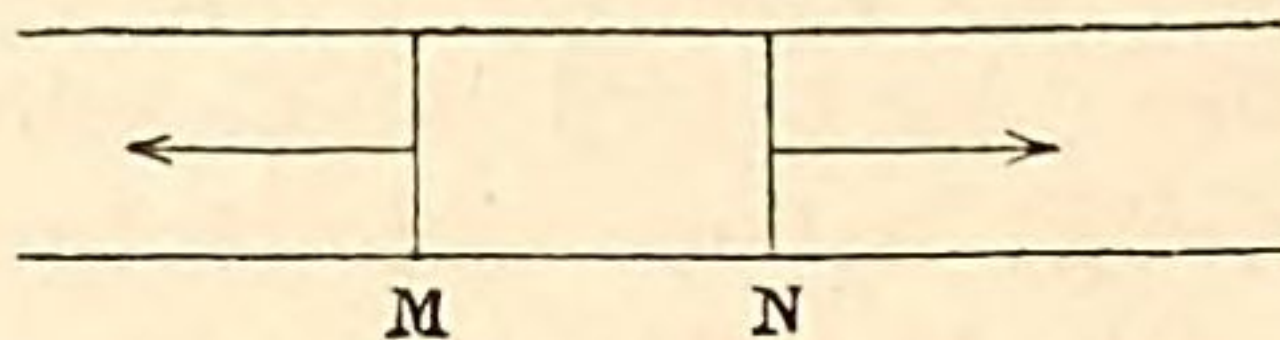


Fig. 31.

fernung $x + \delta x$ vom Koordinatenanfangspunkt liegende Ebene N wirkt ebenso eine äussere, nach der rechten Seite hin gerichtete Kraft von der Grösse $E \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x \right)$ (137). Die auf den Schnitt MN in der Richtung der positiven x wirkende Kraft ist also $E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta x$. Andererseits ist die wirkende Kraft gleich dem Product aus der Masse und der Beschleunigung, also gleich $\delta x D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, wenn man mit D die Dichte des Mediums bezeichnet.

Wir haben also

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

oder, wenn wir $\frac{E}{D} = a^2$ setzen,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Das von d'Alembert zuerst gegebene allgemeine Integral dieser Gleichung, auf die wir auch bei der Betrachtung der schwingenden Saite wieder geführt werden, ist

$$u = f(x + at) + F(x - at),$$

wobei f und F zwei willkürliche Functionen bedeuten.

Hieraus ergeben sich für die Geschwindigkeit v und die Dichteänderung γ in einem beliebigen Punkte x des Cylinders für eine beliebige Zeit t die Werthe

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = a f'(x + at) - a F'(x - at),$$

$$\gamma = -\frac{\partial u}{\partial x} = -f'(x + at) - F'(x - at).$$

Die Functionen f' und F' sind durch die Grenzbedingungen definirt. Kennt man die Geschwindigkeiten und Verdichtungen zur Zeit $t=0$ überall, wo eine Erschütterung stattfindet, so sind die Grössen

$$v_0 = af'(x) - aF'(x) = \varphi(x)$$

und

$$\gamma_0 = -f'(x) - F'(x) = -\psi(x)$$

bekannte Functionen von x ; wir erhalten also für f' und F' die Werthe:

$$f'(x) = \frac{\varphi(x) + a\psi(x)}{2a}$$

und

$$F'(x) = \frac{-\varphi(x) + a\psi(x)}{2a}.$$

Hieraus folgt

$$v = \frac{1}{2} \left[\varphi(x+at) + a\psi(x+at) + \varphi(x-at) - a\psi(x-at) \right],$$

$$\gamma = -\frac{1}{2a} \left[\varphi(x+at) + a\psi(x+at) - \varphi(x-at) + a\psi(x-at) \right].$$

Diese Gleichungen enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe.

Wir wollen annehmen, dass die anfängliche Erschütterung von den beiden Schnitten $x=0$ und $x=l$ begrenzt sei. Dann sind die Functionen φ und ψ für alle Werthe der Variabeln, welche kleiner als 0 und grösser als l sind, gleich Null.

Den Cylinder denken wir uns seiner Länge nach in drei Theile getheilt.

1. Zunächst betrachten wir einen Punkt, der auf der Seite der positiven x jenseits von l liegt. Für einen derartigen Punkt sind die Glieder $\varphi(x+at)$ und $\psi(x+at)$ immer Null; die allgemeinen Ausdrücke für die Geschwindigkeit und die Änderung der Dichte reduciren sich demnach auf:

$$v = \frac{1}{2} \left[\varphi(x-at) - a\psi(x-at) \right]$$

und

$$\gamma = \frac{1}{2a} \left[\varphi(x-at) - a\psi(x-at) \right].$$

Hieraus ergibt sich als wichtige Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Dichteänderung:

$$v = a\gamma.$$

Damit jedoch die Grössen v und γ nicht Null sind, müssen die Bedingungen

$$l > x - at > 0$$

oder

$$\frac{x - l}{a} < t < \frac{x}{a}$$

erfüllt sein.

Es bleibt also der Punkt x bis zum Augenblicke $t = \frac{x - l}{a}$ in Ruhe, geräth sodann in Bewegung, um zur Zeit $\frac{x}{a}$ wieder zur Ruhe zu gelangen, während die Erschütterung sich über diesen Punkt hinaus fortpflanzt und sich selbst ähnlich bleibt, denn die Variable $x - at$ nimmt in jedem Punkte dieselbe Reihe von Werthen wie zwischen l und 0 an. Zu einer bestimmten Zeit t befinden sich nur die Punkte zwischen denjenigen Querschnitten in Bewegung, für welche die Gleichungen $x - at = l$ und $x - at = 0$ erfüllt sind. Aus diesen Bedingungen folgt, dass sich eine Welle von der Länge l in der Richtung der positiven x mit der constanten Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}}$$

fortpflanzt. Hierbei ist zu bemerken, dass diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Form der Welle, d. h. von der Art der ursprünglichen Erschütterung unabhängig ist.

2. Auf der Seite der negativen x , zwischen 0 und $-\infty$, sind die Glieder $\varphi(x - at)$ und $\psi(x - at)$ immer Null, demnach erhalten wir für die Geschwindigkeit und die Dichteänderung folgende Ausdrücke

$$v = \frac{1}{2} \left[\varphi(x + at) + a\psi(x + at) \right]$$

und

$$\gamma = -\frac{1}{2a} \left[\varphi(x + at) + a\psi(x + at) \right];$$

demnach ist

$$v = -a\gamma.$$

Es findet also, bis auf das Vorzeichen, zwischen Geschwindigkeit v und Dichteänderung γ dieselbe constante Beziehung statt, und es ist leicht ersichtlich, dass sich die Bewegung auf der Seite der negativen x mit derselben Geschwindigkeit a in Form einer

Welle von der Länge l fortpflanzt, dass aber die Geschwindigkeit der Verschiebungen v und die Dichteänderungen γ von denjenigen bei der ersten Welle abweichen.

3. In dem Theile zwischen den Ebenen $x=0$ und $x=l$, in welchem die Erschütterung ursprünglich stattfand, ist der Bewegungszustand eines Punktes in jedem Augenblicke durch das Zusammenwirken der Geschwindigkeiten und der Verdichtungen bestimmt, welche die beiden Wellenzüge einzeln genommen in diesem Augenblicke an dem betreffenden Punkte aufweisen würden.¹⁾

Betrachtet man anstatt einer einzelnen Erschütterung eine periodische Schwingungsbewegung, die durch irgend welche Ursache in einem bestimmten Theile des Cylinders unterhalten wird, und setzt an Stelle dieser continuirlichen Bewegung eine Reihe von Elementarerschütterungen, so sieht man sofort, dass die ursprüngliche Schwingungsbewegung zwei andere Schwingungsbewegungen von derselben Periode hervorruft, die sich nach entgegengesetzter Richtung mit derselben Geschwindigkeit a fortpflanzen.

Wir wollen eine dieser Bewegungen verfolgen, und zur Fixirung der Vorstellung annehmen, die anfängliche Erschütterung rühre von der einen Zinke einer Stimmgabel her; dieselbe möge vor der Öffnung O einer langen cylindrischen Röhre angebracht sein, deren Achse wir OX nennen. Setzen wir ferner voraus, dass sich diese Zinke beim Beginne der Bewegung in ihrer grössten Entfernung von der Öffnung der Röhre befinde, dann wird sie sich von da ab der Öffnung nähern, die ihr zunächst liegende Luftschicht vor sich her treiben und derselben nach und nach die ganze Reihe von Geschwindigkeiten mittheilen, welche sie selbst besitzt. Diese erste, verschobene und verdichtete Luftschicht wird auf eine zweite Schicht einwirken, diese auf eine dritte und so fort, wobei die Stösse sich gleichförmig von einer Schicht auf die nächstfolgende übertragen.

Um den Zustand der Luft in jeder Schicht zu veranschau-

¹⁾ Bewegen sich zwei Wellen von derselben Länge, deren Bewegungszustände aber sonst verschieden sind, mit gleicher Geschwindigkeit a in entgegengesetzter Richtung fort, so kann es vorkommen, dass eine Welle verschwindet. Hierzu genügt es, dass zwischen den anfänglichen Geschwindigkeiten und den anfänglichen Verdichtungen das Verhältniss $\pm a$ besteht. In der That hat beispielsweise die Bedingung $v = a\gamma$ zur Folge, dass $f' = 0$ wird; demnach ist $\varphi(x) = -a\psi(x)$. Der Ausdruck für die Geschwindigkeit reducirt sich auf $v = -a\psi(x - at)$, und da die Function ψ für alle negativen Werthe des Arguments Null ist, so werden in Folge dessen die Geschwindigkeiten immer Null. Die erste Welle wird also allein zu Stande kommen.

lichen, tragen wir die Entfernung dieser Schichten vom Anfangspunkt als Abscissen auf, und als Ordinaten ihre Geschwindigkeiten, die wir in der Fortpflanzungsrichtung der Bewegung positiv und in entgegengesetzter Richtung negativ zählen wollen. Wir erhalten dann nach $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1 Periode die in der Fig. 32 wiedergegebenen Curven; dieselben zeigen, wie die Geschwindigkeiten

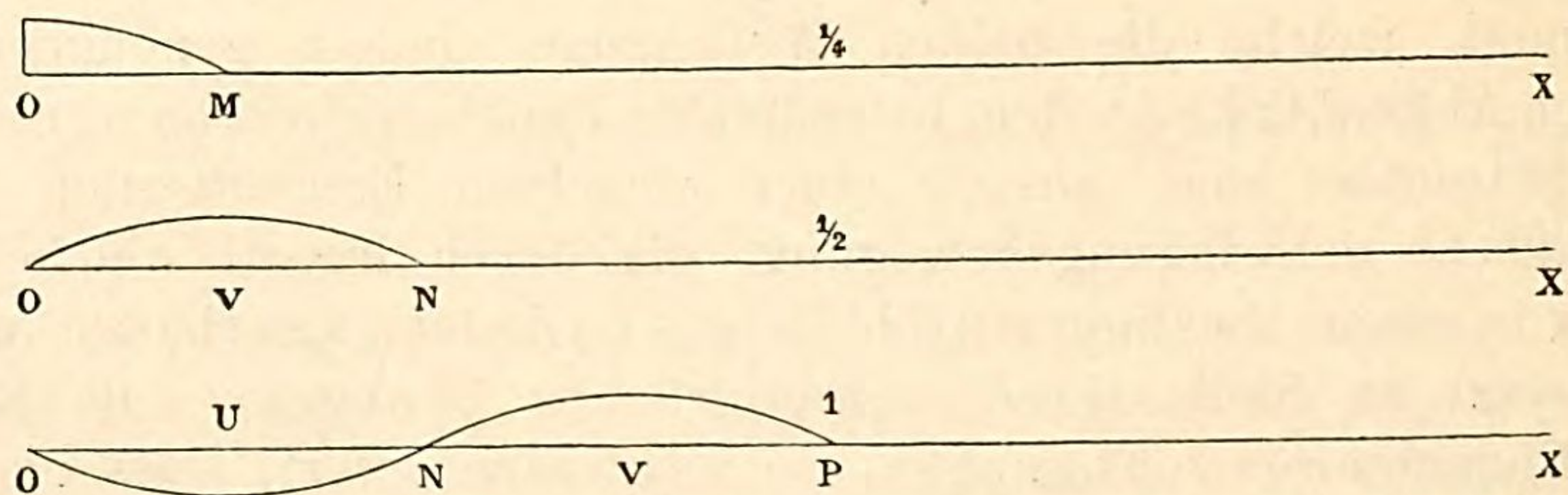


Fig. 32.

über die ganze Länge der schwingenden Luftsäule vertheilt sind; es sind dies dieselben Geschwindigkeiten, welche nach und nach während der Dauer von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ und 1 Periode die ursprüngliche Schicht angenommen hatte. Als *Wellenlänge* bezeichnet man die Entfernung OP , welche von der Bewegung während der Dauer einer Schwingung durchsetzt wird.

Dieselben Curven geben auch direct ein Bild von den Verdichtungen, die den Geschwindigkeiten proportional sind. Gehen wir beispielsweise bei der letzten Curve, welche eine ganze Welle darstellt, vom Anfange P der Welle aus, so wächst die Verdichtung gleichzeitig mit der Geschwindigkeit bis zur Entfernung PV , die einer viertel Wellenlänge entspricht. Geschwindigkeit und Verdichtung nehmen sodann ab und werden in der Mitte der Welle N gleichzeitig Null. Die hierauf folgenden Geschwindigkeiten sind denjenigen in der ersten Hälfte der Welle numerisch gleich, aber entgegengesetzt gerichtet, während an Stelle der früheren Verdichtungen nunmehr Verdünnungen in entsprechender Reihenfolge treten.

Wenn die Schwingungsbewegung am Anfange des Rohres unterhalten wird, während diese erste Welle sich mit gleichförmiger



Fig. 33.

Geschwindigkeit fortpflanzt, so folgen ihr neue Wellen mit der gleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit a , und in einem gegebenen Momente

wird der Zustand der Luft in der Röhre durch eine Reihe gleicher, abwechselnd positiver und negativer Bogen darzustellen sein, während die Ordinate am Anfange den jeweiligen Zustand derjenigen Schicht darstellt, welche direct durch die Stimmgabel in Bewegung gesetzt wird.

345. Geschwindigkeit des Schalles in der Luft. —
Geschwindigkeit in einer Röhre. — Die Formel

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}} \quad ^1)$$

hat allgemeine Gültigkeit.

Wir wollen dieselbe zunächst zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erschütterung in einer cylindrischen Röhre benutzen, die mit Luft oder irgend einem anderen Gase gefüllt sein möge, das von seinem Verflüssigungspunkte genügend weit entfernt ist. Die Verdichtung γ wird dabei immer als sehr klein vorausgesetzt werden können; nimmt man dann weiter an, dass sich auf die Druckänderungen bei den auf einander folgenden Verdichtungen und Verdünnungen das Mariotte'sche Gesetz

$$pv = \text{Const.}$$

anwenden lässt, so erhält man für eine der Verdichtung γ entsprechende Zunahme des Druckes

$$dp = - \frac{p dv}{v} = p \gamma.$$

Nun ist aber

$$E = \frac{dp}{\gamma},$$

demnach wird:

$$a = \sqrt{\frac{p}{D}}. \quad (\text{Newton'sche Formel.})$$

In dieser Formel bedeuten p und D den Druck und die

¹⁾ E bezeichnet das Verhältniss der Druckzunahme dp zur entsprechenden Verdichtung γ . Dann gilt auch, da $D\gamma$ den Zuwachs dD der Dichte bedeutet

$$a = \sqrt{\frac{dp}{dD}}.$$

Dichte der Gassäule, ausgedrückt in mechanischen Einheiten. Es ist also

$$p = g m h$$

und

$$D = \delta \frac{h}{H} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t};$$

hierin bezeichnet

- g die Beschleunigung durch die Schwere (in Berlin = 981,2),
- h die Barometerhöhe in Centimetern,
- H die normale Barometerhöhe = 76 cm,
- m die Dichte (Masse in der Volumeneinheit) des Quecksilbers,
- δ die Dichte des Gases bei 0^0 unter einem Drucke von 76 cm,
- α den Ausdehnungscoefficient des Gases,
- t die Temperatur.

In Folge dessen wird

$$a = \sqrt{g H \frac{m}{\delta} (1 + \alpha t)},$$

ein Werth, der von h unabhängig ist.

Führen wir die Rechnung für Luft durch, und berücksichtigen, dass $\frac{m}{\delta} = \frac{13,596}{0,001293}$ ist, so finden wir

$$a = 280 \sqrt{1 + \alpha t} \text{ m.}$$

Dieser Werth ist um $\frac{1}{6}$ kleiner als derjenige, den wir aus dem Versuche erhalten.

Die Ursache dieser Abweichung wurde erst im Jahre 1816 von Laplace entdeckt. Er machte darauf aufmerksam, dass sich wegen der schlechten Wärmeleitungsfähigkeit der Gase und der bedeutenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles die Wärme, welche in Folge der Verdichtung in einer Luftschicht entwickelt wird, nicht augenblicklich in der gesamten Masse verbreiten kann; man darf also hier das Mariotte'sche Gesetz nicht anwenden, da dies eine constante Temperatur voraussetzt. Bleibt dagegen die Wärme in der Schicht, wo sie entstand, vollständig localisirt, so muss man die Poisson'sche Formel

$$p v^{\frac{c}{\gamma}} = \text{Const.}$$

benutzen. Hierbei bedeutet $\frac{C}{c}$ das Verhältniss zwischen den specifischen Wärmen des Gases bei constantem Druck und bei constantem Volumen.

Wir erhalten hieraus

$$dp = - \frac{C}{c} \frac{p dv}{v}$$

und somit

$$a = \sqrt{\frac{pC}{Dc}}. \quad (\text{Formel von Laplace.})$$

Die Newton'sche Zahl muss also mit $\sqrt{\frac{C}{c}}$ multiplicirt werden, d. h. für Luft etwa mit $\sqrt{1,41} = 1,1874$, wodurch die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment wieder hergestellt wird ($280 \cdot 1,1874 = 332,4$).

Trotz dieser Übereinstimmung kann man sich fragen, ob die Annahme von Laplace wirklich richtig ist. Verschwindet nicht doch ein Theil der hervorgebrachten Wärme durch Leitung oder durch Strahlung¹⁾ und ist in Folge dessen die thatsächliche Geschwindigkeit in der Luft nicht geringer als diese theoretisch ermittelte Geschwindigkeit? Stokes²⁾ hat nachgewiesen, dass die Annahmen von Newton und von Laplace die einzigen sind, bei welchen eine Ausdehnung auf eine Compression folgt, ohne dass dabei Arbeit geleistet wird. Abgesehen von diesen beiden in gewisser Beziehung extremen Fällen kann der vollständige Kreisprocess einer Ausdehnung und Verdichtung nur unter Aufwendung einer gewissen Menge von Energie durchlaufen werden; der Schall müsste alsdann in so kurzer Zeit verschwinden, wie es in der Natur thatsächlich niemals vorkommt. Die beiden oben genannten Annahmen sind demnach die einzigen möglichen.

Übrigens giebt sowohl die Laplace'sche wie die Newton'sche Formel für die Schallgeschwindigkeit eine constante Zahl, welche weder von der Tonhöhe noch vom Barometerstande abhängt.

Es ist dabei jedoch noch zu bemerken, dass nach Regnault alle diese Berechnungen nur für sehr kleine Erschütterungen

¹⁾ In einem gegebenen Medium wird allein die Geschwindigkeit der Aufeinanderfolge von Verdichtung und Verdünnung maassgebend sein. Bleibt diese Geschwindigkeit unterhalb einer gewissen Grenze, so wird die Temperatur Zeit haben, sich auszugleichen; es ist dann die Newton'sche Annahme richtig; folgen sich aber die Verdichtungen und Verdünnungen sehr rasch, so wird die Wärme auf den Ort beschränkt bleiben, wo sie entsteht; in diesem Falle muss die Laplace'sche Formel gelten. Es kommt also darauf an, ob die Geschwindigkeit der Schall-schwingungen ausreicht, um in der Luft diese vollständige Localisirung hervorzubringen (vgl. Lord Rayleigh, *Theory of sound* 2, 23; 1878).

²⁾ Stokes, *Phil. mag.* (4), 1, 305; 1851.

richtig sind. Wenn die Änderung des Volumens und des Druckes nicht mehr als Differentiale angesehen werden dürfen, dann muss die Druckänderung $(p' - p)$, welche einer Volumenänderung $v' - v$ entspricht, nach der Formel

$$p' - p = p \frac{v^{\frac{c}{c}} - v'^{\frac{c}{c}}}{v'^{\frac{c}{c}}}$$

berechnet werden; setzt man darin $v' = v(1 - \gamma)$, so folgt:

$$\begin{aligned} p' - p &= p \left[(1 - \gamma)^{-\frac{c}{c}} - 1 \right] \\ &= p \left[\frac{C}{c} \gamma + \frac{\frac{C}{c} \left(\frac{C}{c} + 1 \right)}{1 \cdot 2} \gamma^2 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$E = p \frac{C}{c} + p \frac{\frac{C}{c} \left(\frac{C}{c} + 1 \right)}{1 \cdot 2} \gamma + \dots$$

Die Elasticität des Gases ist also nicht constant, wie wir bisher angenommen hatten, sondern sie wächst mit γ , und dasselbe gilt demnach auch für die Schallgeschwindigkeit. Letztere ist grösser für bedeutende Intensitäten, und nur für unendlich kleine Erschütterungen ist sie constant und hat den Werth

$$a = \sqrt{\frac{p}{D} \frac{C}{c}}.$$

Fortpflanzungsgeschwindigkeit in freier Luft. — Alle soeben angestellten Überlegungen lassen sich direct auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in freier Luft übertragen, mit dem

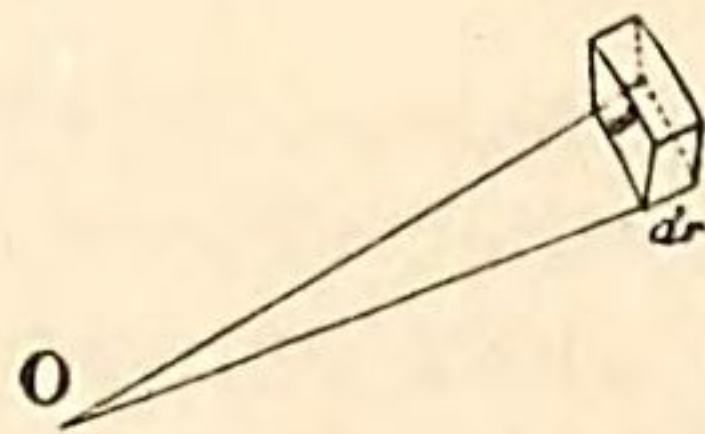


Fig. 34.

einzigsten Unterschiede, dass die Stärke des Tones mit der Entfernung abnimmt, während in einer cylindrischen Röhre, deren Wände keine Wirkung auf die Gasmasse ausübte, sondern nur zu ihrer Begrenzung diente, die Erschütterung sich ohne Störung

fortpflanzen und die Stärke des Tones in Folge dessen in beliebiger Entfernung constant bleiben würde.¹⁾

Wir nehmen an, in einem unendlich ausgedehnten isotropen Medium werde innerhalb einer kleinen Kugel vom Radius ε eine Erschütterung erregt, die sich nach allen Richtungen weiter fortpflanzt. Fassen wir nun einen Theil einer Kugelschicht ins Auge, die in der Entfernung r vom Erschütterungscentrum liegen und die Dicke δr besitzen möge, dann sind die Werthe für den Druck, welchen die beiden Grundflächen ω und ω' dieser Schicht erleiden, gegeben durch

$$-\omega E \frac{\partial u}{\partial r} \quad \text{und} \quad \omega' E \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \delta r \right),$$

und die wirksame Kraft hat die Grösse

$$F = \omega' E \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \delta r \right) - \omega E \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(r + \delta r)^2}{r^2},$$

also

$$\omega' = \omega \left(1 + 2 \frac{\delta r}{r} \right).$$

Andererseits ist

$$F = \omega \delta r D \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

demnach erhalten wir die Beziehung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r} \left(2 \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right).$$

Setzt man $\frac{u}{r} = v$, so folgt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

¹⁾ In der That ist die Abnahme der Tonstärke in den cylindrischen Röhren nur gering; man verwendet deshalb allgemein Sprachrohre, um die Stimme auf weitere Entfernungen zu übertragen.

Diese Gleichung stimmt mit der früher gefundenen vollständig überein; wir erhalten demnach als Lösung:

$$v = f(x + at) + F(x - at)$$

und somit

$$u = \frac{1}{r} \left[f(x + at) + F(x - at) \right].$$

Der Schall pflanzt sich also nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit a fort, wie in einem unendlich langen Cylinder, während längs eines gegebenen Radius die Geschwindigkeit eines jeden Molecüls umgekehrt proportional der Entfernung vom Mittelpunkte ist. In Folge dessen ist die lebendige Kraft der Bewegung in einem bestimmten Punkte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung dieses Punktes vom Erschütterungscentrum, und da diese lebendige Kraft das Maass für die Stärke des Schalles liefert, so folgt daraus, dass auch die letztere in einem unendlich ausgedehntem Medium dem Quadrate der Entfernung vom Erschütterungscentrum umgekehrt proportional ist.

Diese Beziehung lässt sich geometrisch leicht veranschaulichen: da nämlich die gleiche Quantität von Energie sich auf Kugel-

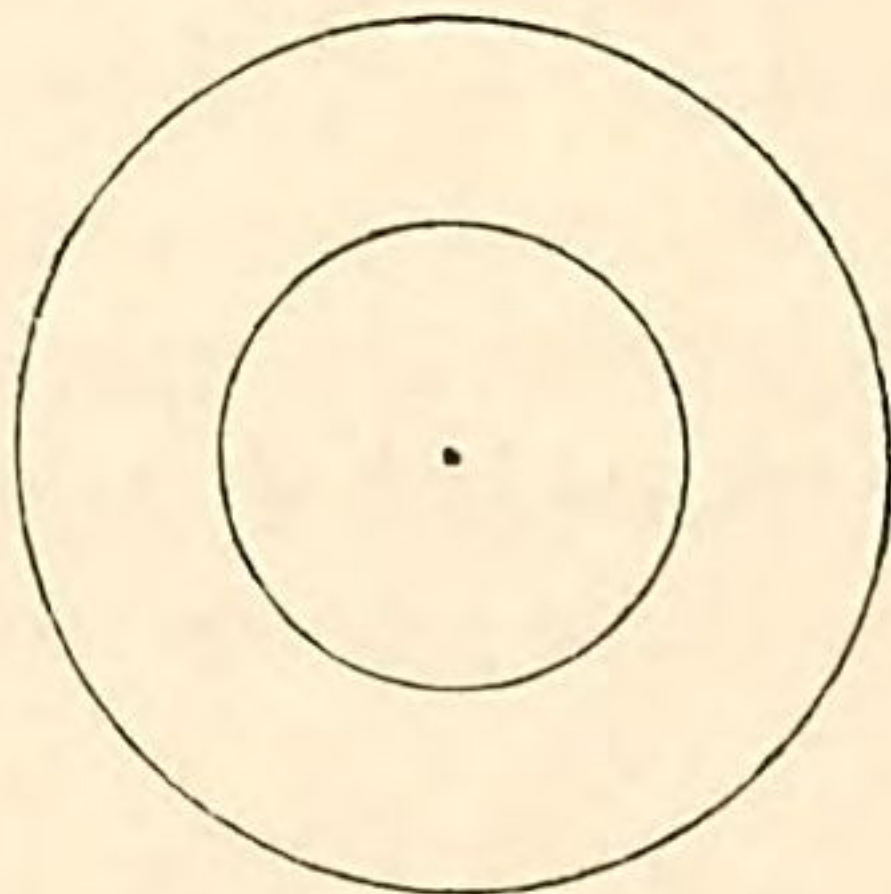


Fig. 35.

oberflächen vertheilen wird, deren Grösse mit dem Quadrate ihrer Radien wächst, so muss der Antheil, der bei jeder dieser Oberflächen auf ein gleich grosses Flächenstück entfällt, dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte umgekehrt proportional sein.

346. Experimentelle Bestimmungen. — *Die ersten Messungen.* — Schon die Alten hatten bemerkt, dass sich der Schall in der Luft verhältnissmässig langsam fortpflanzt.¹⁾ Die ersten

¹⁾

Cædere si quem
Ancipiti videas ferro procul arboris auctum,
Ante fit ut cernas ictum quam plaga per auris
Det sonitum; sic fulgorem quoque cernimus ante
Quam tonitrum accipimus

(Lucretius, De rerum natura 5, I.)

numerischen Bestimmungen verdanken wir dem Pater Mersenne;¹⁾ obgleich dieser die Bedingungen des Problems ganz genau aufstellte, führte er doch selbst nur angenäherte Messungen aus; nach der Zeit, welche zwischen der Wahrnehmung von Blitz und Knall einer in der Ferne abgefeuerten Waffe lag, schätzte er die Schallgeschwindigkeit in der Luft auf 1380 Fuss (448 m) in der Secunde. Etwas später (1656) erhielten die Physiker Borelli und Viviani²⁾ in Florenz nach derselben Methode durch sorgfältige Beobachtungen die genauere Zahl von 1077 Fuss (350 m).

Nachdem Newton die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles angegeben hatte, folgten die experimentellen Bestimmungen ungemein rasch auf einander; es fand:

Boyle ³⁾		1126'	(366 m)
Cassini, Huyghens, Picard, Römer ⁴⁾		1097'	(356 m)
Flamstead und Halley ⁵⁾		1071'	(348 m)
Derham ⁶⁾		1071'	(348 m)

Vielleicht mit Ausnahme der Messungen von Derham, der den Einfluss des Windes auf die Schallgeschwindigkeit entdeckte, brachten diese und andere Bestimmungen, welche unerwähnt bleiben können, die Frage ihrer Lösung nicht näher, da man sich noch nicht klar darüber war, worin eigentlich die Schwierigkeiten der Messung bestanden.

*Untersuchungen der Pariser Akademiker.*⁷⁾ — Im Jahre 1738 ernannte die Académie des Sciences zu Paris eine aus Cassini de Thury, Lacaille und Maraldi bestehende Commission, welche die Schallgeschwindigkeit bestimmen sollte. Als Stationen wählte

¹⁾ Mersenne, loc. cit., De arte ballistica, prop. 39. Man schreibt die erste Bestimmung der Schallgeschwindigkeit gewöhnlich Gassendi zu, der nach Muschenbrœk (Introductio ad philosophiam naturalem 2, 920, § 2237; Lugd. Batav, 1762) für diese Geschwindigkeit 1473 Fuss (478 m) gefunden haben soll. Aber in seinem nachgelassenen Werke (Gassendi opera omnia 1, Physicæ sectio 1, lib. 6, cap. 10: De sono. Lugduni, Anisson et Devenet; 1658) giebt Gassendi nach der Erklärung, dass sich die Erschütterung im Raum mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt, wie der Schall einer Kanone oder Muskete, einfach die von Mersenne gefundene Zahl wieder.

²⁾ Borelli und Viviani, in den Saggi di sperienze fatte nell' Accademia del Cimento, Cap. 11.

³⁾ Boyle, nach Poggendorff, Geschichte der Physik.

⁴⁾ Cassini, Picard, Roemer, Regiae scientiarum academiae historia, lib. 2, sect. 3, cap. 2; 1677.

⁵⁾ Flamstead und Halley, Phil. Trans.; 1708 und 1709.

⁶⁾ Derham, Phil. Trans.; 1708.

⁷⁾ Cassini de Thury, Mémoires de l'Académie des sciences; 1738.

man die Höhe des Montmartre, die Sternwarte von Paris, die Mühle von Fontenay-aux-Roses, das Schloss Lay, den Thurm von Montlhéry und bisweilen den Kirchthurm von Dammartin. Acht- und zwölfpfündige Kanonen wurden abwechselnd alle halben Stunden auf den Höhen von Montmartre und Montlhéry gelöst. Die auf den verschiedenen Stationen aufgestellten Beobachter notirten die Zeit, welche zwischen der Wahrnehmung von Blitz und Knall verstrich; denn das Licht pflanzt sich ja mit solcher Geschwindigkeit fort, dass man in der That ohne merklichen Fehler annehmen darf, der Schall habe diese Zeit gebraucht, um die betreffende Entfernung zurückzulegen.

Es mögen hier die Einzelheiten einer Messungsreihe vom 14. März 1738 Platz finden. Der Wind war sehr schwach; seine Richtung stand etwa senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung des Schalles.

„Der um 9 Uhr 30 Minuten vom Montmartre abgefeuerte erste Schuss wurde auf der Sternwarte nach 16 Sec., in Lay nach 36 Sec. und in Montlhéry nach 1 Min. 25 Sec. gehört, der zweite Schuss auf der Sternwarte nach 16,5 Sec., in Lay nach 36 Sec.; in Montlhéry verhinderte die grosse Volksmenge, die sich angesammelt hatte, eine genaue Beobachtung. Der um 10 Uhr zu Montlhéry gelöste Schuss wurde in Lay nach 48 Sec. und auf der Sternwarte nach 1 Min. 7,5 Sec. gehört; auf dem Montmartre war der Knall nicht vernehmbar, eben so wenig derjenige des zweiten Schusses, der in Lay nach 48 Sec. und auf der Sternwarte nach knapp 1 Min. 8 Sec. vernommen wurde. Aus diesen Beobachtungen folgt, dass der Schall von Montlhéry bis nach Lay 48 Sec. brauchte, von Lay bis zur Sternwarte 20 Sec., von der Sternwarte bis zum Montmartre 16,5 Sec. Da nun diese vier Punkte nahezu in einer geraden Linie liegen, so muss die Summe der Zeiten, 1 Min. 24,5 Sec., gleich der Zeit sein, während welcher der Schall direct von Montmartre nach Montlhéry gelangte, und das ist in der That der Fall, denn die letztere betrug 1 Min. 25 Sec. Diese Beobachtungsreihe ist deshalb noch besonders bemerkenswerth, weil man in dieser Nacht in Paris die Kanone vom Montlhéry hörte und umgekehrt. Wenn also irgend welche Ursachen die Fortpflanzung des Schalles in der einen Richtung hätten beschleunigen können, so würden sie dieselbe in der entgegengesetzten Richtung verzögert haben, so dass das Mittel aus beiden Beobachtungen wieder den genauen Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergeben muss.“

Auf Grund einer genügenden Anzahl von derartigen Beobachtungen ergab sich, dass die Schallgeschwindigkeit constant

ist, und bei 6^0 in der Secunde 173 Toisen oder 337 Meter beträgt; hieraus würde für die Geschwindigkeit bei 0^0 folgen:¹⁾

$$a_0 = 332 \text{ m.}$$

Diese Untersuchungen fanden einen ungeheuren Anklang. Überall machte man sich ans Werk:²⁾ Lacaille und Cassini in Aigues-Mortes, La Condamine zu Quito und zu Cayenne, Bianconi zu Bologna, Kaestner, später Müller in Göttingen, Espinosa und Bauza in Santiago, Benzenberg in Düsseldorf, Goldingham in Madras, sie alle führten neue Messungen aus.

Bianconi wies den Einfluss der Temperatur auf die Schallgeschwindigkeit nach; dieselbe Thatsache geht aus den Messungen von La Condamine hervor, und Benzenberg zeigte durch einwurfsfreie Versuche, die er eigens zu diesem Zwecke anstellte, dass die Geschwindigkeit mit der Temperatur wächst, ganz wie die Theorie es verlangt.³⁾ Aber alle diese Versuche liessen den Widerspruch zwischen der thatsächlichen Geschwindigkeit und dem Werthe, der sich theoretisch aus der Newton'schen Formel ergibt, nur um so greller hervortreten.

*Die Versuche des Bureau des Longitudes.*⁴⁾ — Als Laplace den wahren Grund für diesen Widerspruch gefunden und einen Werth berechnet hatte, der mit dem beobachteten übereinstimmte, beantragte er beim Bureau des Longitudes die Wiederaufnahme der Messungen mit vollkommeneren Mitteln und unter Berücksichtigung der Temperaturverhältnisse der Atmosphäre, auf welche bei den Versuchen des Jahres 1738 zu wenig Gewicht gelegt worden war. In Folge dessen wurde eine Commission eingesetzt, die aus Arago, Bouvard, Mathieu und Prony bestand und der sich noch Gay-Lussac und Humboldt anschlossen. Die angewandte Methode war wieder dieselbe, wie früher: die Schüsse wurden auf den Stationen abwechselnd gelöst und beobachtet, und zwar alle 5 Minuten; ausserdem ersetzte man die unvollkommenen Uhren der ersten Beobachter durch ausgezeichnete Breguet'sche Chronometer. Als Stationen wählte man Villejuif und Montlhéry, da man es vorzog, die bewegte Atmosphäre von Paris zu meiden, wenn auch die Entfernung dadurch etwas verringert wurde. Auf jeder Station befand sich ein von Artilleristen bedienter Sechspfünder.

¹⁾ Vgl. Le Roux, Ann. de chim. et de phys. (4), **12**, 345; 1867.

²⁾ Über alle diese Arbeiten vgl. Bravais et Martins, Ann. de chim. et de phys. (3), **12**, 5; 1845 und Le Roux, loc. cit.

³⁾ Für die Luft beträgt der Zuwachs der Geschwindigkeit ungefähr 0,60 m pro Grad.

⁴⁾ Arago, Connaissance des temps pour 1825, oder Oeuvres complètes, édition Barral **11**, 1; Paris, Gide 1859.

Die Versuche, die am 21. Juni 1822 begannen, fanden während der ruhigsten Nachtstunden statt. Während nun alle Kanonenschläge von Montlhéry in Villejuif vollkommen deutlich gehört wurden, war dies umgekehrt nur sehr unvollkommen der Fall; nur 7 verschiedene Schüsse waren dort deutlich vernehmbar. Durch Verbindung dieser letzteren mit den entsprechenden in Villejuif gehörten, erhält man folgende Tabelle:

Ladung		Montlhéry	Villejuif
10 Uhr 25 Min.	1 k		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 55,0} \\ \text{Mathieu . . 54,8} \\ \text{Prony . . . 54,7} \end{array} \right\} 54,8 \text{ Sec.}$
10 „ 30 „	1 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard} \\ \text{Gay-Lussac} \\ \text{Humboldt} \end{array} \right\} . . . 54,5 \text{ Sec.}$	
10 „ 35 „	1,5 „		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 55,0} \\ \text{Mathieu . . 55,2} \\ \text{Prony . . . 54,8} \end{array} \right\} 55,0 \text{ „}$
10 „ 40 „	1,5 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard . . 55,0} \\ \text{Gay-Lussac 55,0} \\ \text{Humboldt . 54,9} \end{array} \right\} 54,9 \text{ „}$	
10 „ 55 „	1,5 „		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 54,9} \\ \text{Mathieu . . 55,0} \\ \text{Prony . . . 54,6} \end{array} \right\} 54,8 \text{ „}$
11 „ — „	1,5 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard . . 54,9} \\ \text{Gay-Lussac 54,9} \\ \text{Humboldt . 53,9} \end{array} \right\} 53,9 \text{ „}$	
11 „ 05 „	1 „		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 54,6} \\ \text{Mathieu . . 55,0} \\ \text{Prony . . . 54,6} \end{array} \right\} 54,7 \text{ „}$
11 „ 10 „	1 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard . . 54,7} \\ \text{Gay-Lussac 54,5} \\ \text{Humboldt . 54,5} \end{array} \right\} 54,6 \text{ „}$	
11 „ 15 „	1,5 „		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 55,0} \\ \text{Mathieu . . 55,0} \\ \text{Prony . . . 54,6} \end{array} \right\} 54,9 \text{ „}$
11 „ 20 „	1,5 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard} \\ \text{Gay-Lussac} \\ \text{Humboldt} \end{array} \right\} . . . 54,3 \text{ „}$	
11 „ 25 „	1 „		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 54,8} \\ \text{Mathieu . . 54,9} \\ \text{Prony . . . 54,6} \end{array} \right\} 54,8 \text{ „}$
11 „ 30 „	1 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard} \\ \text{Gay-Lussac} \\ \text{Humboldt} \end{array} \right\} . . . 54,5 \text{ „}$	
11 „ 35 „	1,5 „		$\left\{ \begin{array}{l} \text{Arago . . . 54,8} \\ \text{Mathieu . . 54,9} \\ \text{Prony . . . 54,9} \end{array} \right\} 54,8 \text{ „}$
11 „ 40 „	1,5 „	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bouvard . . 54,5} \\ \text{Gay-Lussac 54,5} \\ \text{Humboldt . 54,1} \end{array} \right\} 54,3 \text{ „}$	
Mittel: 54,4 Sec.			Mittel: 54,8 Sec.

Dividirt man die Entfernung 18612,52 m durch das Mittel aus den beiden obigen Zahlen, 54,6, so findet man für die Schallgeschwindigkeit bei der Temperatur $15,9^{\circ}$ den Werth 340,9 m. Bei 0° wäre also nach diesen Versuchen die Schallgeschwindigkeit ziemlich genau

$$a_0 = 331 \text{ m.}$$

*Versuche von Moll und van Beck.*¹⁾ — Im folgenden Jahre wiederholten Moll und van Beck diese Versuche in der Utrechter Haide zwischen den beiden Hügeln Zevenboompjes (sieben Bäume) und Kooljesberg, die 17 669,3 m von einander entfernt waren. Auf jeder Station hielt ein Officier die angezündete Lunte über dem Zündloche der Kanone, ein anderer fasste den Arm des ersteren und beobachtete dabei das Chronometer. Kam der Zeiger auf die verabredete Secunde, so drückte er den Arm mit der Lunte nieder, und die Kanone entlud sich. Auf der anderen Station drückte ein mit einem Chronometer versehener Beobachter in dem Augenblicke, wo er das Aufblitzen der Kanone bemerkte, auf eine Feder und setzte dadurch den Zeiger in Bewegung; in dem Augenblicke, wo er den Schall hörte, zog er den Finger zurück, so dass der Zeiger wieder still stand. Um den störenden Einfluss des Windes zu eliminiren, wurden die Schüsse auf beiden Stationen möglichst gleichzeitig gelöst, der Zeitunterschied überstieg nicht 1 bis 2 Secunden. Nach mehreren vergeblichen Versuchen, bei denen das Geschütz der einen Station auf der anderen Station nicht vernommen werden konnte, erhielt man am Abend des 27. Juni 1823 22 Schüsse von beiden Seiten, am Abend des 28. Juni sogar 40. Hier möge als Beispiel eine Zusammenstellung der Zeitintervalle Platz finden, welche an dem letzteren Abend zwischen Blitz und Knall beobachtet wurden.

Zevenboompjes	Kooltjesberg	Mittel
51,81 Sec.	52,12 Sec.	51,96 Sec.
51,94 "	52,10 "	52,02 "
51,77 "	51,28 "	51,54 "
51,98 "	52,51 "	52,24 "
52,17 "	52,46 "	52,32 "
52,15 "	52,28 "	52,21 "
52,25 "	53,10 "	52,78 "
52,18 "	50,17 "	51,17 "
52,40 "	52,19 "	52,30 "
52,27 "	52,62 "	52,44 "
52,27 "	51,66 "	51,97 "
52,23 "	51,52 "	51,87 "
52,49 "	51,99 "	52,24 "
52,56 "	51,60 "	52,08 "
Mittel: 52,12 Sec.	51,98 Sec.	52,05 Sec.

¹⁾ Moll und van Beck, Pogg. Ann. 5, 351 und 469; 1825.

Als Resultat sämtlicher Messungen ergibt sich für die Schallgeschwindigkeit in trockener Luft und bei 0° der Werth

$$a_0 = 332,8 \text{ m.}^1)$$

Kurze Zeit später stellte Gregory in Woolwich Versuche an, die hauptsächlich den Zweck hatten, den Einfluss des Windes zu bestimmen; da jedoch die Schüsse nur einseitig abgegeben wurden und auch die Entfernung nicht hinreichend gross war, so gehen wir nicht näher darauf ein. Im Jahre 1871 führte Stone am Cap genauere Versuche aus (namentlich gebrauchte er die Vorsicht, die Beobachtungen erst in einiger Entfernung vom Geschütze zu beginnen, um dadurch den Störungen vorzubeugen, die in directer Nähe des Geschützes unvermeidlich sind). Er erhielt 332,4 m, eine Zahl, die sich von der von Moll und van Beck ermittelten nur wenig unterscheidet.

Ebenso, wie man die Schallgeschwindigkeit unter dem Äquator gemessen hatte, bestimmte man sie nun auch nahe am Pol. So stellten Capitän Parry bei seinen Reisen im Polarmeere während der Jahre 1822 und 1824, sowie der Lieutenant Kendall während der Franklin'schen Expedition im Jahre 1825 bei einer Kälte von 40° Beobachtungen an, und fanden die Fortpflanzungsgeschwindigkeit übereinstimmend mit dem theoretischen Werthe für diese niedrigen Temperaturen.

Andererseits bestätigten die Versuche von Stampfer und Myrbach (1823) in Tyrol zwischen zwei Stationen, deren Höhenunterschied 1364 m betrug, sowie diejenigen von Bravais und Martins (1844) in der Schweiz zwischen dem Gipfel und dem Fusse des Faulhornes bei einer Höhendifferenz von 2079 m das theoretische Resultat, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft, für welche sie beide 332,4 m fanden, unabhängig vom Luftdrucke ist.

Aber die bei all diesen Messungen befolgte Methode enthielt eine Fehlerquelle, die sich bei der Bestimmung der Zeit zwischen Blitz und Knall seitens der Beobachter geltend machen musste. Ob nämlich diese Messung mit Hülfe eines Secundenpendels oder eines Chronometers vorgenommen wurde, immer war dazu eine Anzahl von physiologischen Vorgängen nothwendig, von denen jeder eine gewisse Zeit erforderte, und diese konnte je nach den Umständen verschieden sein (persönliche Gleichung). Auf dieser Thatsache beruht die Unsicherheit, die sich deutlich in der

¹⁾ Mit dem von Regnault bestimmten Ausdehnungscoefficienten der Luft reducirt sich diese Zahl auf 332,25 m (Bravais und Martins).

Zusammenstellung der durch die Mitglieder des Bureau des Longitudes so sorgfältig durchgeführten Versuche ausspricht; dieselbe beeinflusste auch in Verbindung mit dem systematischen Fehler des Chronometers nicht weniger stark die Versuche der holländischen Gelehrten.

*Versuche von Regnault.*¹⁾ — Durch eine glückliche Verbindung von graphischer Aufzeichnung mit elektrischer Übertragung machte Regnault die Thätigkeit eines Beobachters vollständig überflüssig. Ausserdem zog er es zur Vermeidung der Schwierigkeiten, welche die Versuche in freier Luft mit sich bringen, vor, die Beobachtungen in Röhren anzustellen.²⁾

Von 1862 bis 1866 führte er eine ganze Reihe von Untersuchungen über die Fortpflanzung des Schalles in Röhren aus, indem er das grosse Leitungsnetz benutzte, welches die Stadt Paris damals ausführen liess, um den angrenzenden Gebieten Leuchtgas zuzuführen und das Wasser der Marne und der Dhuys in das Innere der Stadt zu leiten. Ausserdem wurde im Collège de France für gewisse Bestimmungen noch eine specielle Leitung eingerichtet.

Die eine Öffnung *A* des Versuchsrohres war durch eine Eisenplatte dicht geschlossen; in der Mitte derselben befand sich eine Öffnung, in welcher der Lauf einer durch einen Kork gehaltenen Pistole steckte. War die letztere geladen, so spannte man quer vor die Mündung einen feinen Stahldraht, dessen eines Ende mit der Erde in Verbindung stand, während das andere Ende zu einer Batterie *K* führte, deren zweiter Pol ebenfalls zur Erde abgeleitet wurde. Die zweite Öffnung *B* der Röhre war durch eine feine Kautschukmembran geschlossen, deren Mitte ein kleines Platinscheibchen trug, das durch einen sehr geschmeidigen Draht zur Erde abgeleitet war. Diesem Scheibchen gegenüber befand sich in sehr geringer Entfernung eine stumpfe Spitze, die durch einen gut isolirten Telegraphendraht *F* mit der Batterie in Verbindung gesetzt war. Auf der Station *A* war ein Registrirapparat aufgestellt; derselbe

¹⁾ Regnault, Relation des expériences, entreprises pour déterminer les données des machines à feu 3; 1870.

²⁾ Schon Biot hatte einige interessante Beobachtungen über die Fortpflanzung des Schalles in den Wasserleitungsröhren von Paris gemacht (Biot, loc. cit., pag. 7), und Le Roux hatte zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit ein Zinkrohr von 72 m Länge benutzt, das an seinen beiden Enden durch Membranen geschlossen war; diese Membranen wurden durch die Welle, welche in Folge der Explosion einer Zündkapsel entstand, in Bewegung gesetzt. Le Roux erhielt für die Schallgeschwindigkeit in trockener, kohlensäurefreier Luft 330,7 m (Le Roux, C. R. 55, 239; 1862 und loc. cit.).

bestand im Wesentlichen aus einer mit berusstem Papier überzogenen rotirenden Trommel, auf welcher drei Schreibstifte Marken aufzeichneten, und zwar der erste derselben die Schwingungen eines

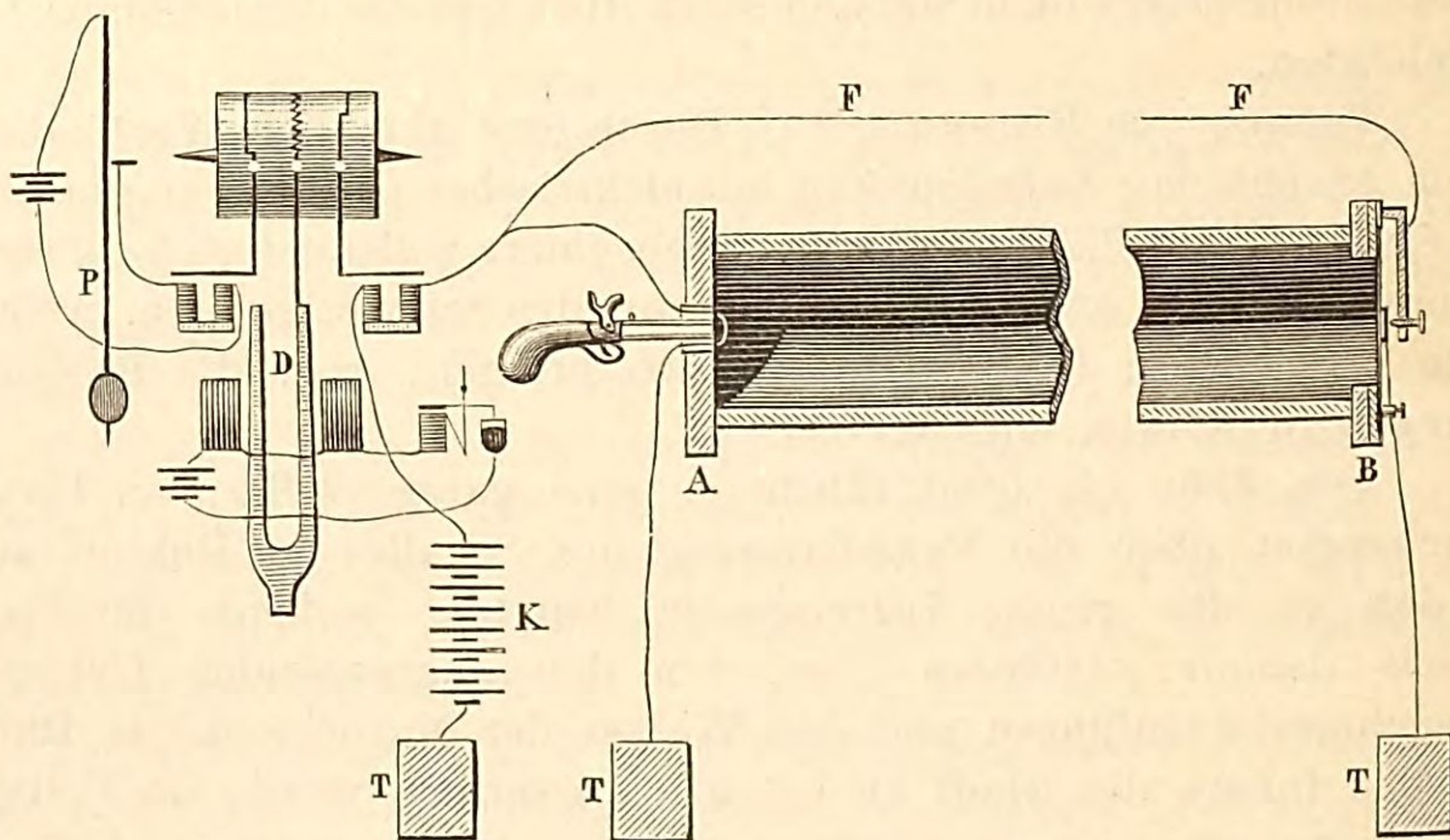


Fig. 36.

Secundenpendels *P*, der zweite die Schwingungen einer elektrisch erregten Stimmgabel *D*, der dritte die Unterbrechung und den Schluss des Stromes *K*; Fig. 36 giebt von dieser Anordnung ein schematisches Bild.

Vor dem Beginn jedes Versuches setzte man den Registrirapparat in Bewegung und schoss sodann die Pistole ab. Der Ladepfropfen derselben durchschlug beim Verlassen des Laues den davor gespannten Draht und unterbrach den Strom; diese Unterbrechung markirte sich auf dem Papier der Trommel.

Gelangte nun die Welle zum Ende *B* des Rohres, so setzte sie die Kautschukmembran in Bewegung und brachte somit das Platinscheibchen mit der stumpfen Spitze in Berührung, die das Ende der Telegraphenlinie bildete; hierdurch wurde der Strom wiederum geschlossen und der Moment des Stromschlusses markirte sich ebenfalls genau auf dem berussten Papiere.¹⁾

Um nun die Zeit in Secunden zu erhalten, welche die Welle zum Durchlaufen der Röhre gebraucht hatte, genügte es, auf der Trommel die Anzahl der ganzen Stimmgabelschwingungen und den übrig bleibenden Bruchtheil zu ermitteln, welche zwischen der ersten und zweiten Marke lagen, und ebenso die Anzahl der

¹⁾ Durch Vorversuche war bereits die Zeit bestimmt worden, welche das Scheibchen brauchte, um die Spitze zu berühren.

Schwingungen, welche in demselben Augenblicke einer Schwingung des Secundenpendels entsprachen.

Die nach *B* gelangte Welle wurde dort reflectirt, kam nach *A* zurück, wurde wiederum reflectirt und kehrte aufs Neue nach *B* zurück, wo sie wiederum einen Stromschluss bewirkte und so fort. Man konnte also die Fortpflanzung während einer langen Zeit beobachten, die natürlicherweise in Abschnitte von gleicher Dauer zerlegt war. Übrigens ist es nöthigenfalls leicht, die Zahl der Beobachtungen dadurch zu vermehren, dass man zwischen *A* und *B* seitliche Röhren anbringt; man erhält dann nicht allein für die Fortpflanzung der Welle von *A* nach *B*, sondern auch für die Zwischenstationen Marken.

Als Mittel zur Erzeugung der Wellen verwandte Regnault verschiedene Pistolen mit verschieden starken Ladungen, ausserdem auch noch die sehr kurze Entladung der Schlagröhren von Kanonen oder die Explosion eines Gemisches aus Sauerstoff und Wasserstoff, ferner liess er comprimirt Luft einströmen, oder er stiess einen Kolben plötzlich gegen das Ende der Röhre; endlich benutzte er auch die musikalischen Töne eines Instrumentes oder der menschlichen Stimme.

Regnaults Versuche erstreckten sich auf sieben verschiedene Leitungen:

	Länge	Stationen	Durchmesser
Röhren des Collège de France . . .	70 m	1	0,108 m
Gasröhren an der Militärstrasse . . .	3000 „	5	0,108 „
Gasröhren von Choisy le Roi . . .	3625 „	5	0,216 „
Wasserleitungsröhren an der Militärstrasse	2000 „	2	0,300 „
Wasserleitungsröhren von Villemomble.	4900 „	1	1,100 „
Canalisationsröhren von Sebastopol . .	960 „	4	1,100 „
Canalisationsröhren von St. Michel . .	1420 „	6	1,100 „

Wir wollen hier beispielsweise die Zahlen *N* der Stimmgabelschwingungen zwischen den Marken wiedergeben, welche den Abgang und die Ankunft der Schwingungen bei der Membran *A* bezeichnen, und zwar wählen wir die erste Reihe der in der Canalisation von St. Michel angestellten Versuche; *L* bedeute die Länge der Röhre, *c* den von der Welle durchlaufenen Weg vom Anfang an bis zur Membran, und *n* die Anzahl der Stimmgabelschwingungen, welche im Augenblicke des Versuchs einer Pendelschwingung entspricht (diese Anzahl änderte sich während dieser Reihen nicht wesentlich und betrug im Mittel 50,971); es giebt also $V = \frac{cn}{N}$ die *mittlere Geschwindigkeit* des Schalles für den

Weg c an. Bei der Temperatur 0^0 würde diese Geschwindigkeit V_0 gewesen sein, bei 0^0 und vollkommen trockener Luft V_0' .¹⁾ Endlich bezeichnen wir mit W_0' die Geschwindigkeit, mit welcher der Schall in trockener Luft und bei 0^0 das letzte Stück des durchlaufenen Weges von der Länge $2L$ zurückgelegt haben würde (wobei die kleine Correction, welche die Trägheit der Membran nöthig macht, in Abzug gebracht ist).

Canal St. Michel I (17. April 1866).

		$T = 10,5^0$	$H = 758 \text{ mm}$	$f = 9,47 \text{ mm}$	Membran A	
Nummer der Streifen	$2n$	$2L = 2835,9 \text{ m}$	$4L = 5671,8 \text{ m}$	$6L = 8507,7 \text{ m}$	$8L = 11343,6 \text{ m}$	$10L = 14179,5 \text{ m}$
1	101,92	426,5	854,9	1283,7	1712,7	—
2	101,96	426,9	855,1	1283,6	1712,3	2141,1
3	101,96	426,05	854,45	1283,15	1711,95	—
4	101,92	427,1	855,6	1284,1	1712,8	—
5	101,93	426,65	855,25	1283,55	1712,35	—
6	101,96	426,8	854,9	1283,6	1712,3	2141,4
Mittel:	101,942	426,66	855,03	1283,62	1712,40	2141,25
		$V = 338,81 \text{ m}$	$338,14 \text{ m}$	$337,86 \text{ m}$	$337,68 \text{ m}$	$337,57 \text{ m}$
		$V_0 = 332,46 \text{ „}$	$331,79 \text{ „}$	$331,51 \text{ „}$	$331,33 \text{ „}$	$331,21 \text{ „}$
		$V'_0 = 331,68 \text{ „}$	$331,01 \text{ „}$	$330,73 \text{ „}$	$330,55 \text{ „}$	$330,44 \text{ „}$
		$W'_0 = 331,68 \text{ „}$	$330,31 \text{ „}$	$330,14 \text{ „}$	$329,99 \text{ „}$	$329,93 \text{ „}$

Im Canal St. Michel allein führte Regnault auf diese Weise 25 Versuchsreihen durch, jede im Allgemeinen mit sechs verschiedenen Membranen, die sich an den Enden A und B , sowie an vier seitlichen Röhren befanden, welche längs des Hauptrohres vertheilt waren.

Die Hauptresultate aller dieser Versuche lassen sich folgendermaassen zusammenfassen:

1. In einem cylindrischen Rohre bleibt die Intensität der Welle nicht constant, sondern nimmt mit der Entfernung ab, und zwar

¹⁾ Die Geschwindigkeit in trockener Luft ist geringer, als in feuchter Luft, weil das Vorhandensein von Wasserdampf in der Atmosphäre die Dichtigkeit der letzteren vermindert. Bezeichnet V die Geschwindigkeit in feuchter Luft bei der Temperatur t^0 , dem Drucke H , und einer Spannkraft des Wasserdampfes $= f$, so ist

$$V_0' = V \sqrt{\frac{1 - 0,38 \frac{f}{H}}{1 + \alpha t}}.$$

Ein Vortheil der Versuche in unterirdischen Röhren ist übrigens eben darin zu finden, dass der Feuchtigkeitsgehalt der Gasmasse, mit welcher man operirt, genau bekannt ist.

um so rascher, je enger das Rohr ist.¹⁾ Der Schuss einer mit 1 Gramm Pulver geladenen Pistole

wurde nicht mehr gehört in einer Ent- fernung von	gab keinen Contact mehr in einer Ent- fernung von	bei einer lichten Weite des Rohres von
1150 m	4056 m	0,108 m
2810 „	11430 „	0,300 „
9540 „	19850 „	1,100 „

In Villemomble konnte man bei einer Ladung von 2,40 g noch leicht die zehnte Rückkehr des Schalles zur Membran *A* beobachten, die Schallwelle war also trotz 20 auf einander folgender Reflexionen nach Zurücklegung eines Weges von nahezu 100 km noch stark genug, um die Membran in Bewegung zu setzen. Ohne diese Reflexionen, die hauptsächlich zur Schwächung des Tones beitragen, würde sich also der Schall in einem weiten Rohre auf eine ungeheure Entfernung übertragen lassen, und es wird hieraus leicht verständlich, dass Biot bei seinen Versuchen in weiten Röhren mit dem Ohre keinerlei Schwächung des Tones bemerken konnte, trotzdem derselbe eine Strecke von 951 m zurückgelegt hatte.

2. Die Geschwindigkeit nimmt gleichzeitig mit der Intensität ab. Einige Zahlen, die ganz willkürlich aus den Messungen herausgegriffen sind, mögen als Beweis dafür dienen.

Rohrweite 0,108 m Pulverladung = 0,4 g		Rohrweite 0,300 m Pulverladung = 0,4 g, später 1,5 g		Rohrweite 1,100 m Pulverladung = 1 g	
<i>c</i>	<i>V'</i> ₀	<i>c</i>	<i>V'</i> ₀	<i>c</i>	<i>V'</i> ₀
1351,95	329,95	1905,0	332,37	749,1	334,16
2703,90	328,20	3810,0	330,34	1417,9	332,50
4055,85	326,77	—	—	2835,8	331,72
5407,80	323,34 (?)	3810,3	332,18	5671,8	331,24
		7620,6	330,43	11343,6	330,68
		11430,0	329,64	19851,3	330,52
		15240,0	328,96		

3. Die Geschwindigkeit strebt einem Grenzwerthe zu, der um so höher liegt, je weiter das Rohr ist.²⁾

¹⁾ Auch die Beschaffenheit der Wandung ist nicht ohne Einfluss. Bei den Abzugscanälen von Paris, wo die Arbeiter durch den Ton einer Trompete benachrichtigt werden, machte man die Erfahrung, dass die Signale in Gängen, welche mit einer glatten Cementschicht ausgekleidet sind, unverhältnissmässig viel weiter tragen, als in denjenigen, deren Wände aus roh behauenen Steinen bestehen.

²⁾ v. Helmholtz hat in seiner Abhandlung über die Theorie der Luftschwingungen in offenen Röhren für die Fortpflanzungsgeschwindig-

Das Vorhandensein eines Grenzwertes ergibt sich unmittelbar aus der Zusammenstellung der mittleren Geschwindigkeiten für den ganzen von der Welle zurückgelegten Weg zwischen dem Beginn der Bewegung und der Aufzeichnung der letzten Marke.

Für diese mittleren Grenzgengeschwindigkeiten V'_0 wurde gefunden

bei einem Durch- messer der Röhre von	V'_0	Weglänge
0,108 m	326,66 m	4055,9 m
0,216 „	328,18 „	6238,9 „
0,300 „	328,96 „	15240,0 „
1,100 „	330,52 „	19851,3 „

Bestimmt man nun die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für den letzten Hingang, bei dem die Welle eben noch eine Bewegung der Membran hervorbringen konnte, und berücksichtigt dabei die

keit U des Schalles in einem Rohre vom Radius R die Formel gegeben

$$U = V \left(1 - \frac{\eta}{2R \sqrt{\pi N}} \right).$$

Hierin bezeichnet

V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in freier Luft,
 η den Coefficienten der inneren Reibung des die Röhre erfüllenden Gases,
 N die Schwingungszahl des betreffenden Tones.

Später nahm Kirchhoff dieselbe Untersuchung wieder auf, indem er die von der Röhrenwand zugeleitete resp. abgeführte Wärme in Rechnung zog, und gelangte zu derselben Formel, nur hängt der Coefficient η bei ihm gleichzeitig von der inneren Reibung des Gases und der thermischen Wirkung der Wandung ab (Helmholtz, Crell. Journ. 57, 1; 1860; Kirchhoff, Pogg. Ann. 134, 177; 1868).

Schneebeli und A. Seebeck versuchten, die Richtigkeit der Theorie experimentell nachzuweisen; zu diesem Zwecke stellten sie indirecte Messungen der Schallgeschwindigkeit mittelst der Interferenzerscheinungen in kurzen Röhren von verschiedenem Durchmesser an, und fanden die Differenz zwischen der Schallgeschwindigkeit in freier Luft und in einem Rohre wirklich nahezu umgekehrt proportional dem Durchmesser des Rohres. So erhielt Schneebeli, der $V = 332,25$ m setzte, bei

$2R$	$V - U$	$(V - U) 2R$
21 mm	3,50 m	63,50
12 „	5,13 „	61,56
6,5 „	9,95 „	64,67

Der Einfluss der Tonhöhe schien jedoch bedeutender zu sein, als die Formel angiebt. Mit einer Röhre von 3,4 mm Durchmesser fand Seebeck beispielsweise für c_2 ($N = 512$), g_1 ($N = 384$) und e_1 ($N = 320$) für die Differenzen $V - U$ resp. 9,79 m; 13,91 m und 15,51 m (Schneebeli, Pogg. Ann. 136, 269; 1869 und A. Seebeck, Pogg. Ann. 139, 104; 1870).

Correction wegen der Trägheit der Membran, so ergibt sich für W'_0

Durchmesser der Röhre	W'_0
0,108 m	324,25
0,216 „	326,0
0,300 „	329,25
1,100 „	330,3

Leider ist die genaue Bestimmung dieser Geschwindigkeiten W'_0 besonders schwierig, da die Weglänge gering ist und die Trägheit der Membran bei schwachen Wellen einen wesentlich grösseren Einfluss hat. Die letzte Zahl allein verdient einiges Vertrauen; sie weicht nur sehr wenig von dem mittleren Grenzwert V'_0 für dasselbe Rohr¹⁾ ab, bei dem der Einfluss der Wände nur noch eine verschwindende Grösse haben kann. Nach Berücksichtigung aller Correctionen nimmt Regnault als Grenzgeschwindigkeit an

$$a_0 = 330,6 \text{ m.}$$

4. Die Entstehungsart der Welle scheint keinen merklichen Einfluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu besitzen; es ergab sich vielmehr, dass die Geschwindigkeit der Wellen, welche durch die Explosion von Knallgas hervorgerufen werden, dieselbe ist, wie diejenige der Wellen, welche durch einen Pistolenschuss entstehen. Die Welle, welche durch einen Kolbenstoss hervorgerufen wurde, pflanzte sich etwas langsamer fort, dies hatte jedoch seinen Grund in der geringeren Intensität, denn in der Leitung von St. Michel konnte diese Welle bei ihrer zweiten Rückkehr niemals mehr eine Marke hervorbringen, während die von einem Pistolenschusse herrührende Welle deren stets mehrere lieferte.

In Bezug auf die musikalischen Töne fand Regnault, dass die scheinbare Fortpflanzungsgeschwindigkeit der hohen Töne wesentlich geringer ist, als die der tiefen. Nach seiner Ansicht kann indessen diese Thatsache auch allein daher rühren, dass das Trommelfell des Ohres durch die tiefen Töne rascher in Bewegung gesetzt wird, als durch die hohen.²⁾ Eine unmittelbare Folge davon ist, dass der Ton beim Durchlaufen grosser Röhrenstrecken seine Klangfarbe nicht beibehält.

¹⁾ Berechnet man diese Geschwindigkeit V'_0 für den ganzen, nur um die erste Länge $2L$ verminderten Weg, so findet man wiederum dieselbe Zahl 330,6 m.

²⁾ Aus dem früher Angeführten (Anmerkung zu S. 71 ff.) würde sich im Gegensatze hierzu ergeben, dass die Geschwindigkeit der tiefen Töne geringer sein müsste, als diejenige der hohen Töne.

5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Gase hat stets denselben Wert, unter welchem Drucke auch das Gas stehen möge. Diese Thatsache, welche sich bereits aus den Versuchen im Gebirge ergeben hatte, wurde für Drucke zwischen 0,247 m und 1,267 m in der Röhrenleitung des Collège de France bestätigt; es war unmöglich, einen merklichen Unterschied zwischen den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bei so verschiedenen Drucken zu finden.

6. Endlich wurde der Einfluss der Dichte noch direct an denjenigen Gasen studiert, welche man in genügenden Mengen herstellen konnte, um damit die Leitung der Strasse von Ivry (eines Theils der Gasleitung der Militärstrasse) oder diejenige des Collège de France zu füllen. Wir wollen die bei beiden Leitungen erhaltenen Resultate in einer einzigen Tabelle zusammenfassen; darin mögen V' und V die Geschwindigkeiten im Gase und in der Luft bedeuten, δ die auf Luft bezogene Dichte des Gases. Würden Gas und Luft den Gesetzen von Mariotte, Charles und Poisson streng gehorchen, dann müsste die Beziehung gelten

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{\frac{1}{\delta}}.$$

Es ergab sich für

	$\frac{V'}{V}$		$\sqrt{\frac{1}{\delta}}$
	Leitung von 567,5 m Länge	Leitung von 70,5 m Länge	
Wasserstoff	3,801	—	3,682
Kohlensäure	0,7848	0,8009	0,8087
Stickoxydul	—	0,8007	0,8100
Ammoniak	—	1,2279	1,3035

Die Übereinstimmung zwischen den Werthen von $\frac{V'}{V}$ und denjenigen von $\sqrt{\frac{1}{\delta}}$ erscheint genügend, wenn man berücksichtigt, wie schwer es ist, mit ganz reinen Gasen in Leitungen von solcher Grösse zu operiren.

Ausserdem stellte Regnault auch noch Messungen der Schallgeschwindigkeit in der freien Luft an.¹⁾ Er befolgte dabei die

¹⁾ Zu Versuchen in einem beschränkten Raume verwendete Bosscha die *Methode der Coincidenzen* (91). Man bestimmte mittelst des Gehöres das Zusammenfallen der Schläge von zwei nahezu synchronen Pendeln; anfänglich waren die beiden Pendel neben dem Beobachter aufgestellt, dann wurde das eine derselben in einige Entfernung gebracht, so dass dessen Schläge mit einer Verspätung ins Ohr gelangten, deren Grösse sich aus der Beobachtung selbst ergab (Bosscha, *Allgemeene Konsten Letterbode*; 1853, par. 2, p. 401; *Pogg. Ann.* 92, 485; Koenig, *C. R.* 55, 603; 1862 und *Quelques expériences d'acoustique* 30; Paris 1882).

Methode der abwechselnden Schüsse, bestimmte aber den Augenblick, in welchem der Schuss gelöst wurde, und denjenigen, in welchem die Welle an der zweiten Station ankam, nicht durch menschliche Beobachter, sondern durch Instrumente. Um diese neuen Beobachtungen den in den Röhren angestellten vollständig vergleichbar zu machen, verwendete er die gleichen Registrirapparate und möglichst dieselbe Beobachtungsart. Trotzdem verursachte das Aufzeichnen der Ankunft der Welle auf der zweiten Station eine unerwartete Schwierigkeit: So stark nämlich auch der Stoss des Membranscheibchens gegen die Contactspitze war, immer blieb der Stift des Registrirapparates unbeweglich. Diese Erscheinung, welche man bereits bei den weiten Röhren beobachtet hatte, wenn die Membranen dem Anfangspunkte zu nahe lagen, ist darauf zurückzuführen, dass die Explosion des Pulvers im Geschütz nicht nur eine einzige Verdichtungswelle hervorbringt, sondern eine Reihe von abwechselnden Verdichtungs- und Verdünnungswellen, welche der Membran in ungemein rascher Aufeinanderfolge eine Reihe von entgegengesetzt gerichteten Bewegungen ertheilen und den Contact zwischen Scheibchen und Stift nicht genügend lang bestehen lassen, damit der Strom in den Spulen des Registrirapparates zur Wirksamkeit gelangen kann. In den engen Röhren dagegen tritt auch bei geringen Entfernungen nur eine einzige Welle auf, die einen hinreichenden Contact hervorruft, um den Schreibstift in Bewegung zu setzen. Um der erwähnten Schwierigkeit zu begegnen, bestimmte man die Ankunft der Welle nicht durch die Erzeugung eines Stromes, sondern durch die Unterbrechung eines solchen, was nur eine geringfügige Veränderung der Apparate erforderte.

Die Versuche wurden im Polygon von Satory bei Versailles angestellt; sie ergaben, dass die Methode der abwechselnden Schüsse nicht genügt, um den Einfluss des Windes zu beseitigen. Sollte dies der Fall sein, so müsste der Wind während der ganzen Dauer einer Beobachtungsreihe constante Richtung und Intensität behalten, und, obwohl eine solche Beobachtungsreihe im vorliegenden Falle nur 23 Secunden dauerte, so kann man doch nicht sicher sein, dass während derselben diese beiden Bedingungen genau erfüllt waren; immerhin lässt sich durch Häufung der Versuche der Einfluss dieses zufälligen Fehlers abschwächen. Das Mittel der Resultate aus 334 Paar Schüssen ist nach Reduction auf Null Grad und absolute Trockenheit für eine Entfernung von 2445 Meter:

$$V'_0 = 330,7 \text{ m},$$

ein Werth, der vortrefflich mit demjenigen übereinstimmt, den man in den Röhren von 1,10 m innerem Durchmesser ermittelt hatte.

Die kleine Abweichung zwischen den beiden Zahlen zeigt übrigens auch den richtigen Sinn, denn in dem Augenblicke, wo die Welle bei den Versuchen in freier Luft die Membran in Bewegung setzte, besass sie eine noch wesentlich grössere Intensität als da, wo sie in der Röhrenleitung auf die Membran den letzten merkbaren Eindruck hervorbrachte.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer sehr kleinen Erschütterung dürfte also in trockener Luft bei Null Grad dem oben angegebenen Werthe

$$a_0 = 330,6 \text{ m}$$

sehr nahe kommen. Wir werden späterhin Versuche besprechen, welche gestatten, die Schallgeschwindigkeit in den Gasen auf indirectem Wege zu bestimmen.

347. Schallgeschwindigkeit in den Flüssigkeiten. —

Die Formel

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}}$$

lässt sich hier unmittelbar verwenden. Da die Compression einer Flüssigkeit keine bedeutende Wärmentwicklung im Gefolge hat, so ist

$$E = \frac{\text{Druckzuwachs}}{\text{entsprechende Compression}} = \frac{gmH}{\kappa};$$

hierbei bedeutet

g die Intensität der Schwere,
 m die Dichte des Quecksilbers,
 H die normale Barometerhöhe,
 κ den Compressibilitätscoefficient der Flüssigkeit;

also wird

$$a = \sqrt{\frac{gmH}{\kappa D}};$$

D ist die Dichte der Flüssigkeit bei der Temperatur, bei welcher der Versuch stattfindet. Diese Formel gilt ebensowohl für die Fortpflanzung in einem cylindrischen Rohre wie in einem unbegrenzten Medium.

Die Schallgeschwindigkeit in Wasser von 4° C., einer Temperatur, für welche nach Grassi (196) $\alpha = 0,0000499$ ist, würde demnach

$$a = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 13,59 \cdot 0,760}{0,0000499 \cdot 1}} = 1425 \text{ m}$$

betragen, also $4\frac{1}{2}$ Mal soviel als die Geschwindigkeit in der Luft.

Wasser ist die einzige Flüssigkeit, in welcher directe Messungen angestellt wurden.

Die ersten Untersuchungen verdanken wir Beudant,¹⁾ der im Jahre 1820 zu Marseille fand, dass der Schall im Meerwasser ungefähr 1500 Meter in der Secunde durchläuft.

Im Jahre 1827 maassen Colladon und Sturm²⁾ mit grosser Sorgfalt die Schallgeschwindigkeit im Wasser des Genfer Sees, und zwar zwischen zwei Schiffen, die in Rolle und in Thonon 13487 Meter von einander vor Anker lagen. An dem Schiffe in Rolle war eine grosse Glocke *C* befestigt, welche durch einen

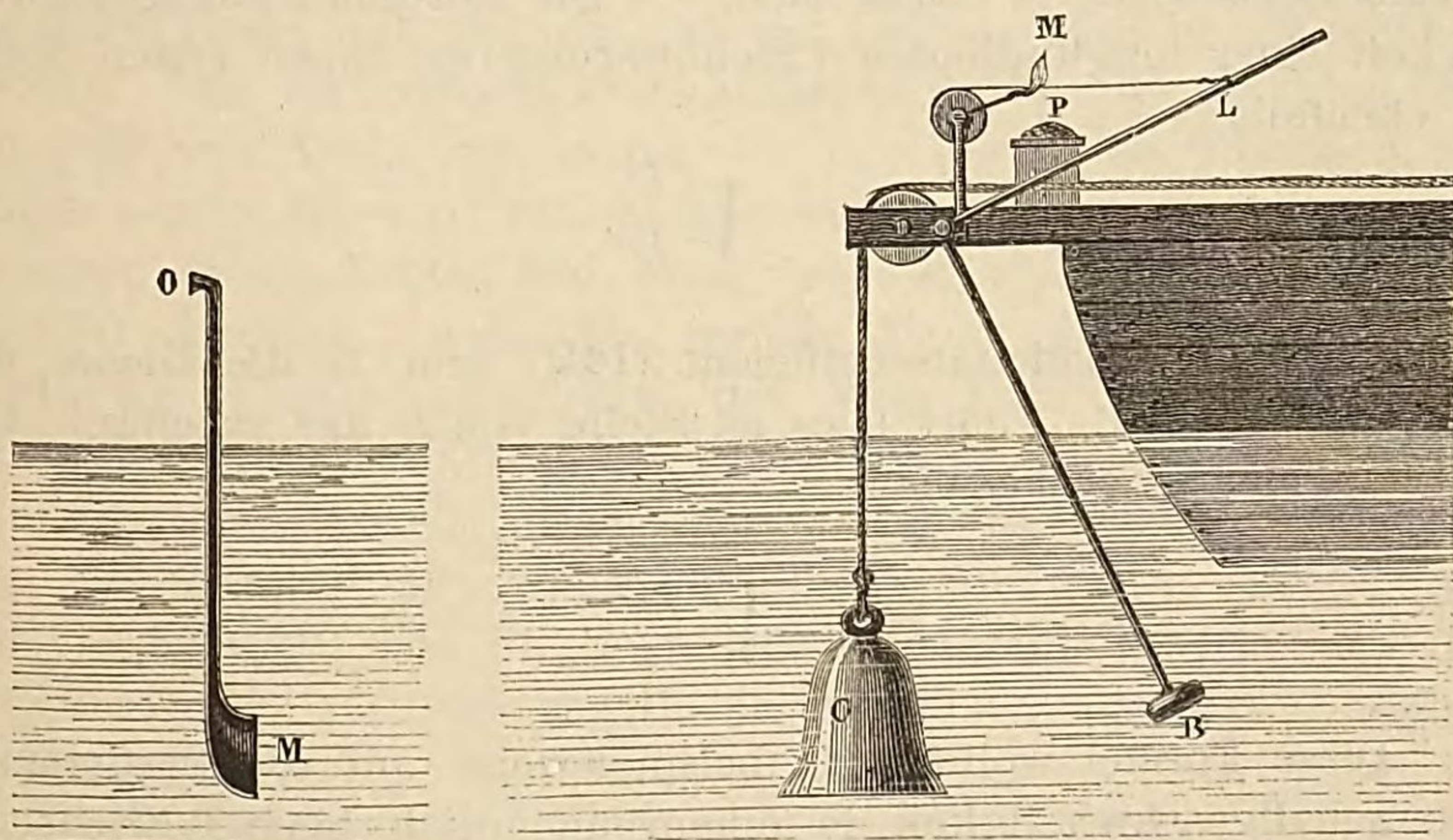


Fig. 37.

Hammer mittelst eines aussen befindlichen Hebels *L* angeschlagen werden konnte. Dieser Hebel setzte gleichzeitig eine Lunte in Bewegung, welche in demselben Augenblicke, wo der Schlag erfolgte, einen kleinen Pulverhaufen auf dem Vordertheile des Schiffes entzündete. Die auf dem anderen Schiffe befindlichen

¹⁾ Beudant, Nicht veröffentlichte Versuche, erwähnt in der Abhandlung von Colladon und Sturm.

²⁾ Colladon und Sturm, Ann. de chim. et de phys. (2), 36, 236; 1827.

Beobachter notirten den Augenblick, in welchem sie das Signal aufleuchten sahen, sodann denjenigen, in welchem sie den Schall hörten. Der letztere wurde mit Hülfe eines grossen Hörrohres aufgenommen, das ins Wasser tauchte und dessen untere Öffnung mit einer Membran M verschlossen war, während die obere Öffnung O an das Ohr gebracht wurde. Die zwischen beiden Momenten verflossene Zeit betrug im Mittel 9,4 Sekunden, so dass sich für die Schallgeschwindigkeit im Wasser bei $8,1^0$ ergab:

$$a = 1435 \text{ m}$$

Diese Zahl ist fast identisch mit derjenigen, welche die Rechnung liefert, aber die verhältnissmässige Unsicherheit des Werthes von α gestattet keine strenge Vergleichung zwischen Theorie und Experiment.

348. Schallgeschwindigkeit in festen Körpern. — *Schallgeschwindigkeit in einem Stabe.* — Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer longitudinalen Erschütterung in einem festen Stabe ist ebenfalls

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}},$$

wobei E den Elasticitätscoefficient (142) und D die Dichte des Körpers bedeutet. Führt man an Stelle von D das specifische Gewicht p ein, so erhält man

$$a = \sqrt{\frac{gE}{p}}.$$

Diese Formel wollen wir beispielsweise auf die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in einem unendlich langen Eisenstabe anwenden. Der Elasticitätscoefficient des Eisens, bezogen auf das Quadratmillimeter, beträgt ungefähr 20 000 kg, für ein Quadratmeter ist also $E = 20\,000\,000\,000$. Das specifische Gewicht des Eisens ist ca. 7,7, somit das Gewicht eines Kubikmeters 7700 kg; man hat demnach

$$a = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 20\,000\,000\,000}{7700}} = 5100 \text{ m},$$

also etwa das Fünfzehnfache der Geschwindigkeit in der Luft.

Auf dieselbe Weise würden wir für die Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen festen Körpern, die in die Form von dünnen

Stäben, Drähten oder Röhren gebracht sind und sich seitlich frei ausdehnen oder zusammenziehen können, finden:

Tannenholz .	6000 m, d. h. das 18fache der Geschwindigkeit in der Luft
Glas	5200 " " " 15,5 " " " " " "
Stahl	5200 " " " 15,5 " " " " " "
Eisen	5100 " " " 15,0 " " " " " "
Gusseisen .	4300 " " " 12 " " " " " "
Kupfer . . .	3750 " " " 11 " " " " " "
Messing . . .	3550 " " " 10,5 " " " " " "
Platin	2650 " " " 8 " " " " " "
Silber	2600 " " " 7,5 " " " " " "
Gold	1750 " " " 5 " " " " " "
Blei	1200 " " " 3,5 " " " " " "

Die directen Messungen bieten grosse Schwierigkeiten dar.

Biot¹⁾ versuchte mit Hülfe eines geschickten Uhrmachers, Namens Martin, die Schallgeschwindigkeit im Gusseisen zu bestimmen, und zwar mit Hülfe einer Leitung von 951,25 m Länge. Ein am einen Ende aufgestellter Hammer schlug gleichzeitig auf die Röhrenwand und auf eine an der Leitungsöffnung aufgehängte Glocke. Der am anderen Ende stehende Beobachter vernahm nach einander zwei Töne, von denen der eine durch das Gusseisen, der andere durch die Luft übertragen worden war. Die Zeit, welche zwischen diesen beiden Momenten verfloss, wurde mit einem Chronometer ermittelt. Aber die geringe Dauer derselben (2,5 Sec.) sowie die Ungleichmässigkeit der Wandung liessen kein sehr genaues Resultat erwarten (die Röhrenleitung bestand nämlich aus 376 einzelnen Röhren; dieselben waren durch Bleiringe verbunden und die letzteren mit getheertem Stoffe überzogen). Biot fand auf diese Weise, dass die Schallgeschwindigkeit im Gusseisen ungefähr 10,5 Mal so gross ist, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in der Luft.

Im Jahre 1851 nahmen Wertheim und Breguet²⁾ die Untersuchung wieder auf, und zwar mit den Telegraphendrähten der Versailler Eisenbahn (rechte Seite), zwischen Asnières und Puteaux. Die Weglänge (4067,3 m) hätte genügt, um eine genaue Bestimmung der Zeitdauer für die Übertragung des Tones auszuführen, der von einem, zu bestimmter Zeit auf den Endpfahl ausgeführten Hammerschlage herrührte; es trat jedoch der eigenthümliche Umstand auf, dass der Schall den Tunnel von Puteaux nicht zu durchsetzen vermochte, trotzdem der isolirte Draht nirgends berührte. Es ist demnach wahrscheinlich, dass das Geräusch, welches man

¹⁾ Biot, loc. cit., p. 26.

²⁾ Wertheim und Breguet, C. R. **32**, 293; 1851.

gerade bis zum Tunnelleingange hörte, nicht durch die Telegraphendrähte übertragen wurde, sondern durch den Boden, in welchem die Pfähle standen, und dass der Schall dann seine ganze Intensität verlor, weil er sich in der Masse des Mont Valérien verbreitete. Die aus den Versuchen von Wertheim und Breguet folgende Geschwindigkeit von 3485 m würde demnach wahrscheinlich nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch den zwischen beiden Stationen befindlichen Erdboden darstellen.

Schallgeschwindigkeit in einem unendlich grossen festen Körper. — Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erschütterung in einem Stabe, der sich in transversaler Richtung frei zusammenziehen und ausdehnen kann, während er sich in longitudinaler Richtung verlängert oder verkürzt, stimmt nicht mit derjenigen in einer unendlich grossen festen Masse überein, wo die Möglichkeit einer solchen freien seitlichen Bewegung nicht besteht, und die Spannungen an den beiden Grundflächen eines beliebig aus der Masse herausgeschnittenen Cylinders nicht mehr denselben Gesetzen gehorchen.

Wir fassen ein festes, isotropes und nach allen Richtungen hin unbegrenztes Medium ins Auge. Eine Erschütterung, die in irgend einem sehr kleinen Theile dieses Mediums hervorgebracht wird, breitet sich nach allen Richtungen in Form einer kugelförmigen Welle aus, deren Radius gleichmässig zunimmt. In sehr grosser Entfernung vom Erschütterungsmittelpunkte lassen sich die Kugelschalen, welche die auf einander folgenden Lagen der Welle darstellen, in ihren einzelnen Theilen durch die dazu gehörigen Tangentialebenen ersetzen, mit anderen Worten: Man kann an Stelle der Kugelwellen ebene Wellen setzen, die auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen. Nehmen wir den Coordinatenanfang auf einer beliebigen dieser Ebenen an, dann wird eine in der Entfernung r vom Ursprunge befindliche Welle durch die Gleichung bestimmt:

$$ax + by + cz = r,$$

wobei a , b , c die Cosinus der Winkel bedeuten, welche die Fortpflanzungsrichtung mit den Coordinatenachsen anschliesst.

Wenn sich die Bewegung mit der zu bestimmenden Geschwindigkeit V fortpflanzt, so ist zur Zeit t die Verschiebung u eines Molecüls (x, y, z) der Welle r gleich und parallel derjenigen Verschiebung, welche das im Coordinatenanfang befindliche Molecül zur Zeit $\left(t - \frac{r}{V}\right)$ erfuhr. Wir können also setzen:

$$u = f\left(t - \frac{ax + by + cz}{V}\right),$$

wobei $f(t)$ die veränderliche Verschiebung des im Koordinatenanfang befindlichen Molecüls bedeutet; bezeichnen wir ferner mit α, β, γ die Cosinus der Winkel zwischen dieser Verschiebungsrichtung und den Coordinatenachsen, dann sind die Projectionen von u auf die Achsen gegeben durch

$$\xi = \alpha u; \quad \eta = \beta u; \quad \zeta = \gamma u.$$

Diese speciellen Werthe müssen den partiellen Differentialgleichungen genügen, welche sämtliche kleinen Bewegungen innerhalb des betrachteten Medium bestimmen (145), d. h. den Gleichungen 19^a, welche, abgesehen von den äusseren Kräften, aber unter Berücksichtigung des Beharrungsvermögens, lauten

$$(19^a) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta \xi = \varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta \eta = \varrho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta \zeta = \varrho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}; \end{cases}$$

hierin bezeichnet

$$(15) \quad \Theta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z},$$

und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Wir berechnen nun $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$; es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \alpha \frac{f'}{V}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \beta \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta \beta \frac{f'}{V}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \gamma \frac{\partial u}{\partial z} = -\gamma \gamma \frac{f'}{V}; \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich, wenn man unter $n = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma$ den Cosinus des Winkels versteht, welchen die Verschiebungsrichtung mit der Fortpflanzungsrichtung der Welle bildet,

$$\Theta = -n \frac{f'}{V},$$

und demnach

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = -n \frac{f''}{V^2}.$$

Ebenso findet man

$$\Delta \xi = a \frac{f''}{V^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a f'' = a V^2 \frac{f''}{V^2}.$$

Führt man diese Werthe, sowie die entsprechenden für y und z in die Gleichungen 19^a ein, so erhält man nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Factors $\frac{f''}{V^2}$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) a n + (\mu - \varrho V^2) a &= 0, \\ (\lambda + \mu) b n + (\mu - \varrho V^2) \beta &= 0, \\ (\lambda + \mu) c n + (\mu - \varrho V^2) \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit a , b , c und addirt sie, so ergibt sich

$$(\lambda + 2\mu - \varrho V^2) n = 0.$$

Damit diese Gleichung erfüllt sei, muss entweder gelten:

$$\lambda + 2\mu - \varrho V^2 = 0 \quad \text{oder} \quad n = 0.$$

Im ersteren Falle ist

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}};$$

hierdurch gehen aber die drei letzten Gleichungen über in

$$a n = a; \quad b n = \beta; \quad c n = \gamma.$$

Durch Addition derselben nach Multiplication mit a , β , γ folgt

$$n^2 = 1,$$

d. h. die Verschiebung findet dann in der Fortpflanzungsrichtung statt.

Im zweiten Falle, wo $n = 0$, geht die Verschiebung in der Wellenebene vor sich; die Dilatation $\Theta = n \frac{\partial u}{\partial r}$ ist Null, mit anderen Worten: die Dichtigkeit des Mediums erleidet keine Veränderung, und die Gleichungen reduciren sich auf:

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}.$$

Eine ebene Welle besitzt demnach in einem isotropen Medium, wenn die Verschiebung longitudinal ist, die Fortpflanzungsgeschwin-

digkeit V_1 , oder, wenn man die Werthe des Elasticitätscoefficienten E und des Poisson'schen Coefficienten σ durch die Gleichungen 11^a und 11^b (142) einführt und gleichzeitig auch die Dichte ρ durch $\frac{p}{g}$ ersetzt,

$$V_1 = \sqrt{\frac{gE}{p} \frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}}.$$

Ist die Verschiebung transversal, dann ist die Geschwindigkeit geringer, und zwar gleich

$$V_2 = \sqrt{\frac{gE}{p} \frac{1}{2(1+\sigma)}}.$$

Es zerlegt sich also, wie Poisson¹⁾ zuerst gezeigt hat, eine beliebige Verschiebung irgend welcher Richtung im Erschütterungscentrum in eine longitudinale Verschiebung parallel der Fortpflanzungsrichtung und in eine transversale Verschiebung senkrecht hierzu. Da die erstere rascher verläuft als die zweite, so trennen sich beide sogleich und pflanzen sich dann mit ihren eigenen Geschwindigkeiten fort.

Nach Wertheim ist $\sigma = \frac{1}{3}$, folglich erhalten die Geschwindigkeiten V_1 und V_2 die Werthe

$$V_1 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{gE}{p}} = a \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad V_2 = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{gE}{p}} = a \sqrt{\frac{3}{8}}$$

und für das Verhältniss $\frac{V_2}{V_1}$ ergibt sich

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}} = \frac{1}{2}.$$

Wenn, nach Poissons Annahme, $\lambda = \mu$ und demnach $\sigma = \frac{1}{4}$ ist, so erhält man:

$$V_1 = \sqrt{\frac{6}{5} \frac{gE}{p}} = a \sqrt{\frac{6}{5}}; \quad V_2 = \sqrt{\frac{2}{5} \frac{gE}{p}} = a \sqrt{\frac{2}{5}}$$

und

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1,732}.$$

¹⁾ Poisson, Ann. de chim. et de phys. (2), 22, 250 und 44, 423; 1823—1830.

Eine directe Bestätigung dieser theoretischen Resultate durch das Experiment konnte man noch nicht erhalten; nur das Eine bemerkte Wertheim, dass bei Erdbeben in der That zweierlei Wellen vorhanden zu sein scheinen.

349. Fundamentale Beziehung zwischen der Wellenlänge, der Schwingungsperiode und der Schallgeschwindigkeit. — Wenn sich ein Ton von gegebener Höhe in einem beliebigen homogenen Medium mit der Geschwindigkeit V ausbreitet und die Wellenlänge λ die Strecke bezeichnet, durch welche er sich in diesem Medium während der Dauer τ einer Schwingung fortpflanzt, so gilt die Beziehung

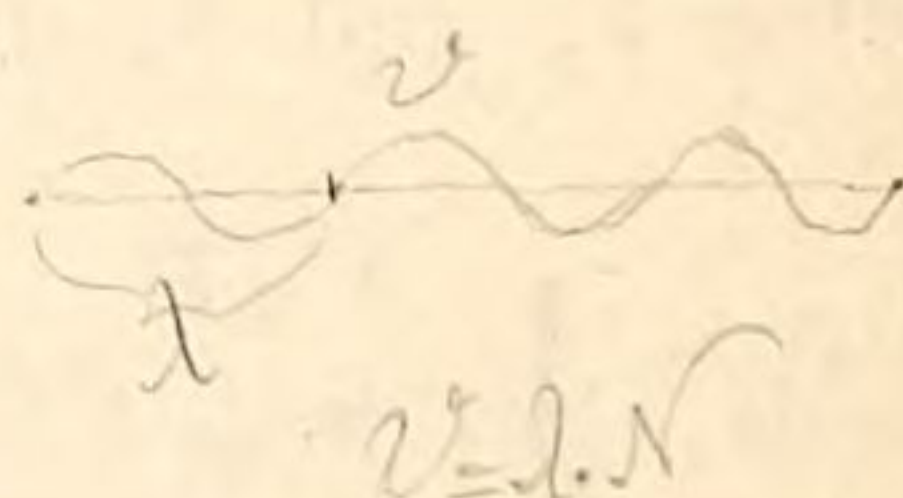
$$\lambda = V\tau.$$

Versteht man unter N die Anzahl der in einer Secunde ausgeführten Schwingungen, so ist ferner

$$N\tau = 1$$

und man kann somit die vorhergehende Formel auch schreiben

$$\lambda = \frac{V}{N}.$$



Die Periode τ oder die Anzahl N der Schwingungen in der Zeiteinheit ist charakteristisch für die Höhe des gegebenen Tones; andererseits hängt die Geschwindigkeit V von der Natur des Mediums ab, in welchem sich der Ton fortpflanzt, demnach ist die Wellenlänge λ gleichzeitig von der Tonhöhe und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in dem betreffenden Medium abhängig.

Wir haben bereits gesehen, wie man τ (oder N) und V bestimmen kann; demnächst werden wir auch die Bestimmung von λ kennen lernen; wenn auch die directe Messung dieses Parameters nicht unumgänglich nothwendig ist, so ist sie darum doch keineswegs überflüssig.

Wellenlänge der gebräuchlichsten Töne. — In der folgenden Tabelle finden sich die Schwingungszahlen der gebräuchlichsten Töne, ihre Perioden und ihre Wellenlängen in der Luft bei gewöhnlicher Temperatur ($V = 340$ m) vereinigt:

		N	$\tau = \frac{1}{N}$	λ	
Fundamentaltöne nach Sauveur	C_{-1}	32	0,03125 Sec.	10,63 m	oder 32 Fuss
	C	64	0,01563 "	5,31 "	" 16 "
	c	128	0,00781 "	2,66 "	" 8 "
	c_1	256	0,00391 "	1,33 "	" 4 "
	c_2	512	0,00195 "	0,664 "	" 2 "
Normalstimmgabel	c_3	1024	0,00098 "	0,332 "	" 1 "
	a_1	435	0,00230 "	0,782	
Chronographische Stimmgabeln		50	0,02000 "	6,80	
		100	0,01000 "	3,40	
		200	0,00500 "	1,70	
		300	0,00333 "	1,13	
		400	0,00250 "	0,85	
		500	0,00200 "	0,68	
		1000	0,00100 "	0,34	

350. Reflexion des Schalles. — Gesetze der Reflexion. —

Wenn die kreisförmigen Wellen, die auf der Oberfläche eines Wassergefässes erregt werden, die Wandung erreichen, prallen sie gegen das Hinderniss an und kommen in der früheren Richtung zurück.¹⁾

In ähnlicher Weise werden auch die Luftwellen, die Träger des Schalles, an den Hindernissen, auf welche sie treffen, reflectirt, wie es die allbekannten Erscheinungen des Echo und der Resonanz beweisen; diese Reflexion geht wie diejenige der Flüssigkeitswellen nach den bekannten Gesetzen der Lichtreflexion vor sich. Bezeichnet man die Fortpflanzungsrichtung des Schalles als *Strahl*, und die Winkel, welche der einfallende und der reflectirte Strahl mit der Normale im Einfallspunkte einschliessen, als *Einfallswinkel* und *Re-*

¹⁾ Um die Reflexion der Flüssigkeitswellen mittelst der Projection sichtbar zu machen, legt man, nach Desains, auf den Rand eines mit Quecksilber gefüllten, rechteckigen Gefässes ein Diaphragma, dessen Spalt etwas kleiner ist, als die Oberfläche des Gefässes, so dass die Ränder verdeckt werden, welche den Eindruck des Bildes stören würden; dann lässt man auf das Quecksilber in schräger Richtung ein breites Lichtbündel fallen, welches man mittelst einer passend aufgestellten Linse auffängt, so dass auf einem Schirme ein deutliches Bild der Quecksilberoberfläche erscheint. Klopft man nun leise an eine Wand des Gefässes, so sieht man, wie ebene Wellen diese Wand verlassen, sich bis zur gegenüberliegenden Wand fortpflanzen, wieder zurückkommen und so mehrmals die Oberfläche in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Nimmt man ein rundes Gefäss, so braucht man nur die Mitte der Oberfläche zu berühren, um kreisförmige Wellen hervorzurufen, die nach der Reflexion an der Wand zur Mitte zurückkehren. Schon ein Stoss gegen den Tisch oder den Fussboden genügt, um Wellen entstehen zu lassen.

flexionswinkel, dann liegt der einfallende und der reflectirte Strahl in einer zur reflectirenden Oberfläche senkrechten Ebene, und der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Um nachzuweisen, dass die Reflexion des Schalles dieselben Gesetze befolgt, wie diejenige des Lichtes, bedient man sich gewöhnlich der *conjugirten Spiegel*. Es sind dies zwei kugelförmige Hohlspiegel M und M' , welche man in einer Entfernung von 5—6 m von einander so aufstellt, dass ihre beiden Achsen in der Richtung AA' zusammenfallen. Setzt man nun eine Kerze in den einen

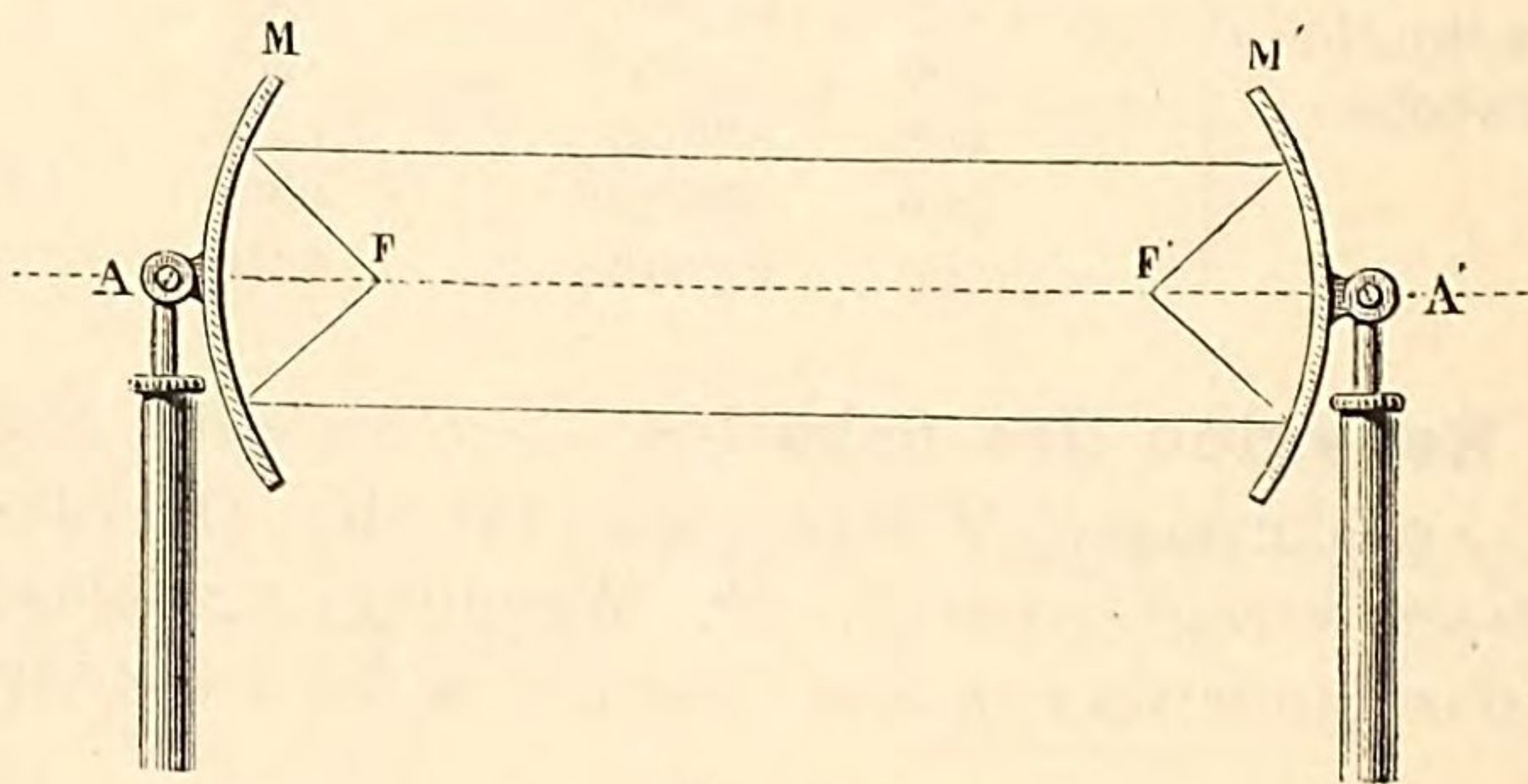


Fig. 38.

Brennpunkt F' , so erscheint das Bild derselben im anderen Brennpunkte F , wo man es mit einem Schirme auffangen kann. Wenn man dann an Stelle der Kerze in F eine Taschenuhr hält, deren Ticken bereits in einer Entfernung von 1—2 m nicht mehr zu hören ist, so vernimmt man das Ticken wieder sehr deutlich, wenn man das Ohr an den Punkt F' bringt.¹⁾

Echo, Resonanz. — Eine Folge der im Verhältniss zu den Lichtwellen ungeheuren Grösse der Schallwellen ist, wie wir späterhin sehen werden, die Thatsache, dass Unebenheiten, welche einen Spiegel in optischer Beziehung völlig untauglich machen würden, auf die Reflexion des Schalles ohne merklichen Einfluss bleiben. Daher geben Mauern, Berge, Baumgruppen gute Spiegel für den Schall ab.²⁾

Bestimmte Gewölbeformen zeigen in Folge der nach den geometrischen Gesetzen bestimmten Reflexion des Schalles eigenthümliche Erscheinungen. Im Musée des antiques gestattet ein elliptisches

¹⁾ An Stelle des Ohres kann man auch, wie wir bald sehen werden, eine empfindliche Flamme verwenden.

²⁾ Die Oberfläche des Wassers reflectirt den Schall ausgezeichnet; alle Schiffer wissen es, dass die Stimme auf dem Wasser viel weiter trägt, als auf dem Lande.

Gewölbe, in dessen Brennpunkten zwei grosse Vasen stehen, den Personen, die abwechselnd in diese Vasen sprechen und horchen, sich mit leiser Stimme zu unterhalten, ohne dass benachbarte

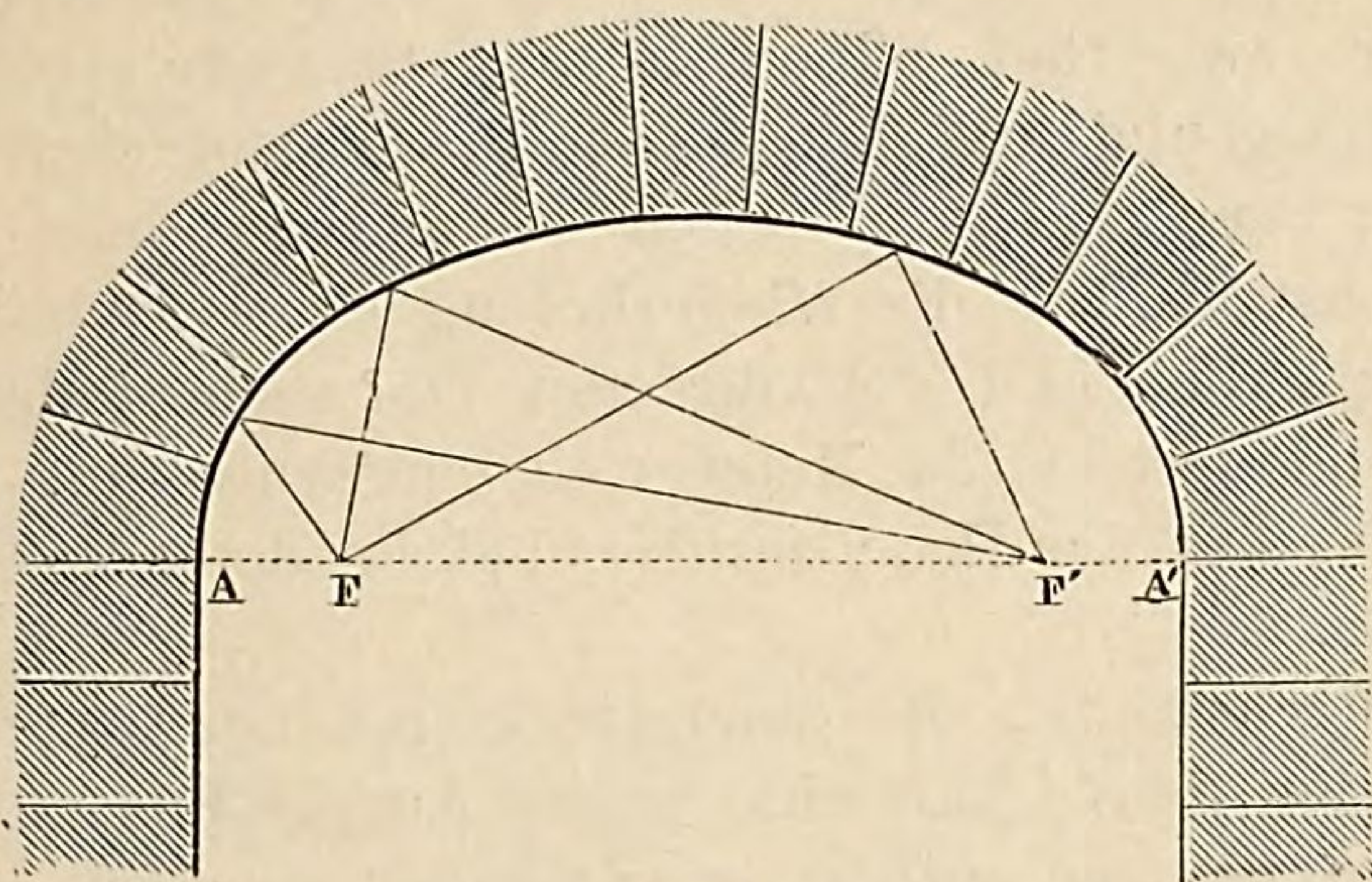


Fig. 39.

Personen etwas hören, und an einer bestimmten Stelle des Gewölbes vom Pantheon genügt der Schlag eines Spazierstockes gegen einen Rockzipfel, um einen betäubenden Lärm hervorzubringen.

In jedem geschlossenen Raume muss eine Reflexion des Schalles stattfinden; dies ist auch thatsächlich der Fall. Aber einerseits kann wegen der Nachwirkung der Eindrücke das Ohr im Allgemeinen den reflectirten Ton vom directen nur dann unterscheiden, wenn zwischen diesen beiden ein Zeitraum von mindestens $\frac{1}{10}$ Secunde liegt; in Folge dessen muss, damit eine Wiederholung des Tones, ein Echo, bemerkbar wird, der reflectirende Gegenstand mindestens 17m entfernt sein, damit der Ton für den Hin- und Rückweg wenigstens $\frac{1}{10}$ Secunde gebraucht; ist dies nicht der Fall, dann tritt nur *Resonanz* auf. Andererseits hat die Beschaffenheit der reflectirenden Wand selbst einen grossen Einfluss: Dicke Gewebe vernichten den Ton, elastische Holztäfelungen dagegen reflectiren ihn und fügen noch die Wirkung ihrer eigenen Schwingungen hinzu; der Ton wird in diesem Falle verlängert und verstärkt. In einem Versammlungssaale kann durch diese doppelte Wirkung die Stimme des Redners wesentlich unterstützt werden, dagegen beeinträchtigt eine zu stark ausgebildete Resonanz die Verständlichkeit der Rede.¹⁾ Es giebt eine Kirche, in welcher die Stimme des Predigers nur einmal im Jahre zu ver-

¹⁾ Die Einrichtung, welche man einem Saale zu geben hat je nach seinen Dimensionen und nach dem Zwecke, dem er dienen soll, ist eine der schwierigsten Fragen der Architectur (vgl. Lachez, *Acoustique et optique des salles de réunion*; Paris 1879.

stehen ist, nämlich zu Weihnachten, wo die Gewölbe mit Schmuck bedeckt sind, der das gewöhnliche Schallen abschwächt.

Ein 17 Meter entfernter Gegenstand erzeugt nur bei einem sehr kurzen Tone ein Echo, nicht aber beim Sprechen. Da man nämlich nur etwa fünf Silben in der Secunde deutlich aussprechen vermag und in Folge dessen das Aussprechen einer Silbe ungefähr $\frac{1}{5}$ Secunde in Anspruch nimmt, so muss der reflectirende Gegenstand, um die Wiederholung eines articulirten Lautes klar wiederzugeben und den directen Ton nicht dabei zu beeinträchtigen, mindestens 34 Meter weit entfernt sein. Bei dieser Entfernung ist also das Echo *einsilbig*, bei der doppelten Entfernung *zweisilbig* u. s. f.

Zwei Gegenstände, die einander gegenüberstehen, wie zwei Spiegel, werden den Schall eine grosse Anzahl Male zurückwerfen können, ohne dass er aufhört, vernehmbar zu sein. Diese *mehrfachen Echos* sind nicht selten; eines der bemerkenswerthesten ist das der Villa Simonetta bei Mailand; einen Pistolenschuss, den man dort aus einem der Fenster des inneren Hofes abfeuert, hört man 40—50 Mal.

Luft-Echo; akustistische Undurchdringlichkeit der Atmosphäre. — Eine interessante Art des Echos beobachtete Tyndall¹⁾ am Kap South-Foreland in der Nähe von Dover bei Gelegenheit von Versuchen, welche er anstellte, um die Tragweite von Tonsignalen an der Küste bei nebligem Wetter zu studiren. Diese Versuche ergaben, ebenso wie diejenigen von Henry²⁾ in Amerika, ganz eigenthümliche Resultate: Eine in optischer Beziehung vollkommen durchsichtige Atmosphäre kann nämlich für Töne fast undurchdringlich sein. In der That ist es einleuchtend, dass beträchtliche, wenn auch dem Auge nicht erkennbare Massen von Dampf, die sich aus dem Meere erheben, die Fortpflanzung des Schalles verhindern, indem sie in der Luft ungleichartige Schichten hervorbringen, an deren Grenzflächen der Schall theilweise reflectirt wird. Um diese Erklärungsweise zu prüfen, stellte sich Tyndall an dem Fusse des Felsens auf, der die Signalapparate trug, und fand in der That, dass ein starkes Echo entstand. Er stellte dann in seinem Laboratorium entscheidende Versuche an, von denen wir den folgenden anführen wollen, welcher leicht zu wiederholen ist. Auf der einen Seite eines Gasbrenners, der die Gestalt eines rechteckigen Rostes hat (Fig. 40), befindet sich eine kleine Zungenpfeife,

¹⁾ Tyndall, Phil. Trans.; 1874 und On Sound, 284; 4. Ed. London, Longmans, 1883.

²⁾ Henry, Report of the Lighthouse Board of U. S. for the year; 1874.

auf der anderen Seite eine empfindliche Flamme. Ist das Gas noch nicht angesteckt, so zuckt die empfindliche Flamme, wenn man die Pfeife anbläst; zündet man aber das Gas an, dann beruhigt sich die Flamme wieder; dagegen fängt nun eine zweite, hinter der Pfeife stehende Flamme, welche von der directen Schallwelle

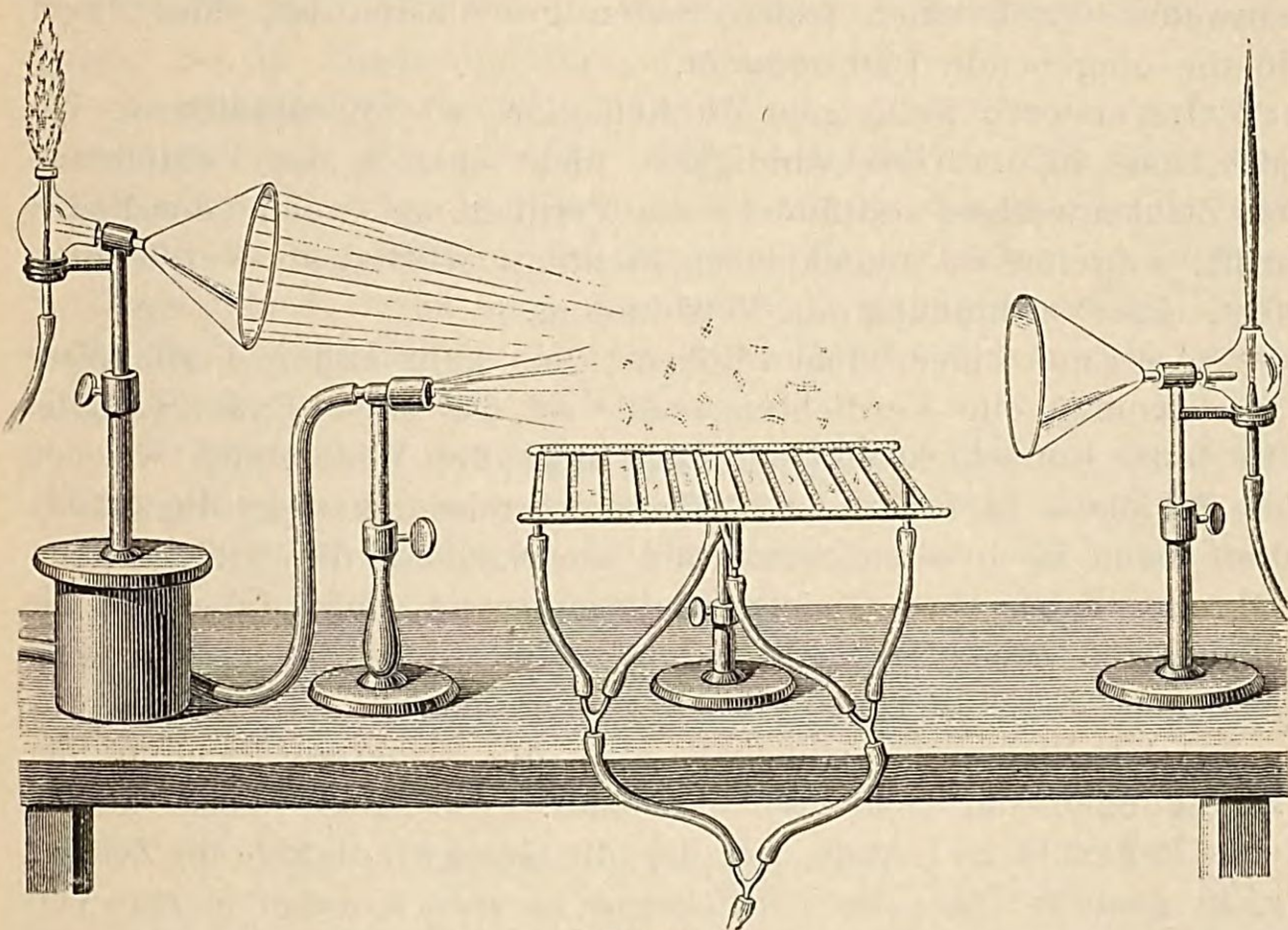


Fig. 40.

nicht erreicht werden kann, stark zu zucken an, während sie in Ruhe blieb, so lange das Gas nicht brannte. Die heisse Luftschicht, welche sich über dem Roste erhebt, bildet also ein Hinderniss für den Schall und wirft ihn zurück, genau wie bei den Versuchen in freier Luft.

Es ist interessant, hiermit die Beobachtungen zu vergleichen, welche derselbe Gelehrte im Jahre 1859 in Bezug auf die vollständige Fortpflanzung des Schalles durch einen Schneesturm auf dem Eismeere anstellte. Der Schall dringt mit ausserordentlicher Leichtigkeit durch die Zwischenräume der festen Körper; er durchdringt leicht zwölf über einander geschichtete seidene Tücher, während schon ein einziges ihn vollständig aufhält, wenn es vorher in Wasser getaucht wurde und so einen zusammenhängenden Schirm bildet.

Die *Sprachrohre* und die *Hörrohre* sind unmittelbare Anwendungen von der Reflexion des Schalles, zu der ausserdem noch Wirkungen der Resonanz hinzutreten.

Reflexion des Schalles am Ende eines cylindrischen Rohres. — Unter den zahlreichen Erscheinungen der Schallreflexion müssen wir eine besonders wichtige genauer untersuchen, zumal sie unter einfachen und genau bestimmten Bedingungen stattfindet; es ist dies die Reflexion einer ebenen Welle am Ende einer Röhre, die entweder durch einen festen Boden geschlossen ist, oder direct in die umgebende Luft mündet.

Im ersteren Falle geht die Reflexion, wie gewöhnlich, so vor sich, dass in der Geschwindigkeit, nicht aber in der Verdichtung ein Zeichenwechsel stattfindet; eine Verdichtung, welche den Boden trifft, schreitet in umgekehrter Richtung wieder als Verdichtung fort, eine Verdünnung als Verdünnung.

Am Ende einer offenen Röhre treten ganz andere Verhältnisse auf. Kommt eine Verdichtungswelle an das offene Ende, so findet die letzte Luftschicht vor sich nicht mehr den Widerstand, welchen die Schichten im Innern nach einander erfahren hatten; die äussere Luft kann nach allen Seiten hin ausweichen; die Schicht überschreitet daher ihre Gleichgewichtslage und zieht dabei die benachbarten Schichten nach und nach mit sich. Es entsteht daher eine neue Erschütterung, eine Verdünnungswelle, die sich in umgekehrter Richtung fortpflanzt, aber die bisherige Richtung der Bewegungen der Schichten beibehält. Auf diese Weise kommt eine Reflexion zu Stande, bei der die Geschwindigkeit ihr Zeichen nicht geändert hat; die Verdichtung ist jedoch dabei in eine Verdünnung übergegangen.

Übrigens zieht die eine dieser Erscheinungen die andere nach sich; von dem Augenblicke an, wo x in $-x$ übergeht, wechselt $-\frac{du}{dx}$ sein Zeichen, während $\frac{du}{dt}$ es behält, und umgekehrt.

Bei der Reflexion am Boden einer geschlossenen Röhre, den wir als absolut fest voraussetzen, muss die letzte Luftschicht der Bedingung $u = 0$ oder $\frac{du}{dt} = 0$ genügen; dies kann nur eintreten, wenn sich über die ursprüngliche directe Bewegung eine Bewegung im umgekehrten Sinne lagert, welche dieselbe Amplitude besitzt, dagegen das umgekehrte Vorzeichen der Geschwindigkeit, und deren Verdichtung daher dasselbe Vorzeichen hat, wie bei der ersten Bewegung.

Am freien Ende einer offenen Röhre ist u keiner Bedingung unterworfen, ebensowenig $\frac{du}{dt}$; der Druck wird sich indessen von dem herrschenden Atmosphärendrucke nur wenig unterscheiden, die Verdichtung ist also sehr klein, und man hat näherungsweise

$\frac{du}{dx} = 0$. Über die directe Bewegung muss sich also eine umgekehrt gerichtete Bewegung überlagern, und zwar so, dass an dem Ende die von der einen Bewegung hervorgerufene Verdichtung die von der anderen erzeugte Verdünnung aufhebt; mit anderen Worten: Es muss hier für die Verdichtung ein Zeichenwechsel eintreten, für die Geschwindigkeit dagegen nicht.

Analytisch lässt sich die Entwicklung bei einer begrenzten Röhre auf den schon früher (344) betrachteten Fall einer unbegrenzten Röhre zurückführen; man hat zu diesem Zwecke nur über den Anfangszustand des überschüssigen Stückes derartig zu verfügen, dass, wenn man das ganze System sich selbst überlässt, die physikalischen Bedingungen für die Grenzen in jedem Augenblicke von selbst erfüllt sind.

Wir betrachten beispielsweise eine Röhre, die in der einen Richtung durch eine feste Wand begrenzt ist; dann muss die der letzteren benachbarte Luftschicht in Ruhe bleiben. Zählt man also die positiven x von dieser festen Ebene aus nach der Seite, nach welcher die direkte Erschütterung stattfindet, so muss jederzeit für $x=0$ auch $\frac{du}{dt} = 0$ sein, oder, nach dem allgemeinen Ausdrucke für die Geschwindigkeit (344)

$$f'(at) - F'(-at) = 0;$$

da diese Gleichung für jedes beliebige t gelten soll, so lässt sie sich auch schreiben

$$F'(-z) = f'(z),$$

und, wenn man z mit $(-z)$ vertauscht:

$$f'(-z) = F'(z).$$

Somit sind die beiden Functionen f' und F' für sämtliche negativen Werthe der Variabeln bekannt, und die Aufgabe ist gelöst. Man kann also die feste Wand unberücksichtigt lassen, wenn man der Gasmasse in demjenigen Theile der Röhre, der den negativen Abscissen entspricht, eine Bewegung ertheilt denkt, welche den beiden obigen Bedingungen genügt. Diese Bedingungen ziehen unmittelbar eine Folgerung nach sich: Berechnen wir für einen beliebigen Querschnitt des negativen Theiles die Geschwindigkeit und die Verdichtung, so ergeben die allgemeinen Formeln durch Einführung von $(-x)$ an Stelle von x :

$$v_1 = af'(-x + at) - aF'(-x - at) = aF'(x - at) - af'(x + at) = -v$$

und

$$\gamma_1 = -f'(-x + at) - F'(-x - at) = -F'(x - at) - f'(x + at) = \gamma.$$

Ertheilt man also den rechts und links vom Coordinatenanfangspunkt gleichweit entfernten Querschnitten gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeiten und identische Verdichtungen, so wird, was leicht vorauszusehen war, der am Anfangspunkte befindliche Querschnitt stets in Ruhe bleiben.

Fassen wir nun auf der positiven Seite eine zwischen d und $(d + l)$ liegende Erschütterung ins Auge, so müssen wir uns dazu auf der negativen Seite zwischen $-d$ und $-(d + l)$ eine Erschütterung mit gleich grossen aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten und gleichen Verdichtungen vorstellen. Jede dieser Erschütterungen bringt eine Welle hervor, die sich nach dem Anfangspunkte zu mit der Geschwindigkeit a fortpflanzt. Beide Wellen kommen gleichzeitig dort an und durchdringen sich im Verlaufe ihrer Fortpflanzung gegenseitig. Hieraus folgt, dass bei einer begrenzten Röhre der Vorgang derselbe ist, als wenn die directe Welle bei ihrem Auftreffen auf die feste Wand zurückgeworfen würde und sich über diejenigen Theile lagerte, welche noch auf dem Wege gegen die Wand begriffen sind; wenn das zweite Ende der positiven Welle die Wand erreicht, hat sich die ganze Welle umgekehrt und ist im Begriffe, in entgegengesetzter Richtung zu wandern.

Auf dieselbe Weise kann man leicht den Fall behandeln, dass sich eine Röhre frei in die Atmosphäre öffnet; der Vorgang spielt sich dann so ab, als ob die directe Welle an der äusseren Luft diejenige Art von Reflexion erführe, die wir früher bereits bestimmt haben.

351. Brechung des Schalles. — Beim Übergang von einem Medium zum anderen wird der Schall, eben so wie das Licht, nach dem Descartes'schen (Snellius'schen) Gesetze gebrochen, nach welchem der auf Luft bezogene Brechungsexponent eines Körpers durch das Verhältniss der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Luft und in dem betreffenden Körper bestimmt wird. Sondhauss¹⁾ lieferte dafür den experimentellen Beweis mittelst einer Hohllinse aus Collodium, die mit Kohlensäure gefüllt war; da dieses Gas schwerer ist, als Luft, musste sich ein Schall, der von einem Punkte S der Linsenachse ausging, im conjugirten Punkte F wieder vereinigen, wo man ihn entweder mit dem Ohre oder mittelst einer mit Sand bedeckten Membran B nachweisen konnte (Fig. 41).

¹⁾ Sondhauss, Pogg. Ann., **135**, 378; 1852.

Hajeck¹⁾ stellte genauere Messungen mit Hülfe eines Hohlprismas an, welches den in der Optik zur Untersuchung der Brechungsexponenten von Gasen verwendeten ähnlich war. Die Röhre desselben durchsetzte die Mauer, welche zwei Räume trennte; in dem einen war die Schallquelle aufgestellt, und zwar gegenüber dem Rohre, das auf dieser Seite mit einer zur Achse normalen

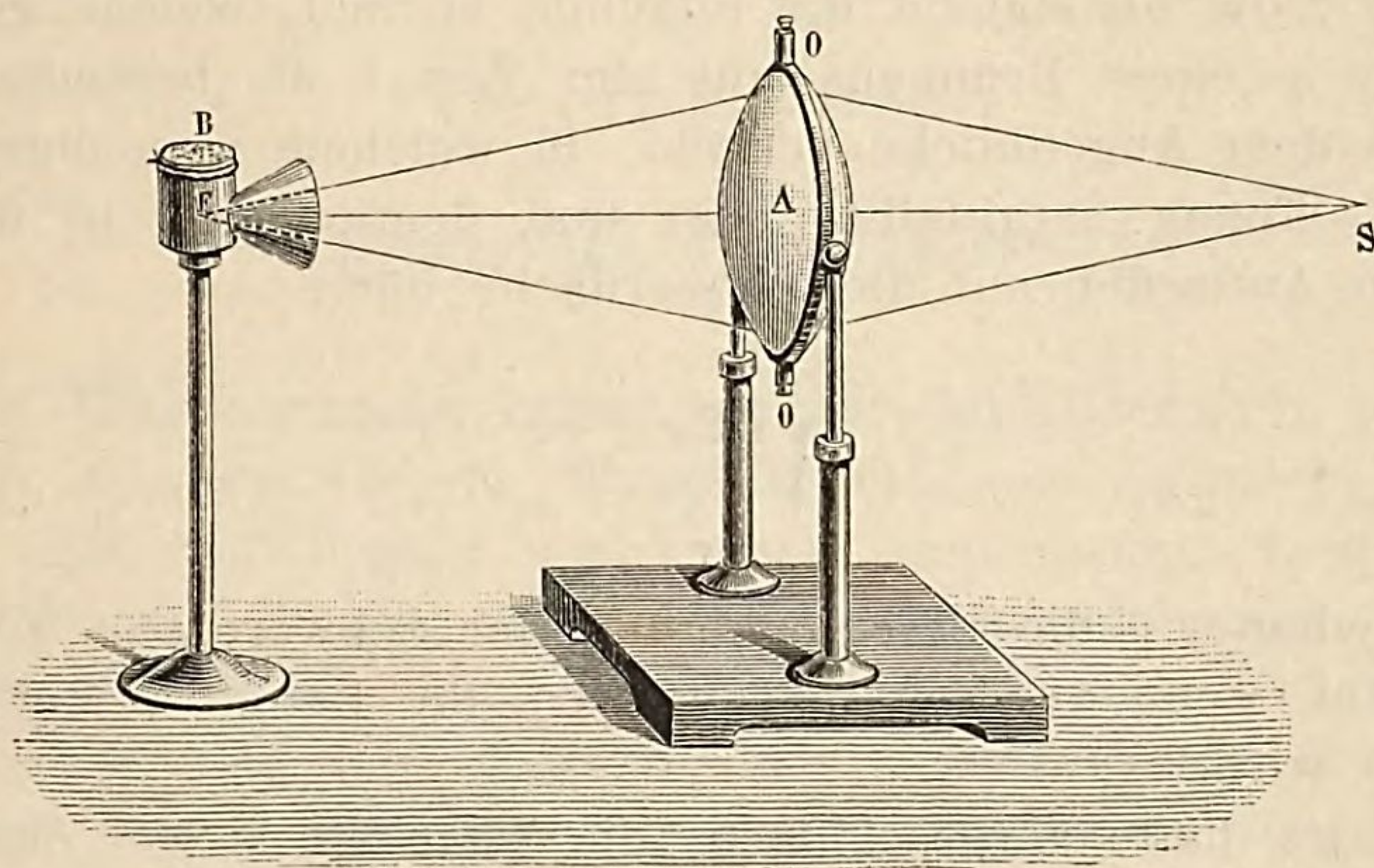


Fig. 41.

Membran geschlossen war; in dem anderen befand sich der Beobachter, und zwar auf einem Theilkreise, der auf dem Fussboden gezeichnet war. Es musste nun die Richtung des gebrochenen Strahles für eine bestimmte Neigung der Austrittsmembran bestimmt werden, wenn die Röhre mit einem bekannten Fluidum gefüllt war. Die folgende Tafel enthält einige der gewonnenen Resultate; es ist ersichtlich, dass das Wasser, welches nahezu dieselbe Fortpflanzungsgeschwindigkeit besitzt, wie der Wasserstoff, auch nahezu dieselben Ablenkungen hervorbringt.

	Einfallswinkel	Brechungswinkel	
		Beobachtet	Berechnet
Wasser	35° 50'	7° 40'	7° 58'
	25° 00'	5° 40'	5° 37'
Wasserstoff	35° 50'	8° 00'	8° 50'
	25° 00'	7° 00'	6° 22'
Ammoniak	41° 00'	29° 20'	30° 22'
	35° 50'	25° 00'	26° 50'
Kohlensäure	35° 50'	49° 50'	48° 19'
	25° 00'	33° 20'	32° 33'
Schweflige Säure	35° 50'	62° 30'	61° 22'
	25° 00'	40° 00'	39° 24'

¹⁾ Hajeck, Nuovo Cimento; 1857 und Ann. de chim. et de phys. (3), 54, 438; 1859.

352. Anwendungen. — Da man die Schallgeschwindigkeit in der Luft kennt, kann man sich derselben zur Abschätzung einer Entfernung bedienen. So bestimmt man die Zeit zwischen dem Blitz und dem Donner oder zwischen dem Aufblitzen und dem Knall eines Geschützes; dabei entspricht jede Secunde bei gewöhnlicher Temperatur einer Entfernung von ungefähr 340 Metern.

Von Newton stammt die folgende Formel, welche gestattet, die Tiefe x eines Brunnens aus der Zeit t zu berechnen, die zwischen dem Augenblicke vergeht, in welchem man einen Stein von der Öffnung herabfallen lässt und demjenigen, in welchem man sein Auftreffen auf die Wasserfläche hört:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{a},$$

hierin bedeutet g die Beschleunigung der Schwere (ca. 9,81) und $a = 340$ m, wenn die Zeit in Secunden, die Länge in Metern ausgedrückt wird.

Arago hatte vorgeschlagen, die Tiefe eines Sees oder eines Meeres durch die Rückkehr des auf dem Boden reflectirten Schalles zu messen. Colladon stellte nach dieser Richtung hin auf dem Genfer See eine Reihe von Beobachtungen an, aus denen hervorgeht, dass ein starker Ton unter Wasser auf Entfernungen von mehr als 100 Kilometer zu hören ist, aber er äussert sich nicht über die Möglichkeit, die Tiefe mittelst des Echos am Grunde zu messen.

Viertes Capitel.

Interferenz des Schalles.

353. Übereinanderlagerung der Schallwellen. — Schon mehrfach konnten wir die Wasserwellen zum Vergleiche heranziehen. Ein ins Wasser geworfener Stein bringt kreisförmige Wellen hervor, die sich über die Oberfläche verbreiten, bis sie an einem Hindernisse zurückprallen, ein getreues Bild von der Fortpflanzung und der Reflexion der Schallwellen. Wirft man gleichzeitig zwei Steine ins Wasser, so erhält man zwei Wellensysteme, die sich durchkreuzen und gleichwohl ihren Weg verfolgen, und zwar ein jedes von ihnen ganz so ruhig und regelmässig, als wenn das andere nicht vorhanden wäre. Ob es sich hierbei um grosse, durch den Sturm aufgewühlte Wogen handelt, oder um die Furche, welche ein Schiff hinterlässt, oder um das kleine Wellengekräusel, das von der Flügelspitze eines Vogels herrührt, stets wird das Auge ohne Schwierigkeit jede beliebige dieser Bewegungen verfolgen können, denn jedes System entwickelt sich genau ebenso, wie wenn auf der Flüssigkeitsoberfläche nicht auch noch gleichzeitig andere ähnliche Bewegungen vorhanden wären.

Pflanzen sich also zwei Wellensysteme gleichzeitig fort, so werden die Erhebungen und Senkungen des einen derselben über die durch das andere bereits in Bewegung gesetzte Oberfläche ebenso gross sein, wie diejenigen, welche sich auf vollkommen ruhiger Oberfläche ausbilden würden; die gesammte Erhebung und Senkung über bzw. unter eine bestimmte Horizontalebene ist demnach in jedem Augenblicke gleich der algebraischen Summe der Verschiebungen, welche jedes System für sich allein hervorbringen würde. Wenn sich über die von dem ersten System herrührende Erhebung eine ganz gleiche Erhebung des zweiten Systems lagert, so wird die Gesammthöhe des Wassers über dem ursprünglichen Niveau das Doppelte betragen; begegnet sich dagegen eine Erhebung des ersten Systems mit einer gleich grossen

Senkung des zweiten, so bleibt das ursprüngliche Niveau ungeändert.

In ganz gleicher Weise findet, wenn mehrere Systeme von Schallwellen gleichzeitig in einem und demselben Medium vorhanden sind, in jedem Punkte und zu jeder Zeit eine Addition der kleinen Bewegungen statt, welche durch jedes einzelne der Systeme für sich hervorgerufen werden, mit anderen Worten, es tritt die Erscheinung der *Interferenz* auf.

354. Princip der Interferenz. — Betrachten wir zwei identische Tonquellen A und B , d. h. solche, welche in jedem Augenblicke gleich grosse und in derselben Richtung erfolgende Schwingungsbewegungen hervorrufen, dann ist klar, dass in allen

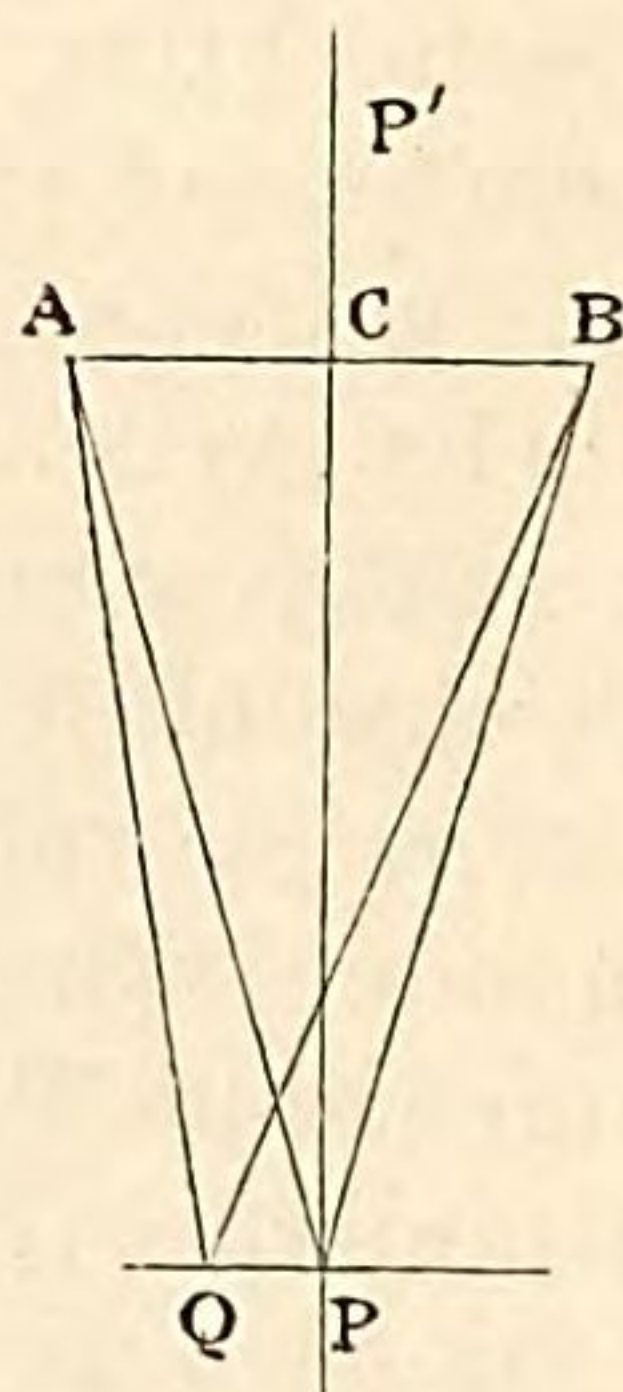


Fig. 42.

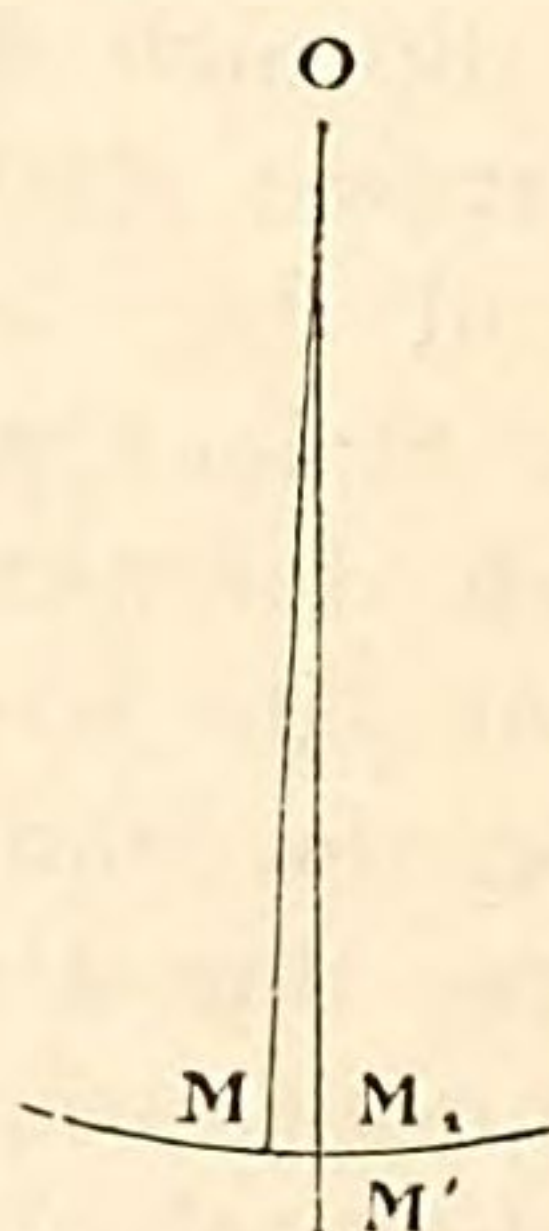


Fig. 43.

Punkten der Ebene PP' , welche auf der Mitte der Geraden AB senkrecht steht, die von beiden Wellensystemen hervorgerufenen Bewegungen in jedem Augenblicke übereinstimmen; Geschwindigkeit wie Verschiebung wird grösser sein, als wenn nur eine einzige Tonquelle vorhanden wäre; demnach werden wir auch eine grössere Intensität erhalten (326).

In einer beliebigen, durch AB gelegten Ebene wird die Geschwindigkeit und demnach auch die Intensität eine Reihe von festen Maxima und Minima aufweisen.

Um sich von allen Einzelheiten der Erscheinung genau Rechenschaft ablegen zu können, genügt die Annahme, dass sich die schwingende Bewegung, welche dem Schalle zu Grunde liegt, auf unendlich viele Arten in genau entgegengesetzte Halbschwingungen zerlegen lässt. Betrachtet man nämlich (Fig. 43) zwei in hinreichender Entfernung vom Erschütterungscentrum O befindliche Punkte M und M' , die nahe bei einander auf demselben Strahle

oder auf sehr nahe benachbarten Strahlen liegen, so können die Veränderungen, welche die Bewegung in O in den Punkten M und M' hervorruft, als identisch angesehen werden; die Geschwindigkeiten v und v' in diesen Punkten werden dann in jedem Augenblicke gleich und parallel sein und dieselbe Richtung haben, wenn der Unterschied der Abstände OM' und OM vom Erschütterungsmittelpunkte ein gerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt; dagegen werden die Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke zwar gleich und parallel, aber entgegengesetzt gerichtet sein, wenn die Differenz der Entfernungen OM' und OM ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt; mit anderen Worten:

$$\text{bei } OM' - OM = 2k \frac{\lambda}{2} \quad \text{ist } v' = v,$$

$$\text{bei } OM' - OM = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{ist } v' = -v,$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl $0, 1, 2, 3 \dots$ bedeutet.

Wenn also die von zwei gleichen Tonquellen A und B (Fig. 42) ausgehenden Bewegungen in einem Punkte Q zusammentreffen, so vermehren oder vermindern sich die Geschwindigkeiten, je nachdem die Differenz $QB - QA = 2k \frac{\lambda}{2}$ oder $= (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$ ist. Der geometrische Ort der Maxima in der Ebene APQ wird also durch die Hyperbelschaar

$$QB - QA = 2k \frac{\lambda}{2}$$

bestimmt (Fig. 44), und derjenige der Minima durch die Hyperbelschaar

$$Q'B - Q'A = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Die zu den Maxima und Minima gehörigen Intensitäten erhält man, wenn man nach der gewöhnlichen Regel die Geschwindigkeiten der beiden Theilbewegungen zusammensetzt und dabei bedenkt, dass die Intensität dem Quadrate der Geschwindigkeiten proportional ist.

Liegt der Punkt Q in genügender Entfernung von A und B , so dass man die Geraden QA und QB als nahezu parallel betrachten darf, so addiren sich die Geschwindigkeiten algebraisch, und da sie, absolut genommen, den gleichen Werth besitzen, so folgt, dass die Intensität an den Punkten der Maxima 4 beträgt, an den

Punkten der Minima 0, während sie überall nur 2 betragen würde, wenn die resultirende Intensität die arithmetische Summe der Theilintensitäten darstellte. Auf diese Weise werden sich also

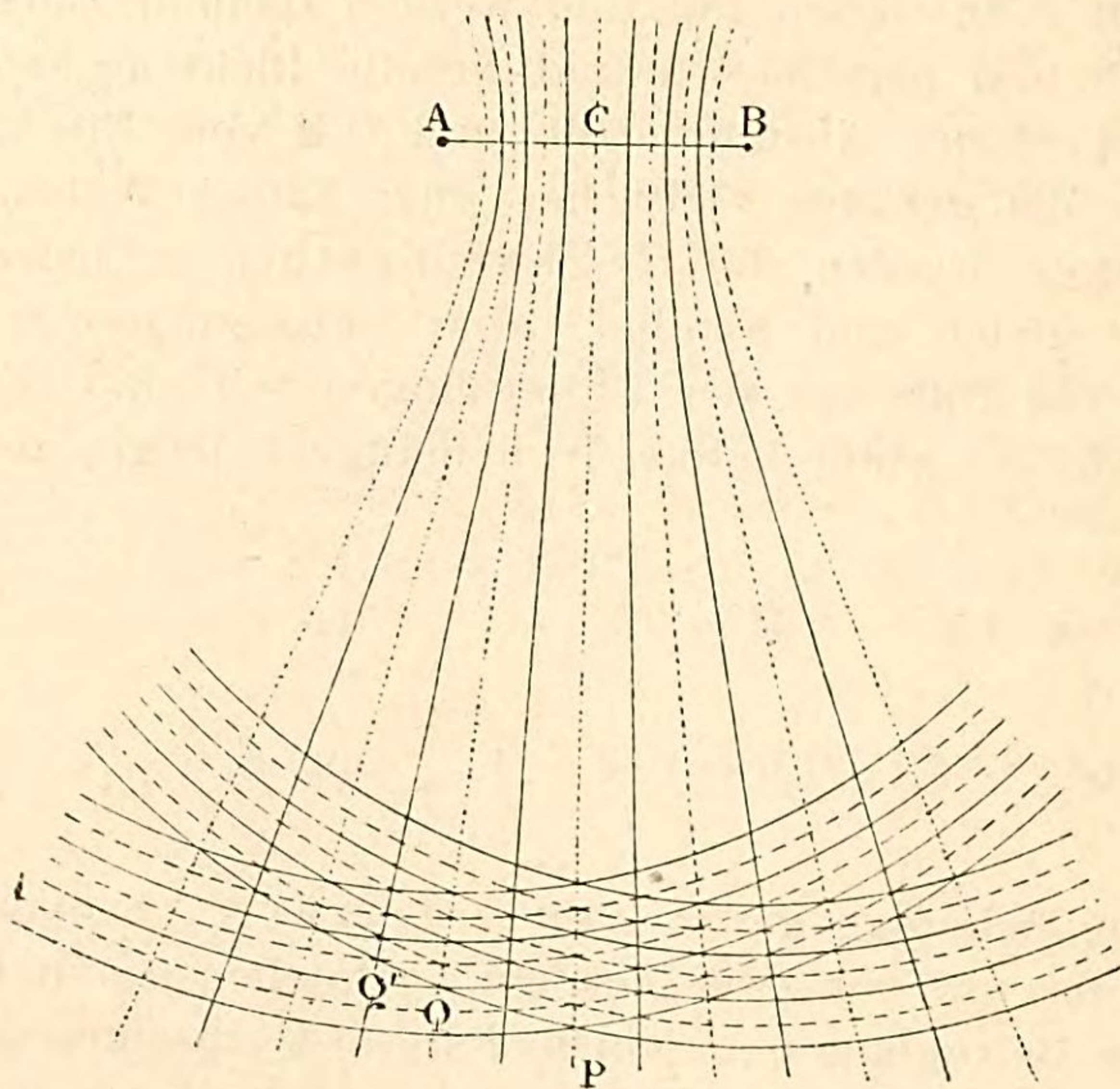


Fig. 44.

zwei Töne, welche von zwei identischen Schallcentren *A* und *B* ausgehen, in bestimmten Punkten des Raumes verstärken, in anderen aufheben, so dass dort Ton zu Ton gefügt Stille ergibt.

355. Experimentelle Bestätigung der Interferenz von Schallwellen. — *Versuche von Despretz; Apparat von Desains.* — Despretz hatte versucht, die Richtigkeit dieser Schlüsse mittelst zweier auf ein und demselben Gebläse angebrachter Pfeifen experimentell nachzuweisen. Desains¹⁾ verwendete dazu einen geeigneteren Apparat: Ein Holzkasten *ABCD*, der im Innern wattirt war, um jede Schallreflexion auszuschliessen, trug senkrecht auf seinem Boden *AB* eine starke Pfeife *S*, welcher die zum Anblasen nöthige Luft durch das Rohr *T* zugeführt wurde, während die Oberseite mit zwei Löchern *O* und *O'* versehen war, die zur Verticalen *S* symmetrisch lagen; dieselben bildeten also zwei identische Tonquellen. Führte man nun oberhalb des Deckels eine kleine, mit Sand bedeckte Membran hin, so gerieth der Sand an den Stellen, wo nach der Theorie ein Maximum liegen sollte, lebhaft in Be-

¹⁾ Desains, *Leçons de physique* 2, 45; Paris, Desobry, 1860.

wegung, während er in der Gegend der Minima nahezu in Ruhe blieb. Befand sich die Membran an einer solchen Stelle, so

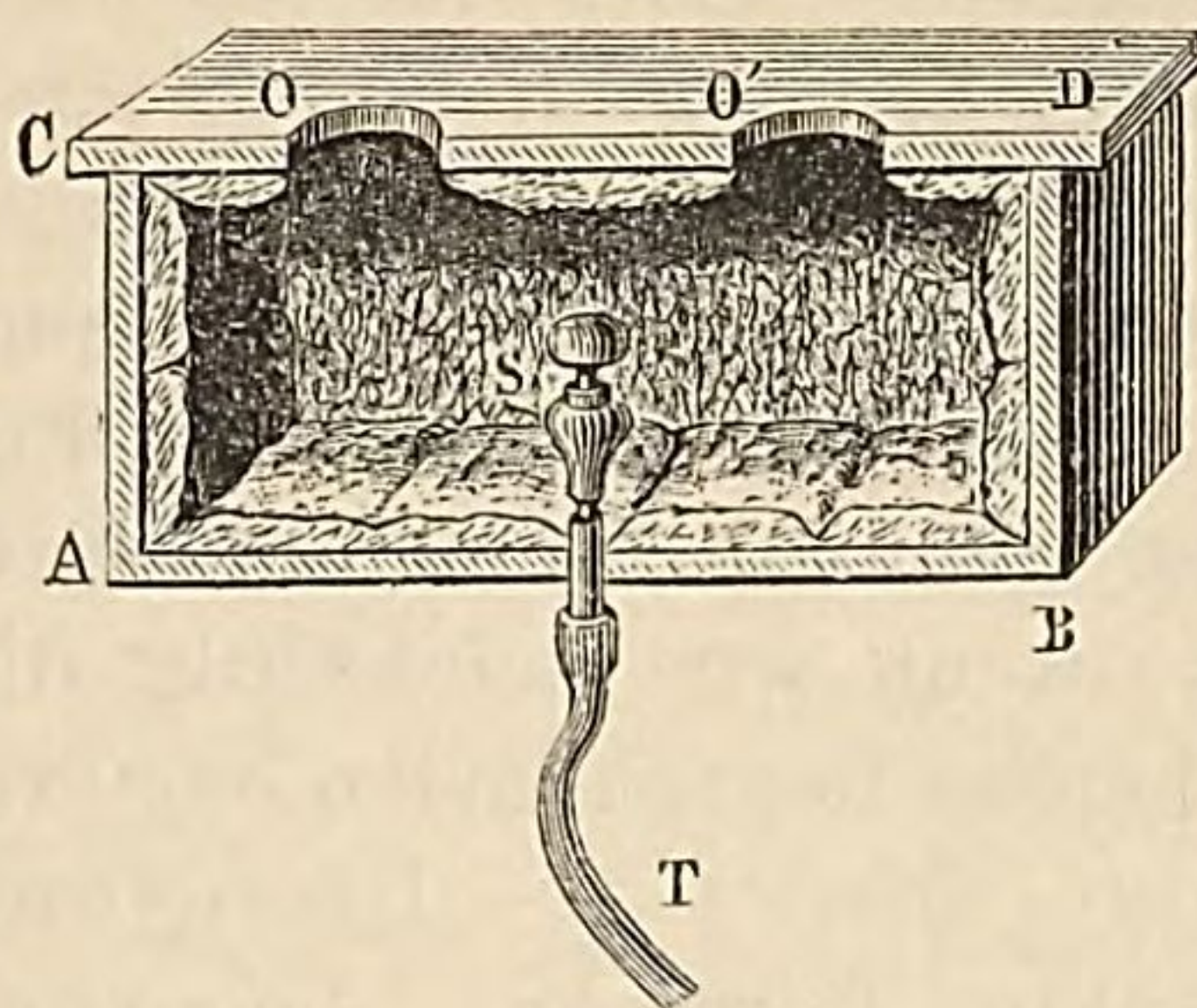


Fig. 45.

brauchte man nur eines der beiden Löcher zu schliessen, um sofort wieder eine Bewegung des Sandes hervorzurufen.

Versuche von Hopkins. — Die schwingenden Platten sind, wie Hopkins¹⁾ gezeigt hat, für derartige Versuche sehr bequem.

Wir verwenden dazu eine Platte *P*, welche sich, in richtiger Weise mit dem Violinbogen angestrichen, in vier schwingende Sektoren theilt, die durch zwei auf einander senkrecht stehende unbewegliche Knotenlinien getrennt werden, sowie ein System von zwei bei *O* und *O'* offenen Röhren *a* und *b*, welche am anderen

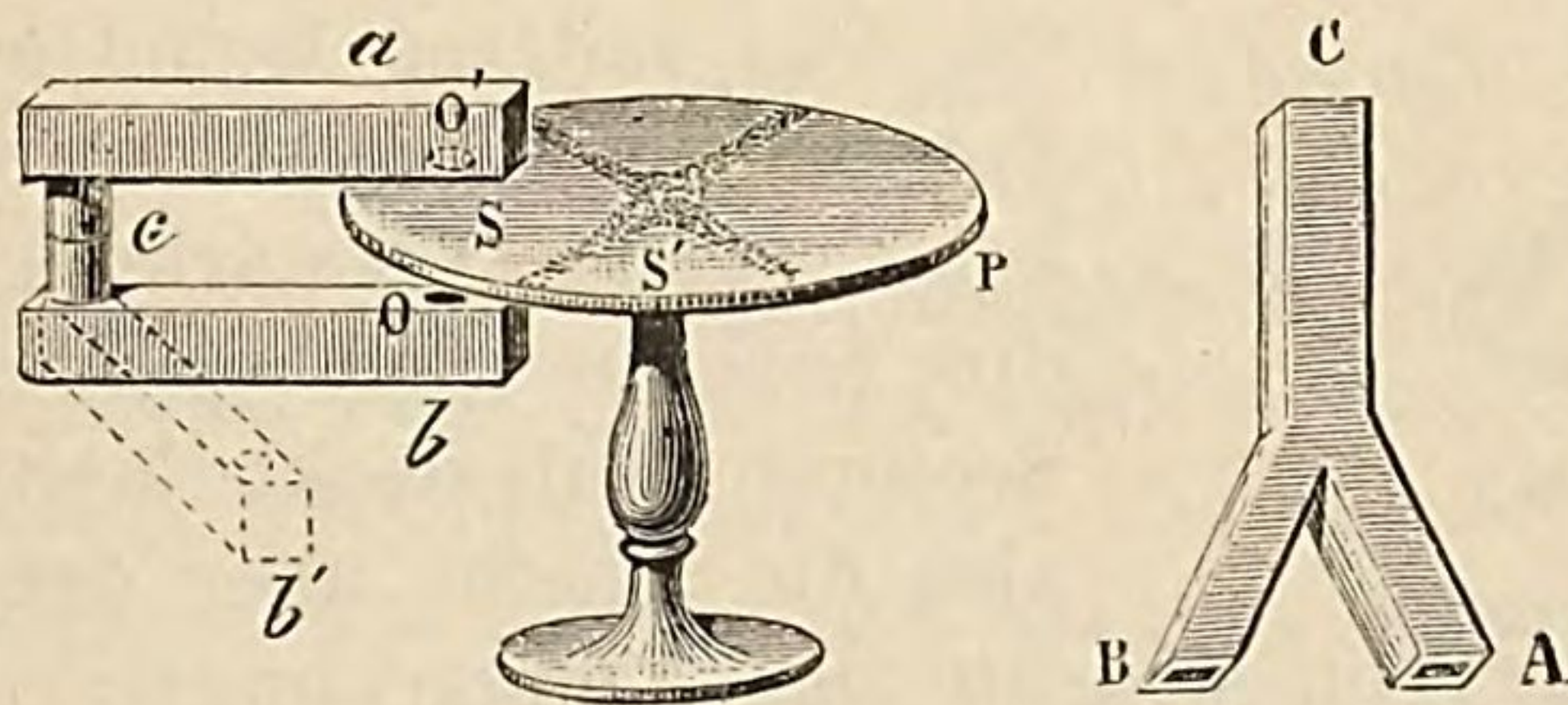


Fig. 46.

Ende durch eine Querröhre verbunden sind, und sich um diese drehen lassen (Fig. 46). Jede der beiden Röhren *a* und *b* ist so justirt, dass sie den Ton der Platte verstärkt. Stellt man die eine dieser Röhren *a* über einen der schwingenden Sektoren *S*, während die andere Röhre seitwärts nach *b'* gedreht ist, so wird der Ton verstärkt; bringt man jedoch die zweite Röhre nach *b* unter die erste, dann nimmt die Kraft des Tones ab. Es ist leicht einzusehen, dass dies der Fall sein muss, denn wenn der Sector *S* nach *O'* zu schwingt, entfernt er sich von *O* und umgekehrt, so

¹⁾ Hopkins, Cambridge Phil. Trans. 5, (2), 231; 1835.

dass die Geschwindigkeiten der Luft in O und O' immer gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sind.

Bei einer schwingenden Platte haben die Bewegungen zweier auf einander folgenden Sektoren S und S' stets entgegengesetzte Richtung: Hebt sich der Sector S , so senkt sich der Sector S' , und umgekehrt. Bringen wir also die eine Öffnung A eines Y-förmigen Rohres, dessen Ton mit dem Eigentone der Platte übereinstimmt, zuerst allein über einen Sector S , so wird der Ton verstärkt, nicht aber, wenn wir gleichzeitig die beiden Öffnungen A und B über die beiden benachbarten Sektoren S und S' halten.¹⁾

*Versuche von Lissajous.*²⁾ — Lissajous wandte dasselbe Princip in sehr eleganter Form an. Angenommen, die Platte A

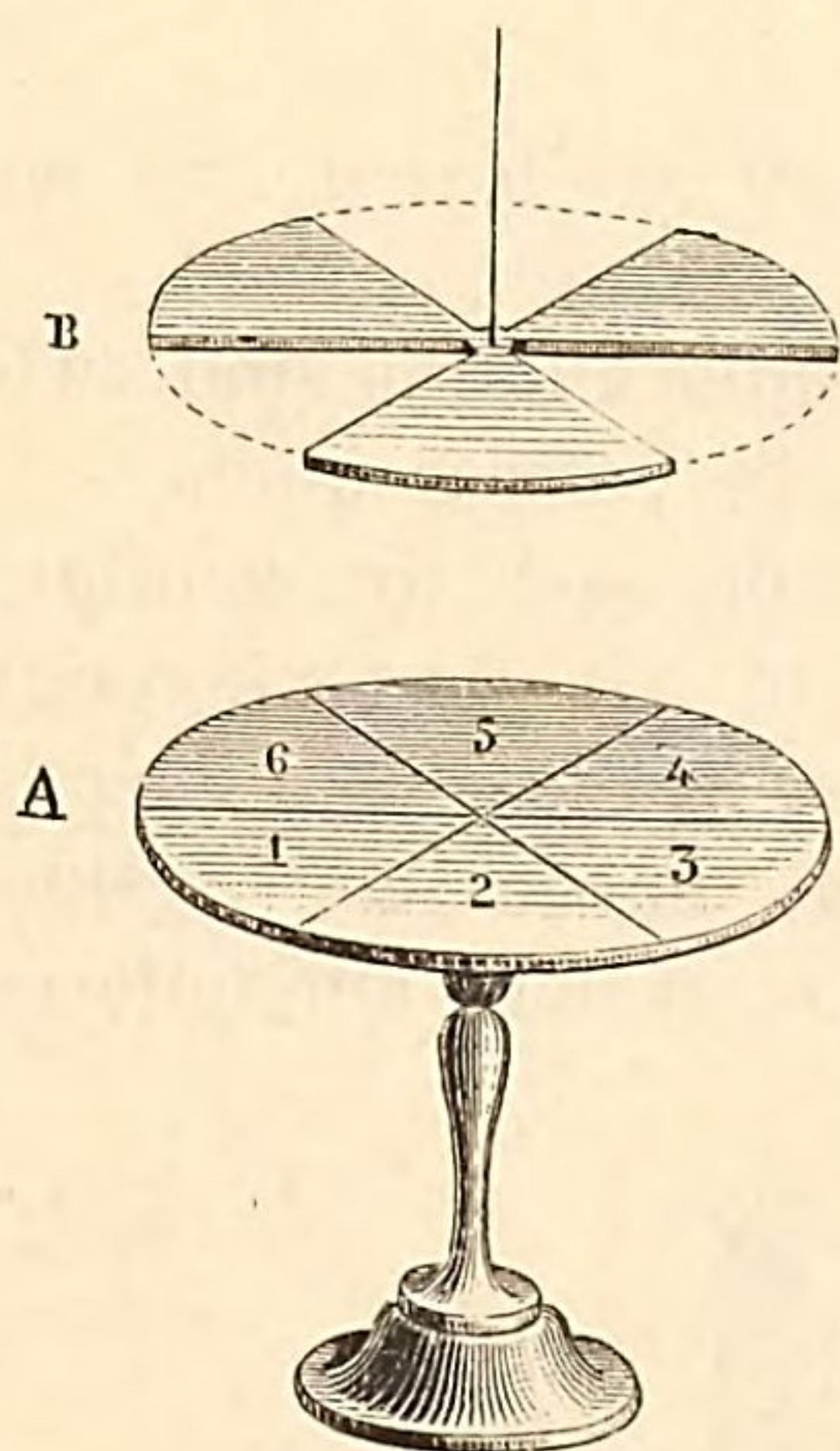


Fig. 47.

schwinde in sechs durch diametrale Knotenlinien getrennten Sektoren, so näherte er dieser Platte eine ebenfalls in sechs gleiche Theile getheilte Scheibe B , von denen aber ein Sector um den anderen weggenommen war. Hält man diese Scheibe so, dass sie auf der Platte genau drei gleiche Sektoren verdeckt, dann wird die übereinstimmende Wirkung der drei unbedeckten Sektoren nicht mehr durch die entgegengesetzte der drei anderen beeinträchtigt und der Ton bedeutend verstärkt; dagegen findet keine solche Verstärkung statt, wenn die Scheibe gleiche Theile von allen Sektoren unbedeckt lässt. Dreht man also die Scheibe über der Platte, so er-

folgt eine Reihe von bedeutenden Verstärkungen, die sich auch dann noch unterscheiden lassen, wenn der Ton der ganzen Platte allein nicht mehr vernehmbar ist. Der Versuch lässt sich sogar einfach derart ausführen, dass man seine beiden Hände zwei gleichschwingenden Sektoren abwechselnd nähert oder sie von ihnen entfernt.

Erscheinungen, die bei einer Stimmgabel auftreten. — Bekanntlich ist die Tonstärke einer frei in der Hand gehaltenen Stimmgabel sehr gering; dies kommt daher, dass die Bewegungen, welche

¹⁾ Man kann auch bei C eine Membran anbringen, auf welcher der Sand, je nach der Stellung der Röhrenarme, in Bewegung gesetzt wird oder in Ruhe bleibt.

²⁾ Lissajous, C. R. 40, 133; 1855.

der Luft von der Gabel mitgetheilt werden, unausgesetzt einander entgegen wirken, da beide Zinken sich gegenseitig nähern und wieder von einander entfernen. Hält man die Gabel nahe ans Ohr oder setzt man sie auf ein Reagenzglas, welches als Resonnator dient, so findet man, dass der Ton an den Stellen *d* und *f* ziemlich stark, bei *c* und *e* wesentlich schwächer ist und auf den Hyperbelarmen *gahibk* ganz verschwindet, wie schon die Gebrüder Weber nachgewiesen haben.¹⁾ Dreht man die Stimmgabel

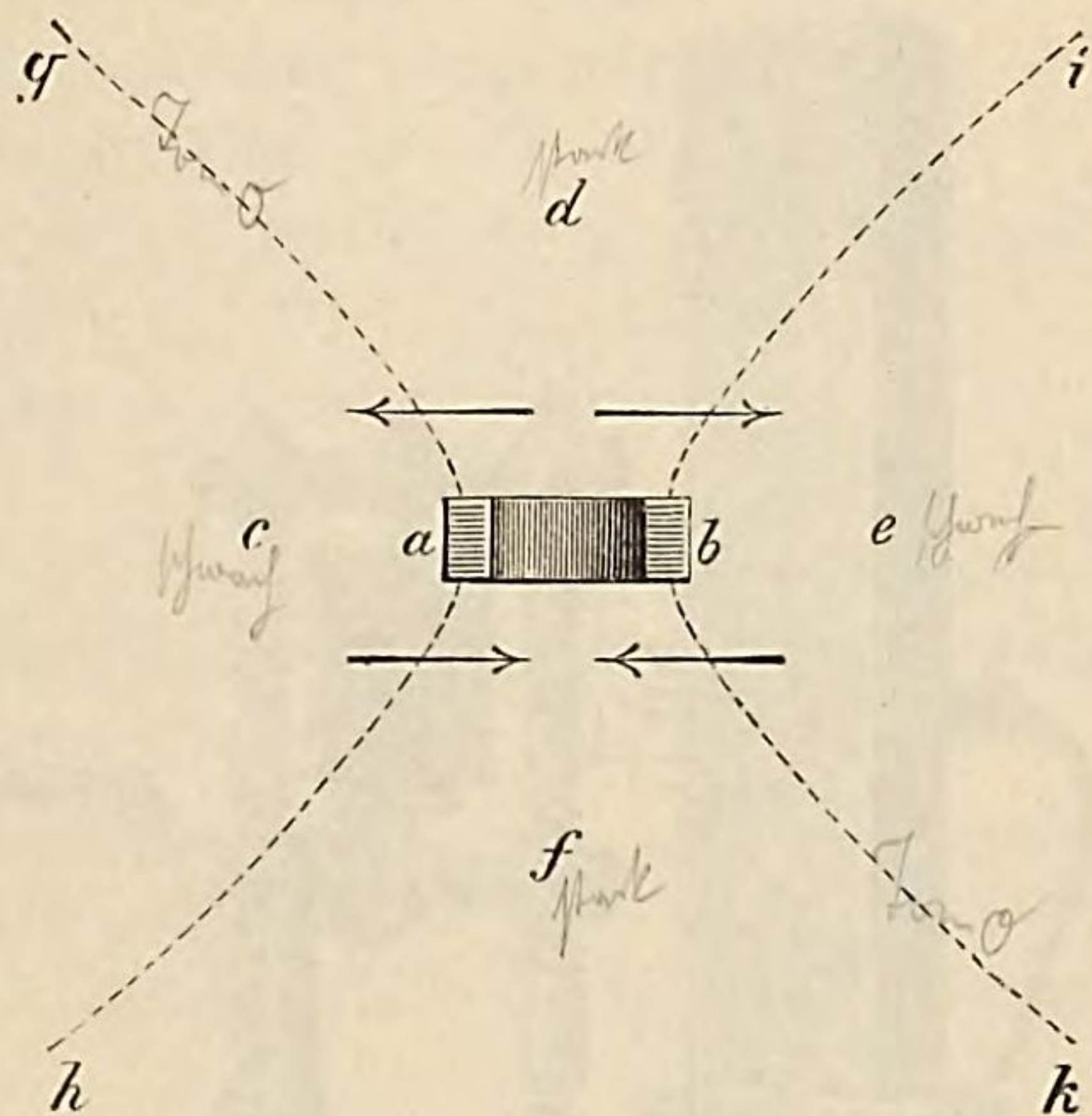


Fig. 48.

um ihre Längsachse, dann folgt eine Reihe von Verstärkungen und Schwächungen, und befindet sie sich in einer solchen Stellung, dass die resultirende Bewegung ausgelöscht ist, so genügt es, über die eine Zinke eine Röhre zu stecken, welche die Schwingungen derselben auffängt, um den Ton wieder entstehen zu lassen. Im Allgemeinen besteht die Wirkung einer solchen Röhre darin, dass sie den Ton verstärkt; der Versuch von Lissajous kann also auch mit einer Stimmgabel angestellt werden.

Gleichzeitiges Schwingen zweier im Einklang befindlicher Pfeifen, die mit demselben Gebläse verbunden sind; manometrische Flammen von König. — Eine den Musikern wohlbekannte Thatsache ist folgende: Zwei im Einklang befindliche Pfeifen, die neben einander auf ein und demselben Gebläse stehen, bringen nicht einen Ton von doppelter Intensität hervor, sondern nur einen sehr schwachen Ton.²⁾ Die Erklärung dieser Erscheinung ist darin zu suchen, dass unter diesen Bedingungen die Schwingungsbewegungen zweier identischer

¹⁾ Weber, loc. cit. 506. Die Erscheinung wurde eingehend von Kiessling studirt, Pogg. Ann. 130, 177; 1867.

²⁾ Dagegen hört man deutlich die höhere Octave.

Pfeifen stets um eine halbe Schwingungsperiode verschieden sind, wie dies die manometrischen Flammen von König beweisen.

Die Versuchsanordnung von König, welche man in den verschiedensten Fällen mit Vorthail verwenden kann,¹⁾ ist folgendermaassen beschaffen: In einem Knotenpunkt der Pfeife (359), wo die Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ihr Maximum erreichen, ersetzt man einen Theil der Wand durch eine elastische Membran *m* (Fig. 50), welche gleichzeitig die Rückwand eines Kastens *ab*

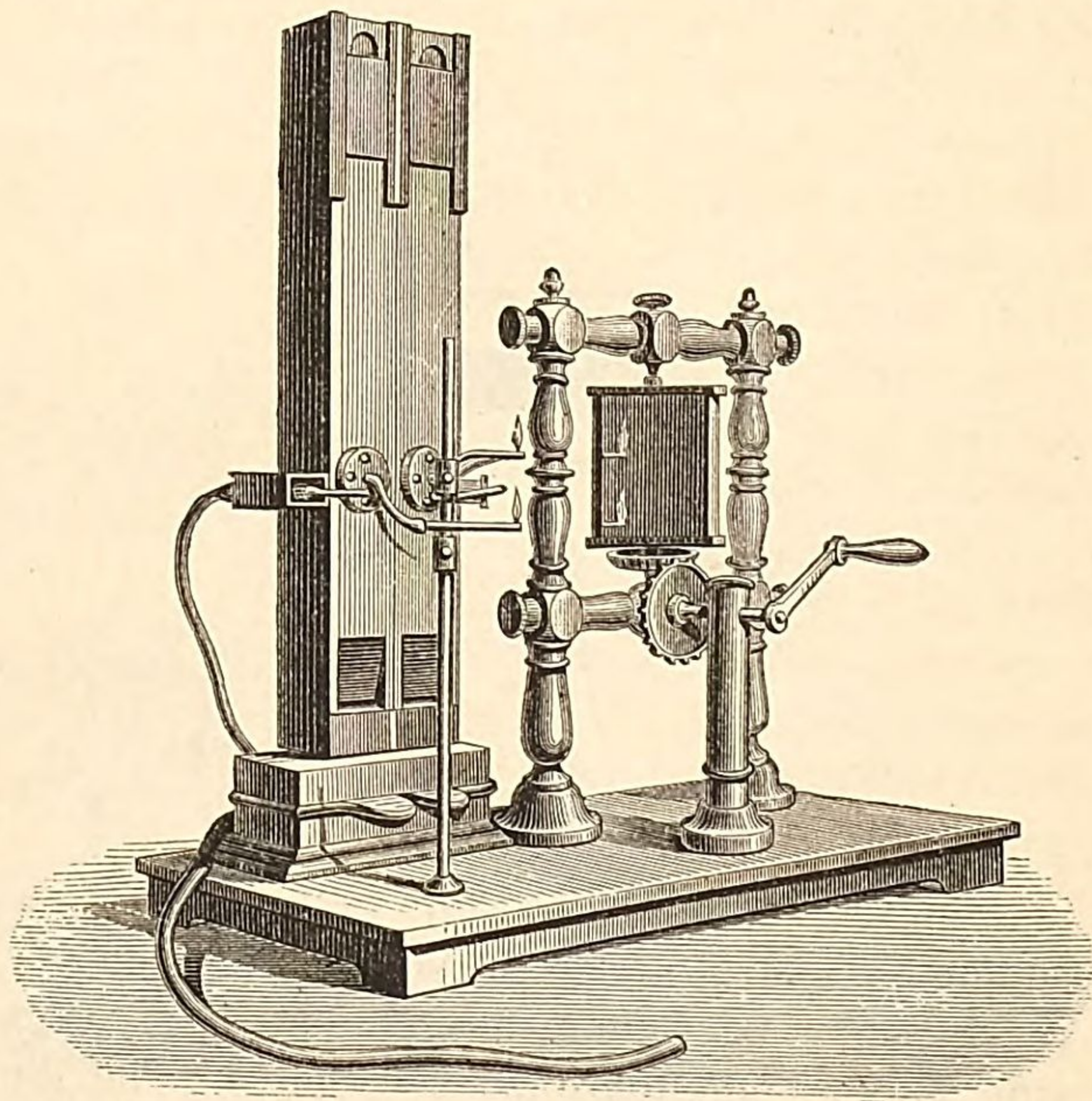


Fig. 49.

bildet. In letzteren tritt Leuchtgas durch die Öffnung *a* des Rohres *T* ein und durch die Öffnung *b* aus, wo man es anzündet. Bei jeder Luftschwingung in der Pfeife wird durch die Membran, welche bald fortgestossen, bald angezogen wird, das Gas in der manometrischen Kapsel abwechselnd verdichtet und verdünnt; die Flamme verlängert und verkürzt sich dabei genau nach derselben Periode, welche die Luftschwingungen im Innern besitzen. Aber diese Flammenstösse machen sich dem

¹⁾ Der erste Apparat, der es auf diese Weise ermöglichte, dem Auge die Tonschwingungen in den Gasen sichtbar zu machen, erschien auf der Londoner Ausstellung im Jahre 1862; seither construirte König nach demselben Princip eine ganze Reihe von Apparaten (vgl. König, loc. cit., 47).

Auge nur durch ein leichtes Zittern bemerkbar, das von der un-
gemein rasch verlaufenden Übereinanderlagerung der verschiedenen
Flammenbilder herrührt. Um dieselben
einzeln erkennen zu können, muss man,
während man die Flamme scharf im Auge
behält, schnell den Kopf bewegen oder
noch besser, ihr Spiegelbild in einem
rotirenden Spiegel betrachten. Ist die
Pfeife nicht angeblasen, dann erscheint das
Flammenbild als zusammenhängendes und
gleichmässiges Band (Fig. 52, I); tönt die
Pfeife dagegen, so erscheint es gezähnt,
und zwar entspricht die Anzahl der
Zähne der Anzahl der Tonschwingungen
(Fig. 52, II).

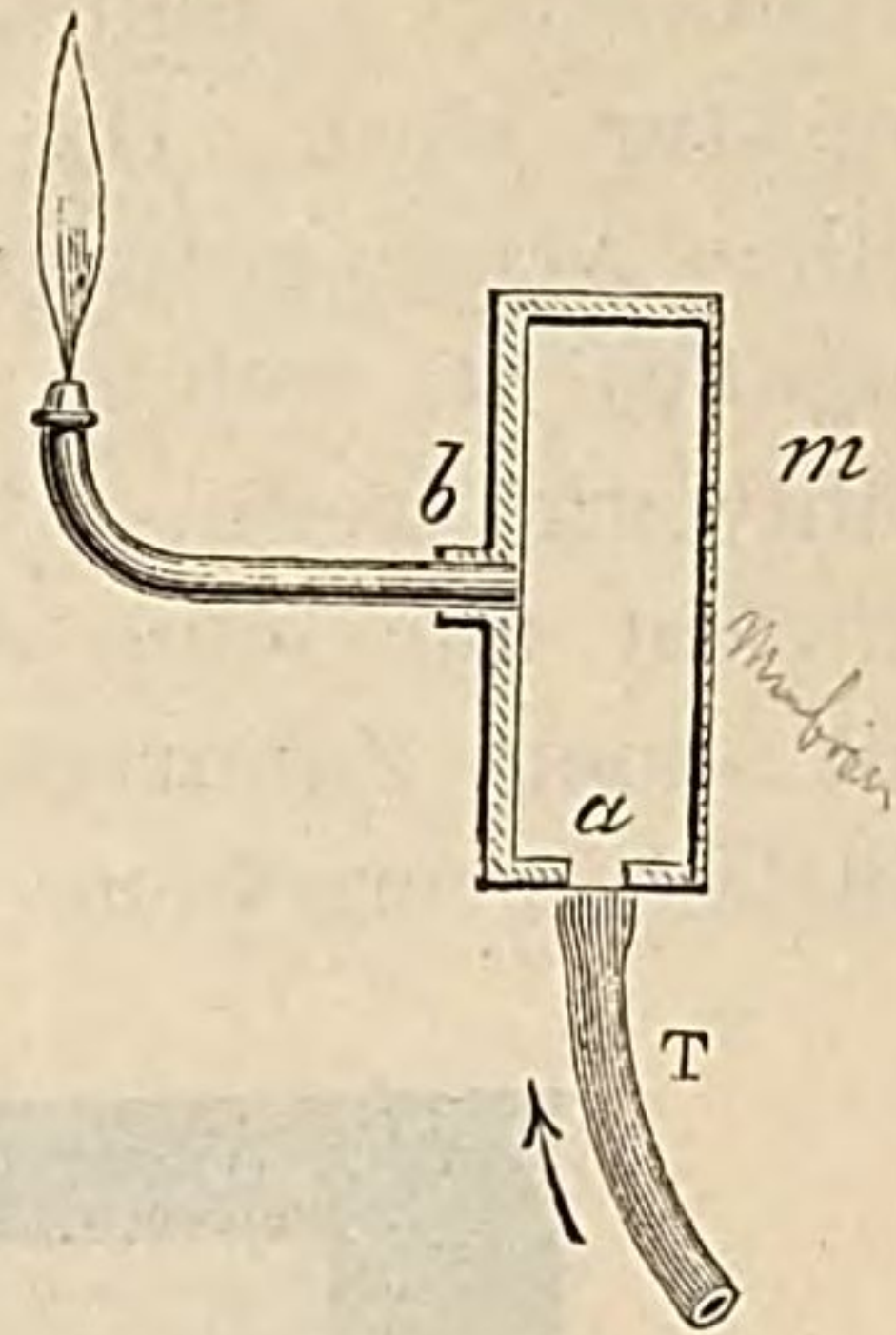


Fig. 50.

Die beiden in Fig. 49 dargestellten Pfeifen liefern auf diese
Weise zwei Bilder, bei welchen die Zähne genau abwechseln,¹⁾
die beiden Schwingungsbewegungen sind also dauernd entgegen-
gesetzt gerichtet (Fig. 51).

Untersuchungen mit der Helmholtz'schen Doppelsirene. — Ein
Apparat, der sich ausgezeichnet zur Beobachtung der Interferenz-

¹⁾ Fig. 51 giebt links die Bilder der Flammen bei ruhendem Spiegel;
erhält der Spiegel eine beschleunigte Bewegung, so rücken die Bilder
mehr und mehr aus einander und zeigen die schon erwähnte Verschiebung.

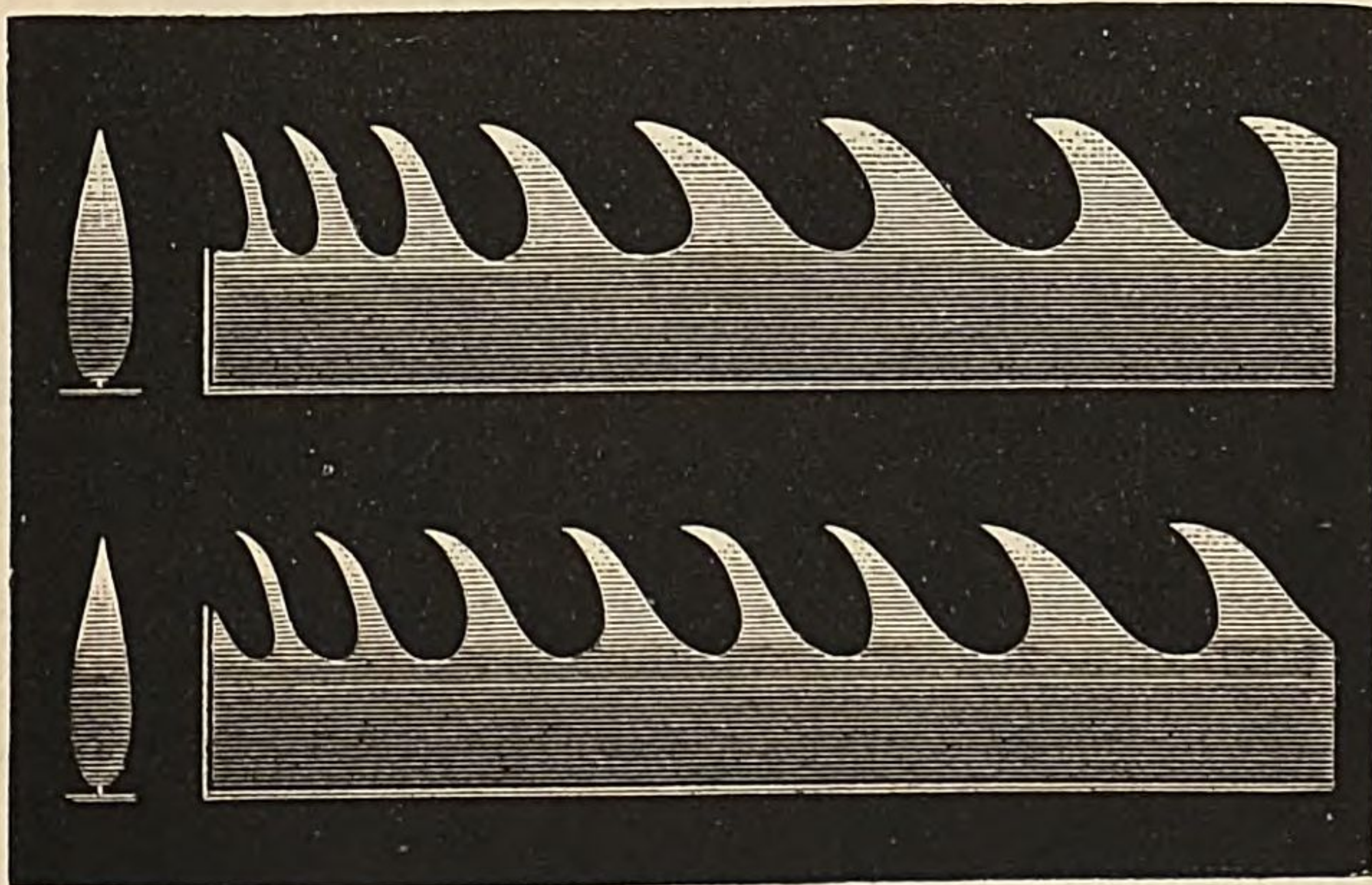


Fig. 51.

Verbindet man beide Kapseln mit einer einzigen Flamme, dann erscheint
diese als gleichförmiges Band; dasselbe trägt auf der Oberseite niedrige
Zähne mit Doppelspitzen, welche der höheren Octave angehören.

erscheinungen eignet, ist die Doppelsirene von v. Helmholtz.¹⁾ Sie besteht aus zwei mehrstimmigen Dove'schen Sirenen, deren Windkasten a_0 und a_1 (Fig. 53) über einander an demselben Gestelle befestigt sind. Die Scheiben c_0 und c_1 werden von ein und derselben Achse getragen; an dieser ist in k eine Schraube ohne Ende angebracht, welche ein — in der Figur nicht wiedergegebenes — Zählwerk treibt. Der obere Kasten a_1 kann unabhängig vom unteren um seine Achse gedreht werden. Zu dem Ende ist er mit einem Zahnrade versehen, in welches das kleinere mit einer Kurbel d versehene Zahnrad e eingreift. Jede der Scheiben trägt

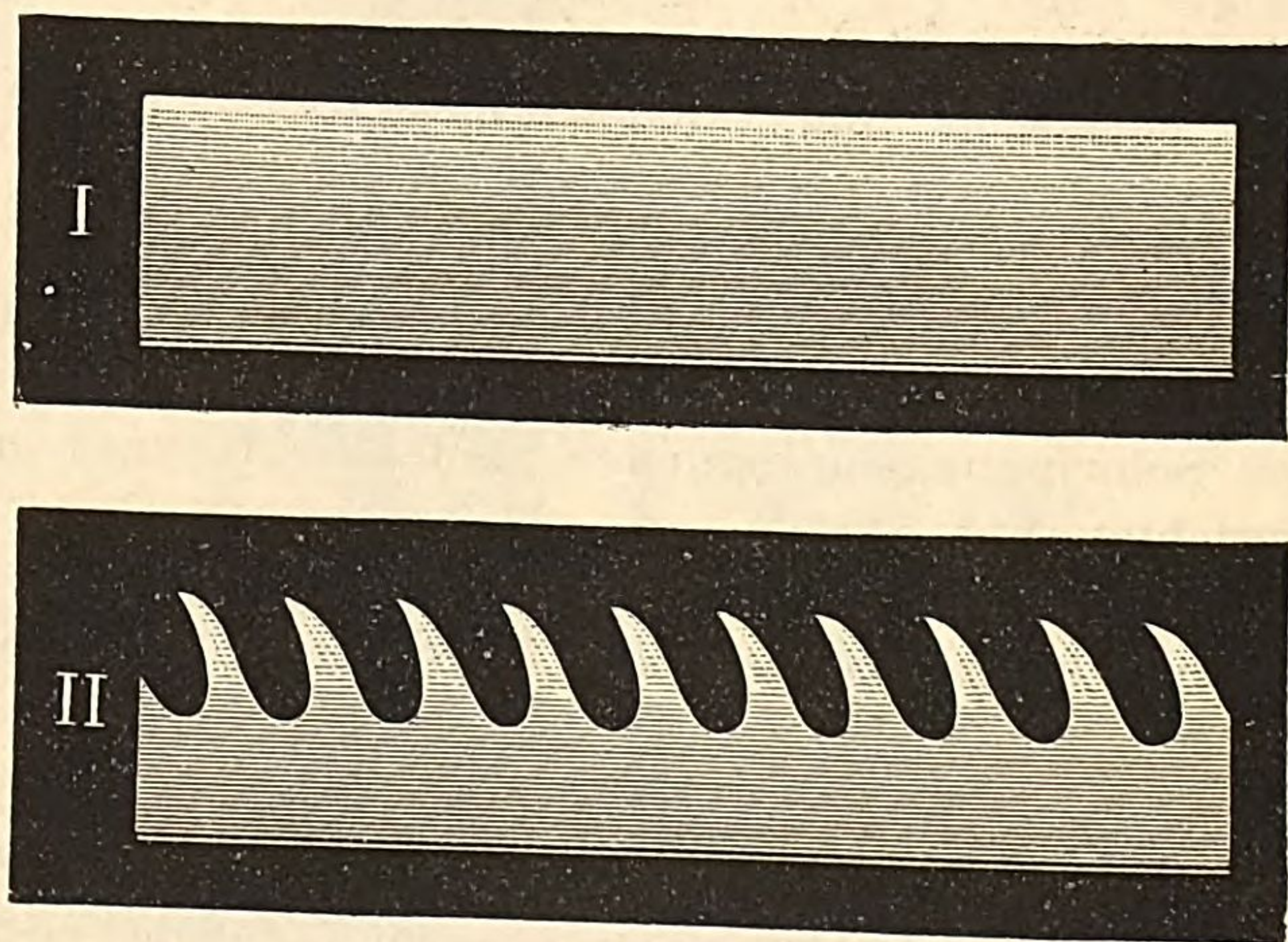


Fig. 52.

mehrere Reihen von Löchern, die einzeln oder vermittelt der Stifte ii beliebig verbunden, angeblasen werden können. Die untere Scheibe hat vier Reihen von 8, 10, 12, 18 Löchern, die obere Scheibe vier andere von 9, 12, 15, 16 Löchern. Nennen wir also den von der Reihe mit 8 Löchern erzeugten Ton c_1 , so kann die untere Scheibe die Töne c_1, e_1, g_1, d_2 geben, die obere die Töne d_1, g_1, h_1, c_2 , es ist somit möglich, eine Menge von Combinationen hervorzubringen.²⁾ Die Töne der Sirene sind scharf, weil sie starke Obertöne von hoher Ordnungszahl enthalten. Um diese weniger hervortreten zu lassen, verstärkt v. Helmholtz die Grund-

¹⁾ v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, 4. Aufl., S. 269.

²⁾ Die Doppelsirene ist besonders bequem zum Nachweise der Tatsache, dass das Intervall zweier Töne nur vom Verhältniss ihrer Schwingungszahlen abhängt, und keineswegs vom absoluten Betrage dieser Schwingungszahlen.

töne durch cylindrische Messingkästen, deren hintere Hälften bei h_0h_0 , h_1h_1 zu sehen sind. Der Sirenenton wird dann „voll, stark und weich, wie ein schöner Hornton.“ — Wir denken uns nun die Reihe mit 12 Löchern in jedem Kasten geöffnet; stehen sich bei beiden die Löcher gerade gegenüber, dann stimmen die Luft-

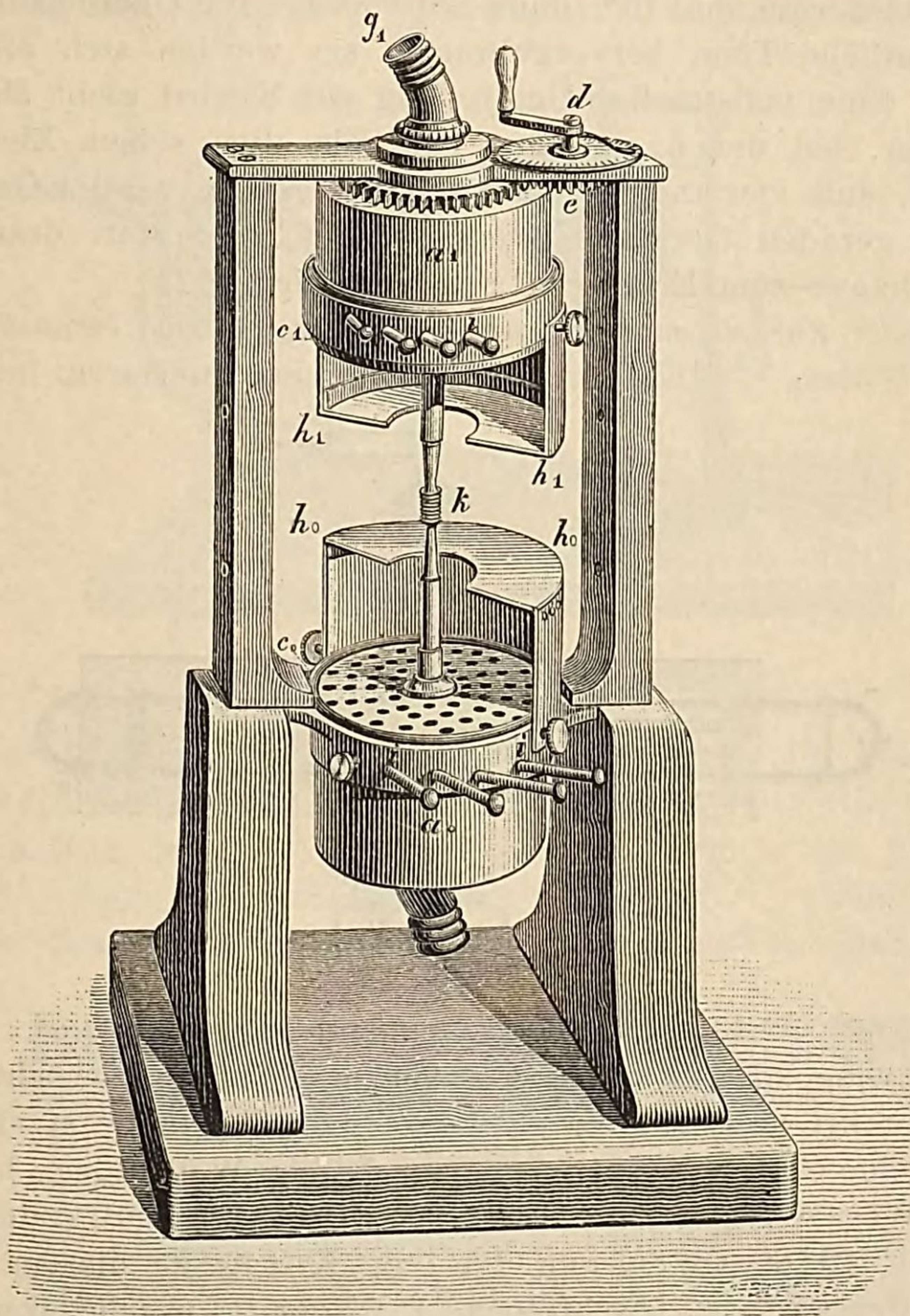


Fig. 53.

stöße genau überein, und die Differenz für die beiden Grundtöne und ihre Obertöne wird Null; die Töne verstärken sich also sämtlich. Drehen wir dagegen die Kurbel um 45° und lassen damit den oberen Kasten um $\frac{1}{24}$ Umdrehung, d. h. um die Hälfte des Abstandes zweier Löcher, vorrücken, dann erhalten die Grundtöne eine Differenz von einer halben Periode, sie müssen sich also vernichten; die höheren Octaven jedoch unterscheiden sich

um eine ganze Periode und verstärken sich deshalb; dasselbe tritt ein für alle ungeraden Obertöne, während die geraden Obertöne sich aufheben. In dieser Stellung wird also der Grundton sehr geschwächt werden, ohne jedoch gänzlich zu verschwinden; man hört dafür aber deutlich die höhere Octave. Drehen wir die Kurbel wiederum um 45° , dann wird wieder die Übereinstimmung für sämtliche Töne hervorgebracht, sie werden sich alle verstärken. Eine vollständige Umdrehung der Kurbel giebt also vier Stellungen, bei denen sich der Ton mit allen seinen Elementen verstärkt, und vier andere, dazwischen liegende, wo der Grundton mit den geraden Obertönen verschwindet, und statt dessen die höhere Octave zum Erklängen gebracht wird.

Directes Zusammenwirken zweier Töne, welche eine bekannte Gangdifferenz besitzen. — Das einfachste Mittel, um Interferenz zwischen

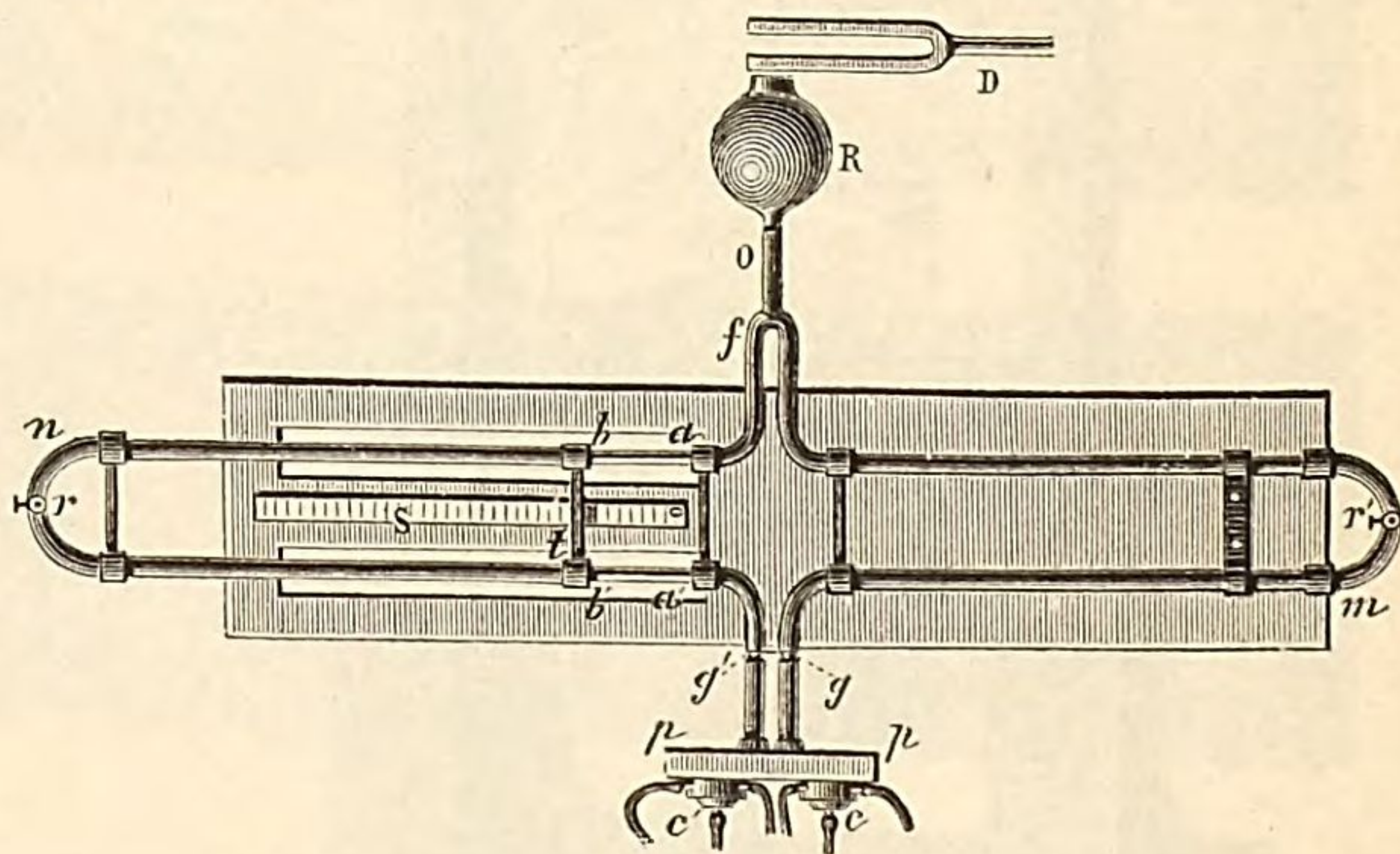


Fig. 54.

zwei schwingenden Bewegungen hervorzubringen, besteht darin, dass man bei zwei aus ein und derselben Tonquelle stammenden Wellen eine Gangdifferenz von einer halben Wellenlänge herstellt; diesen Weg schlugen Herschel,¹⁾ Quincke²⁾ und andere Physiker ein. Wir wollen nur den von König zu diesem Zwecke construirten Apparat beschreiben: Ein Rohr O , welches vermittelt eines Resonators R den Ton einer Stimmgabel D erhält, theilt sich im Punkte f in zwei Arme m und n , die bei g und g' in die Manometerkasten c und c' einmünden. Der Arm n , der aus zwei in einander passenden Theilen aa' , bb' besteht, kann nach

¹⁾ Herschel, Phil. Mag. (3), 3, 405; 1833.

²⁾ Quincke, Pogg. Ann. 128, 177; 1866. In Betreff der Versuche von Quincke vergleiche auch Seebeck, Pogg. Ann. 149, 129; 1873 und Journ. de physique 3, 127; 1874 (Terquem).

Art einer Posaune verlängert werden. Bedeckt das Rohr b das Rohr a vollständig, dann sind die beiden Arme m und n gleich lang, und die nach c und c' übertragenen Schwingungsbewegungen stimmen genau überein. Vereinigt man also diese beiden Bewegungen in d , dann wird die Flamme d tiefe Zacken zeigen, welche mit denjenigen der Flammen d' und d'' übereinstimmen, die

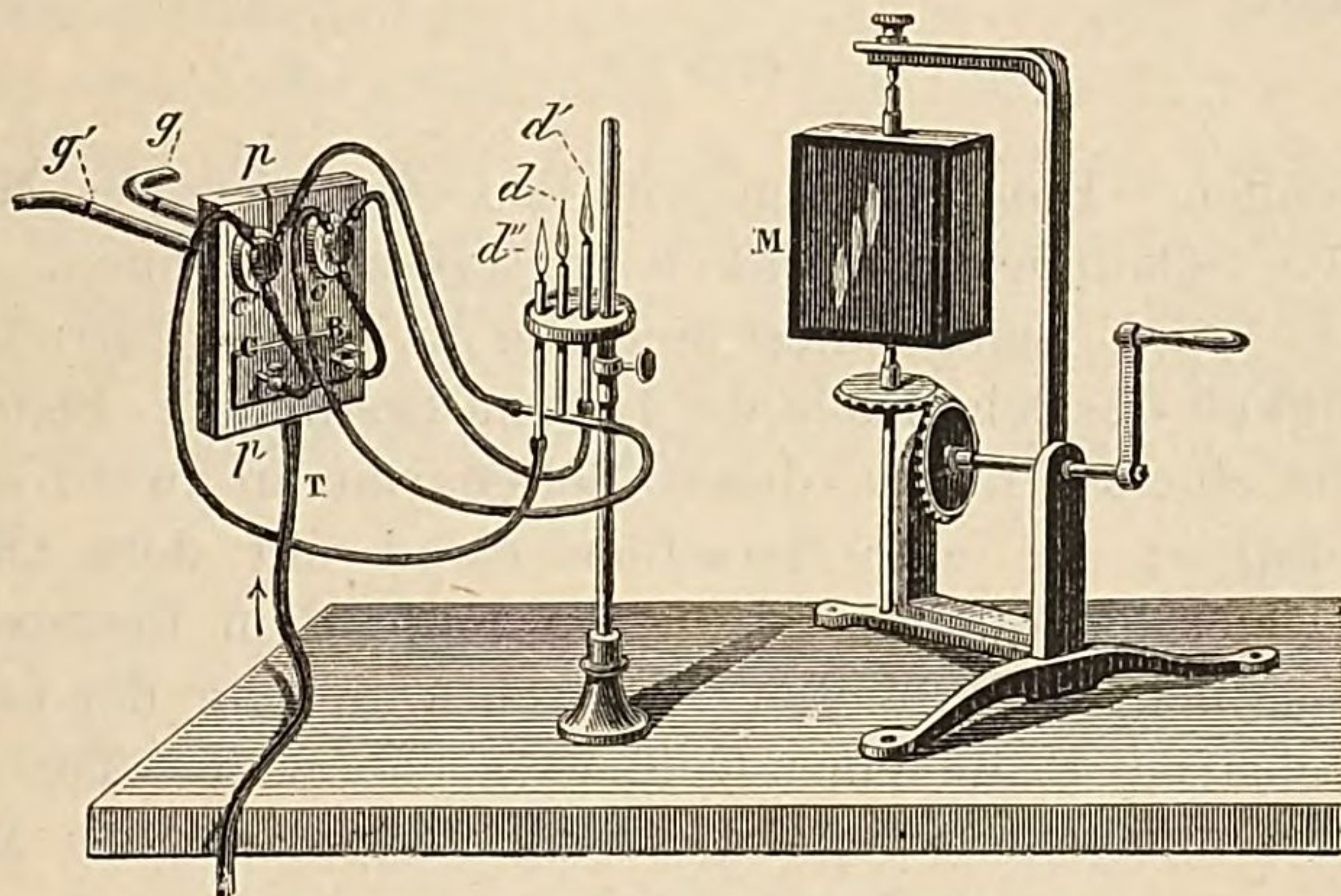


Fig. 55.

nur von den Theilbewegungen herrühren, und die drei Reihen von gezackten Bändern werden sich in verticaler Richtung entsprechen (Fig. 56, I). Wird dagegen der Arm n um die Hälfte der Wellenlänge des auf Luft bezogenen Tones D verlängert (man zieht zu diesem Zwecke das Rohr b so weit heraus, dass das Ver-

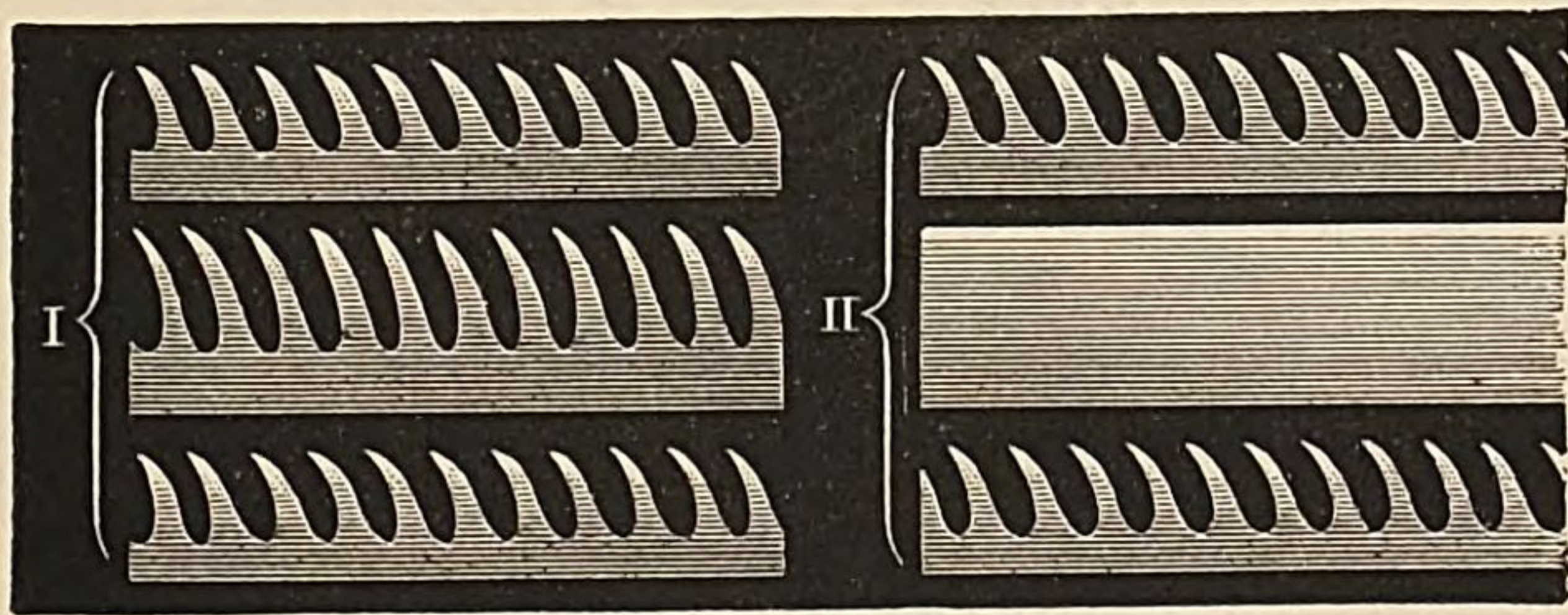


Fig. 56.

bindungsstück t auf der Scala S um ein Viertel Wellenlänge fort-rückt), dann werden die Bewegungen in c und c' entgegengesetzt gerichtet sein; in Folge dessen bleibt die Flamme d unbeweglich, während die Zacken in d' und d'' abwechseln (Fig. 56, II). Erreicht die Gangdifferenz eine ganze Wellenlänge, dann herrscht wieder Übereinstimmung, u. s. f.

Mittelst einer Membran in O und Hähnen in r und r' kann man den Versuch auch auf andere Gase als Luft ausdehnen und so bei verschiedenen Gasen die Wellenlänge λ eines gegebenen Tones messen.

Messung der Schallgeschwindigkeit in einem Gase nach der Methode der Interferenzen. — Ist λ einmal bekannt, dann gestattet die Grundformel (349)

$$\lambda = V\tau$$

V zu berechnen. Damit haben wir also ein indirectes Mittel zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Gasen gewonnen.

Schneebeli¹⁾ wandte diese Methode an, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft zu bestimmen. Sein Apparat bestand aus einem T-Rohre, dessen Seitenarme in zwei Kautschukbirnen endigten; die eine derselben stand mit dem Ohre, die andere mit der Tonquelle, in diesem Falle dem Resonanzkasten einer Stimmgabel, in Verbindung. Durch Änderung der Länge des grossen Armes mit Hülfe eines Kolbens suchte er den Ton zu einem Minimum zu machen. Die Entfernung zweier solcher Minimumstellungen des Kolbens gab direct die Grösse $\frac{\lambda}{2}$, und damit war es möglich, die Geschwindigkeit U für den betreffenden Ton und die betreffende Röhre zu bestimmen. Vergleicht man nun (vgl. Anm. S. 71—72) die Ergebnisse zweier Versuche, welche mit demselben Tone, aber bei Röhren mit den verschiedenen Radien R_1 und R_2 angestellt wurden, so kann man setzen

$$U_1 = V \left(1 - \frac{A}{R_1} \right)$$

und

$$U_2 = V \left(1 - \frac{A}{R_2} \right),$$

wobei A eine Constante bezeichnet.

Hieraus folgt

$$V = \frac{U_1 R_1 - U_2 R_2}{R_1 - R_2}.$$

Indem Schneebeli auf diese Weise je zwei Versuche mit einander combinirte, konnte er eine Tabelle mit 32 Bestimmungen der Grösse V aufstellen, die sämmtlich zwischen 330 m und 333 m lagen; das Mittel derselben betrug 332 m.

¹⁾ Schneebeli, loc. cit.

356. Interferenz der directen und der reflectirten Wellen. — *Superposition der directen und der reflectirten Bewegung.* —

Wenn ein vom Punkte O ausgehendes Wellensystem auf ein Hinderniss AB trifft, so tritt ein neues Wellensystem mit dem Centrum O' auf, das in Bezug auf AB symmetrisch zu O liegt, und die Übereinanderlagerung der beiden Wellensysteme giebt Veranlassung zu Interferenzerscheinungen, die sich leicht verfolgen lassen. Wir bezeichnen mit d die Entfernung OC der Tonquelle von der reflectirenden Wand AB ; dann werden sich in einem Punkte M , der auf der Normalen OO' in einer Entfernung $CM = x$ von AB liegt, zwei Bewegungen von derselben Periode über einander lagern, welche die Wege $O'M = d + x$ und $OM = d - x$ durchlaufen haben, so dass sie demnach eine Wegdifferenz $2x$ besitzen. Nun haben

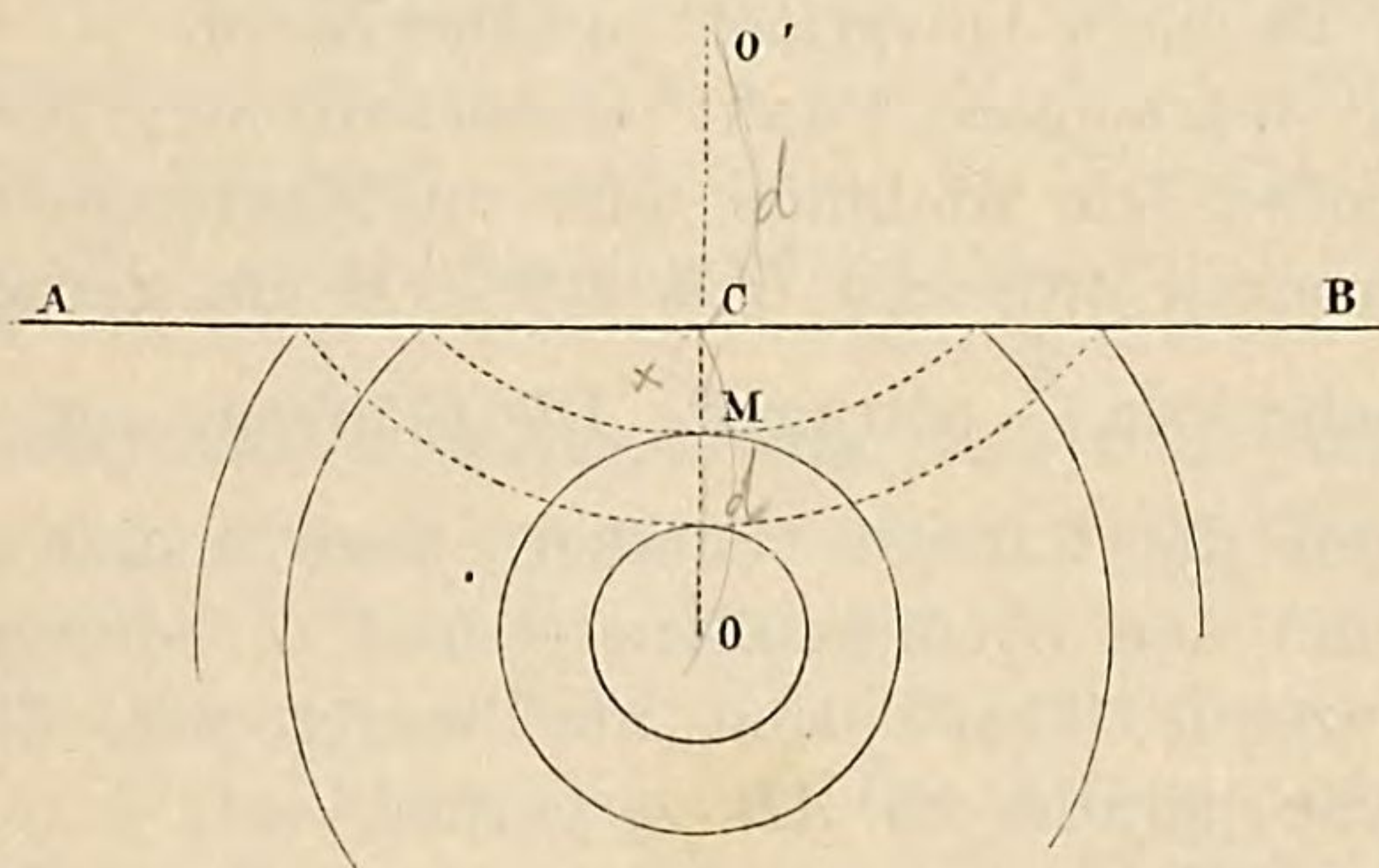


Fig. 57.

aber hier die Bewegungen, welche zusammen wirken, entgegengesetztes Vorzeichen, wir werden also ein Minimum oder ein Maximum erhalten, je nachdem die Grösse $2x$ gleich einem geraden oder ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge ist. Für gewöhnlich, wenn keine Reflexion eintritt, gilt bekanntlich gerade das Umgekehrte, es ist jedoch leicht, auch diese Erscheinung unter die allgemeine Regel zu bringen, wenn man bedenkt, dass die von der Reflexion herrührende Umkehrung ebenso erfolgen würde, wenn man dem von der zweiten Bewegung durchlaufenen Weg einen Zuwachs von $\frac{\lambda}{2}$ ertheilte. Nimmt man also an, dass bei der Reflexion an einem festen Widerstand *ein Verlust von einer halben Wellenlänge* eintritt, dann ist die physikalische Wegdifferenz beider Strahlen $= 2x + \frac{\lambda}{2}$, und je nachdem diese einem geraden oder ungeraden Vielfachen einer halben Wellenlänge entspricht, haben wir in M ein Maximum oder ein Minimum. Es entstehen

demnach auf der Normale eine Reihe von festen *Knoten* in der Entfernung

$$0, \quad 2 \frac{\lambda}{4}, \quad 4 \frac{\lambda}{4}, \quad 6 \frac{\lambda}{4} \quad \text{u. s. w.}$$

und eine Reihe von festen *Bäuchen* in der Entfernung

$$\frac{\lambda}{4}, \quad 3 \frac{\lambda}{4}, \quad 5 \frac{\lambda}{4} \quad \text{u. s. w.}$$

In den Knoten kann die Bewegung nicht Null sein, denn die Amplitude der reflectirten Bewegung ist geringer, als diejenige der directen Bewegung, aber der Ton wird stark geschwächt erscheinen; den Bäuchen entspricht ein Maximum.

Liegt der betrachtete Punkt ausserhalb der Normalen OO' , dann tritt ebenfalls ein Minimum oder ein Maximum ein, je nachdem die Differenzen zwischen $O'M$ und OM ein gerades oder ungerades Vielfache von $\frac{\lambda}{2}$ betragen. Die Flächen, auf welchen sich die Knoten und die Bäuche befinden, sind demnach Rotationshyperboloide mit den Brennpunkten O und O' , deren an die Gerade OO' grenzende Theile sich nur wenig von Ebenen unterscheiden, welche parallel zu AB verlaufen.

*Versuche von Savart*¹⁾ und *von Seebeck*.²⁾ — Diese Erscheinungen wurden experimentell vom Oberst Nicolas Savart, dem Bruder des berühmten Akustikers, und von Seebeck untersucht. Eine verticale Mauer bildete das Hinderniss, vor welchem mit Hülfe eines Contrabasses oder einer grossen Orgelpfeife der Ton hervor gebracht wurde. Zur Bestimmung der Knoten und Bäuche benutzte Seebeck eine Membran mn , welche auf einen Rahmen AB gespannt und mit einem leichten Pendel p versehen war. Verschob er das *akustische Pendel* längs CO , so konnte er genau die gesuchten Punkte bestimmen und nachweisen, dass dieselben mit den theoretisch berechneten Punkten zusammenfielen; N. Savart dagegen hatte da Knoten gefunden, wo nach der Theorie Bäuche liegen sollten, und umgekehrt. Dieser



Fig. 58.

¹⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), 71, 20 und (3), 14, 385; 1839—1845.

²⁾ Seebeck, Pogg. Ann. 49, 177 und 67, 145; 1840—1846 und Ann. de chim. et de phys. (3), 17, 490; 1846.

Widerspruch ist darauf zurückzuführen, dass Savart sich zur Bestimmung der Knoten und Bäuche des Ohres bediente. Während nun bei dem Seebeck'schen Experiment die Membran, deren beide Seiten mit der umgebenden Luft in Berührung stehen, die Bewegungen der Luftschicht angiebt, zeigt das nur auf der äusseren Seite durch die Schallwelle erregte Trommelfell die periodischen Druckschwankungen an, die gerade in einem Knoten ihr Maximum haben, während es in einem Schwingungsbauche gar keine Einwirkungen erfährt; es verhält sich also, wie König selbst bemerkte, genau wie eine König'sche Manometerkapsel.

Anwendungen. — Gerade auf der Interferenz der directen und der reflectirten Wellen beruht die Wirkung der mächtigsten Musikinstrumente. Aber die Interferenzerscheinungen beschränken sich nicht auf akustische Apparate, sondern treten in jedem von reflectirenden Wänden umgebenen Raume auf. Die Architekten müssen diesen Umstand bei der Construction der Theater, Concert- und Versammlungssäle ganz besonders berücksichtigen.

357. Analytische Behandlung des Interferenzprincips.

Gleichungen, welche die Schwingungsbewegungen darstellen können. — Damit Interferenzen zu Stande kommen können, genügt es, wie wir bereits bemerkten, dass die den Ton hervorrufende Schwingungsbewegung eine periodische Function der Zeit ist, welche zu den Zeiten $t, t + \tau, t + 2\tau \dots$ stets dieselben Werthe annimmt, während sie zu den Zeiten $t + \frac{\tau}{2}, t + \frac{3\tau}{2} \dots$ ebenfalls die gleichen Werthe, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, besitzt.

Offenbar giebt es nun eine unendlich grosse Anzahl von Functionen, welche diesen beiden Bedingungen Genüge leisten.

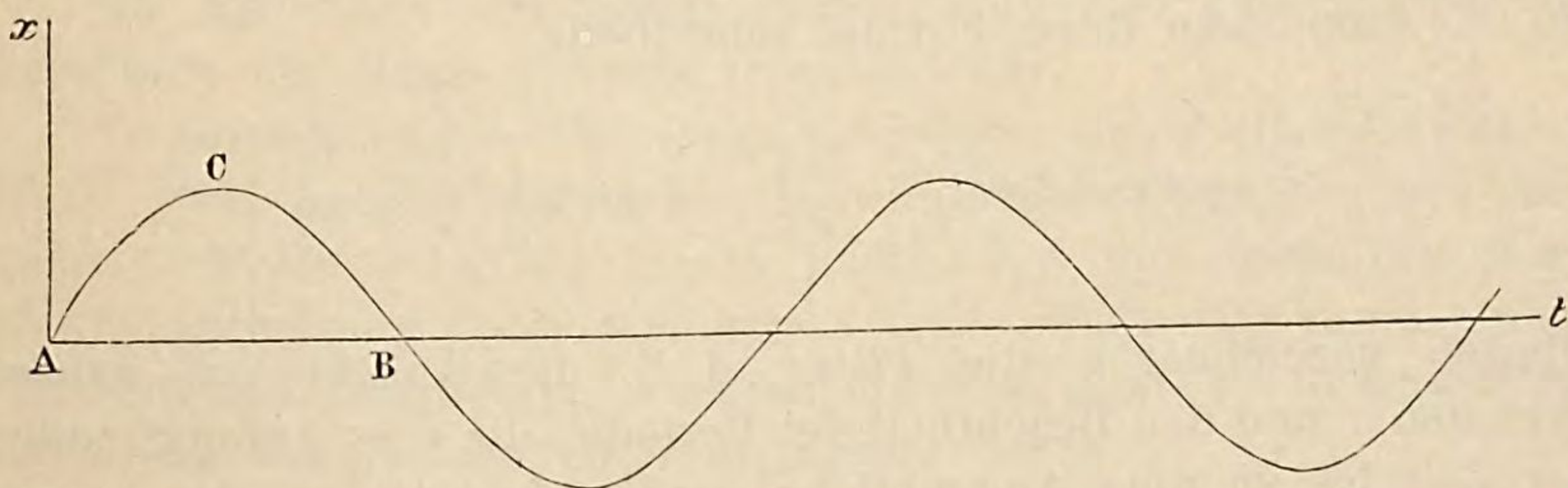


Fig. 59.

Tragen wir beispielsweise die Zeiten als Abscissen, die Verschiebungen als Ordinaten auf und ziehen einen beliebigen Curvenbogen ACB , der aus zwei symmetrischen Theilen AC und CB besteht, dann erhalten wir, wenn wir dieselbe Curve auf der Ver-

längerung von AB abwechselnd unter und über der Abscissenachse bis ins Unendliche wiederholen, ohne Zweifel eine Curve, welche einer periodischen Function entspricht und die verlangten Eigenschaften besitzt.

Aber die Molecularbewegungen, welche den akustischen Erscheinungen zu Grunde liegen, sind nicht beliebig, sondern werden durch Kräfte hervorgebracht, die in Folge von Deformationen auftreten. Sind diese Deformationen klein genug, dann ist die auf einen materiellen Punkt wirkende Resultante der elastischen Kräfte dem Ausschlage desselben proportional (135), die Bewegung ist also eine pendelartige. Die Elasticitätstheorie stimmt somit vollkommen mit den thatsächlichen Verhältnissen überein, wie sie sich seit Anwendung des Principes, die Schallbewegungen graphisch aufzuzeichnen, ergaben; eine genauere Untersuchung dieser Bewegung wird dies bestätigen.

Wir nehmen der Einfachheit halber zunächst an, dass bei der resultirenden Schwingungsbewegung jeder Punkt des Körpers eine gerade Linie beschreibe. Die Bewegung des Punktes auf der Geraden lässt sich dann, nach dem Früheren, durch die Formel

$$x = A \cos (t - t_0) \sqrt{b}$$

darstellen, wobei mb den Proportionalitätscoefficient der in der Entfernung x wirkenden Kraft mbx bedeutet.

Führen wir die Periode

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{b}}$$

ein, so kann man diese Formel schreiben:

$$x = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t_0}{\tau} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right).$$

Hierbei bezeichnet φ die *Phase*, d. h. die Anzahl von ganzen Perioden¹⁾ und den Bruchtheil der Periode, die vom Anfangspunkte der Zeit bis zu dem Augenblicke verflossen sind, wo der bewegliche Punkt seine Bewegung von A aus beginnt.

¹⁾ Die Anzahl ganzer Perioden pflegt man gewöhnlich unberücksichtigt zu lassen, da dieselbe den Werth des Cosinus, der nur von dem übrig bleibenden Bruche abhängt, nicht verändert.

Die Geschwindigkeit des bewegten Punktes ist

$$v = -\frac{2\pi A}{\tau} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right),$$

wenn man $-\frac{2\pi A}{\tau} = a$ setzt.

Verlegte man den Anfangspunkt der Zeit derart, dass das Product $2\pi \frac{t}{\tau}$ um $\frac{\pi}{2}$ wächst, dann würde der Sinus in den Cosinus übergehen, und umgekehrt; die beiden Formeln, von denen die eine die Verschiebung, die andere die Geschwindigkeit darstellt, sind also ganz analog; gewöhnlich drückt man die Verschiebung durch einen Cosinus aus und die Geschwindigkeit durch einen Sinus, aber dies ist lediglich Sache der Übereinkunft.

Da sich die Geschwindigkeit während der ganzen Dauer der Periode von einem Augenblicke zum anderen ändert, wird der mechanische Effect der Schwingungsbewegung, mit anderen Worten, die Intensität, durch die mittlere lebendige Kraft während der Periode gemessen, d. h. durch das über die Zeit τ erstreckte Integral der lebendigen Kraft, dividirt durch τ . Wenn wir überall dasselbe Medium voraussetzen, so ist die Masse constant, und demnach die Intensität proportional

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau v^2 dt &= \frac{a^2}{\tau} \int_0^\tau \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right) dt \\ &= \frac{a^2}{\tau} \int_0^\tau \frac{1 - \cos 4\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right)}{2} dt = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Bis auf einen constanten Factor stellt also das Quadrat der Amplitude ein Maass für die Intensität dar.

Vereinigung zweier Schwingungsbewegungen von derselben Periode. — Wenn zwei parallel gerichtete Schwingungsbewegungen von derselben Periode in einem Punkt nach einer und derselben Fortpflanzungsrichtung (oder wenigstens nach zwei wenig von einander verschiedenen Richtungen) zusammentreffen, und die Geschwindigkeiten der componirenden Bewegungen durch

$$v = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right)$$

und

$$v' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi' \right)$$

gegeben sind, dann wird die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung

$$V = v + v' = (a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi') \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - (a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi') \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Dies ist ebenfalls ein Ausdruck von der Form:

$$\begin{aligned} V &= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \Phi \right) \\ &= A \cos 2\pi\Phi \sin 2\pi \frac{t}{\tau} - A \sin 2\pi\Phi \cos 2\pi \frac{t}{\tau}, \end{aligned}$$

denn man kann stets setzen:

$$\begin{aligned} A \cos 2\pi\Phi &= a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi' \\ \text{und} \\ A \sin 2\pi\Phi &= a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi'. \end{aligned}$$

Durch Quadrirung und Addition dieser beiden Gleichungen erhält man nämlich

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi(\varphi - \varphi'),$$

eine Gleichung, die für A immer einen reellen Werth giebt.

Dividirt man die zweite Gleichung durch die erste, so folgt

$$\operatorname{tg} 2\pi\Phi = \frac{a \sin 2\pi\varphi + a' \sin 2\pi\varphi'}{a \cos 2\pi\varphi + a' \cos 2\pi\varphi'};$$

offenbar existirt stets ein reeller Werth von Φ , welcher dieser Gleichung genügt.

Da die Intensität proportional dem Quadrate der Amplitude ist, so kann A^2 als Maass für die Intensität in dem betreffenden Punkte betrachtet werden, und es ist leicht ersichtlich, dass diese Intensität von der Phasendifferenz abhängt, welche die beiden componirenden Bewegungen in diesem Punkte besitzen; dieselbe ist ein

$$\text{Maximum, wenn } \cos 2\pi(\varphi - \varphi') = +1, \text{ oder } \varphi - \varphi' = \frac{2k}{2}$$

$$\text{Minimum, " " " } = -1, \text{ " " } = \frac{2k+1}{2}$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl 0, 1, 2, 3 ... bedeutet.

Die Intensität wird also ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Phasendifferenz eine gerade oder ungerade Anzahl von halben Schwingungsperioden beträgt.

Die beiden Schwingungen, welche in Q (Fig. 42) zur Zeit t zusammentreffen, sind dieselben, welche zu den Zeiten $(t - \varphi\tau)$ und $(t - \varphi'\tau)$ in A und B existirten; $(\varphi - \varphi')\tau$ ist der Unterschied der Zeiten, welche die componirenden Bewegungen gebraucht hatten, um nach Q zu gelangen. An Stelle dieser in Perioden ausgedrückten Zeiten kann man auch die mit Wellenlängen gemessenen Wegstrecken betrachten. Ersetzen wir zu dem Zwecke in dem Ausdrucke

$$\varphi = \frac{t_0}{\tau}$$

τ durch seinen, der Grundgleichung $\lambda = V\tau$ entnommenen Werth, dann erhalten wir

$$\varphi = \frac{t_0 V}{\lambda} = \frac{r}{\lambda},$$

wenn wir mit r den seit dem Anfangspunkte der Zeit durchlaufenen Weg Vt_0 bezeichnen; der Ausdruck für die Geschwindigkeit lässt sich demnach schreiben:

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda} \right).$$

Die Geschwindigkeiten der beiden interferirenden Bewegungen werden damit

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda} \right)$$

und

$$a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r'}{\lambda} \right),$$

und es ist leicht ersichtlich, dass sich die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung darstellen lässt durch

$$A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{R}{\lambda} \right);$$

das Maass für die Intensität dieser Bewegung ist dann

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda},$$

wenn man mit δ den *Gangunterschied* $r - r'$ der beiden Bewegungen bezeichnet, und R ist definirt durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{R}{\lambda} = \frac{a \sin 2\pi \frac{r}{\lambda} + a' \sin 2\pi \frac{r'}{\lambda}}{a \cos 2\pi \frac{r}{\lambda} + a' \cos 2\pi \frac{r'}{\lambda}}.$$

Die resultirende Intensität wird ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem

$$\delta = 2k \frac{\lambda}{2} \quad \text{oder} \quad \delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$$

ist, d. h. je nachdem der Gangunterschied ein gerades oder ungerades Vielfache einer halben Wellenlänge beträgt.

Sind die Intensitäten der beiden componirenden Bewegungen gleich, also $a = a'$, dann wird die Maximalintensität der resultirenden Bewegung das Vierfache derjenigen der componirenden Bewegungen, die Minimalintensität dagegen Null.

Wir erhalten somit wieder die uns bereits bekannten Resultate.

Fresnel'sche Regel. — Hätte man in einer Ebene zwei Kräfte a und a' zusammensetzen, die durch denselben Punkt gehen und mit einer gegebenen Geraden die Winkel $2\pi\varphi$ (oder $2\pi\frac{r}{\lambda}$) und $2\pi\varphi'$ (oder $2\pi\frac{r'}{\lambda}$) einschliessen, dann würde die Resultante nach Grösse und Richtung gerade durch die beiden Gleichungen bestimmt werden, welche A^2 und $\operatorname{tg} 2\pi\Phi$ (oder $\operatorname{tg} 2\pi\frac{R}{\lambda}$) definiren. Wir haben hier also eine bemerkenswerthe Analogie, welche Fresnel vielfach benutzte: Stellt man jede schwingende Bewegung durch eine Gerade von der Länge a dar, welche mit einer der Coordinatenachsen den Winkel $2\pi\varphi$ (oder $2\pi\frac{r}{\lambda}$) einschliesst, dann

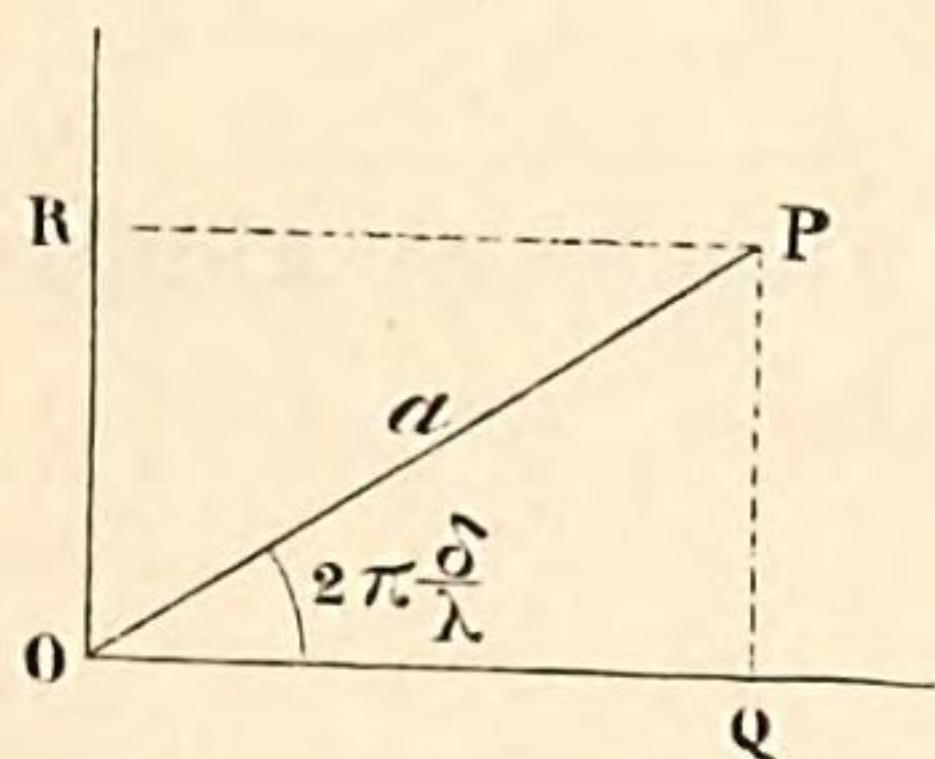


Fig. 60.

ist die Regel für die Zusammensetzung zweier Schwingungsbewegungen mit gegebenen Amplituden und Phasen dieselbe wie die Regel für die Zusammensetzung zweier Kräfte von gegebener Grösse und Richtung, d. h. die Regel von der Addition der Vektoren.

Ebenso lässt sich jede geradlinige Schwingungsbewegung in zwei andere mit irgend welchen Phasen zerlegen.

Unter allen diesen Zerlegungsarten ist eine, die wir noch be-

sonders erwähnen wollen, weil man häufig von ihr Gebrauch macht; man kann nämlich die gegebene Bewegung durch die beiden folgenden ersetzen:

eine von der Phase 0 (oder der Phasendifferenz 0) und der Amplitude $a \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$,

die andere von der Phase $\frac{1}{4}$ (oder der Phasendifferenz $\frac{\lambda}{4}$)

und der Amplitude $a \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$.

Ein Blick auf Fig. 60 wie auf den Ausdruck $v = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\delta}{\lambda} \right)$ genügt, um zu erkennen, dass die ursprüngliche Schwingung OP in der That durch die beiden Schwingungen OQ und OR ersetzt werden kann.

Die Verallgemeinerung der Fresnel'schen Regel liegt auf der Hand, denn es ist klar, dass alles, was wir von der Zusammensetzung zweier Bewegungen gesagt haben, von selbst auch für den Fall einer beliebigen Anzahl von Bewegungen gilt.

Interferenz der Schallwellen in einer begrenzten Röhre. — Es dürfte von Nutzen sein, die schon früher durchgeführte Untersuchung der Übereinanderlagerung einer directen und einer reflectirten Bewegung nochmals analytisch aufzunehmen. Zur Vereinfachung der Rechnungen und mit Rücksicht auf die späteren Anwendungen wollen wir eine ebene Welle betrachten, die vom Anfang einer Röhre von der Länge L ausgeht; diese Welle pflanzt sich bis zum Ende der Röhre fort, wird hier, wie wir im § 350 sahen, reflectirt und lagert sich über die directe Welle, welche von der am Röhrenanfang unterhaltenen Bewegung herrührt.

Wir wollen zuerst eine geschlossene Röhre (gedeckte Pfeife) untersuchen. In einem beliebigen Punkte eines in der Entfernung x vom geschlossenen Ende befindlichen Querschnittes sind die Geschwindigkeiten der beiden zusammentreffenden Bewegungen, wenn man von der Verminderung der Amplitude im reflectirten Wellenzuge absieht

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L - x}{\lambda} \right)$$

und

$$- a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L + x}{\lambda} \right), ^1)$$

¹⁾ Diese Formel erhält man, einerlei ob man den geometrischen Weg $L + x$ betrachtet, der von der reflectirten Welle zurückgelegt ist, und

und die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung, die gleich der Summe der Geschwindigkeiten der componirenden Bewegungen ist, wird demnach

$$v = 2a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

Diese Formel sagt unmittelbar folgendes aus:

1. Zu einer gegebenen Zeit ist v in den Punkten Null, für welche gilt:

$$\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = k \frac{\lambda}{2},$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Man erhält also eine Reihe von festen Knotenpunkten in den Entfernungen

$$0, \quad \frac{\lambda}{2}, \quad 2 \frac{\lambda}{2}, \quad 3 \frac{\lambda}{2}, \quad \dots$$

vom Ende der Röhre.

2. Für einen gegebenen Werth von t ist der absolute Werth von v ein Maximum in allen Punkten, für welche die Beziehung gilt

$$\sin 2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm 1, \quad \text{oder} \quad x = (2k + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Es tritt also eine Reihe von Bäuchen an den Stellen

$$\frac{\lambda}{4}, \quad \frac{3\lambda}{4}, \quad \frac{5\lambda}{4}, \quad \frac{7\lambda}{4}, \quad \dots$$

auf; hierbei besitzen die Geschwindigkeiten in zwei auf einander folgenden Bäuchen, oder allgemeiner, in zwei auf einander folgenden Internodien das entgegengesetzte Vorzeichen; der Zeichenwechsel tritt in den Knotenpunkten ein.

3. Für einen gegebenen Werth von x ist die Geschwindigkeit eine Kreisfunction der Zeit, deren Periode überall $= \tau$ und deren Phase unabhängig von x ist; die Geschwindigkeiten sind also auf der ganzen Länge L gleichzeitig Null oder Maxima.

gleichzeitig das negative Zeichen für die zu dieser Bewegung gehörige Geschwindigkeit berücksichtigt, oder ob man den physikalischen Weg $L + x + \frac{\lambda}{2}$ in Rechnung zieht, ohne sich um den Zeichenwechsel zu kümmern.

Die Verdichtung γ im Punkte x ist

$$\gamma = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

wobei u die Verschiebung im betreffenden Punkte bedeutet. Nun ist

$$v = \frac{\partial u}{\partial t},$$

folglich

$$u = 2a \frac{\tau}{2\pi} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda} \right)$$

und

$$\gamma = -2a \frac{\tau}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda} \right);$$

berücksichtigt man die Grundgleichung $\lambda = V\tau$, wobei V die Schallgeschwindigkeit in dem betreffenden Medium bezeichnet, so erhält man

$$\gamma = -\frac{2a}{V} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

Es lässt sich also die Verdichtung in einem gegebenen Punkte durch dieselbe periodische Function der Zeit darstellen, wie die Geschwindigkeit; nur in der Phase tritt eine Abweichung auf, denn es ist $-\sin 2\pi \frac{t}{\tau} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{1}{4} \right)$. Zu einer gegebenen Zeit sind also die Verdichtungen längs des Rohres nach demselben Gesetze vertheilt, wie die Geschwindigkeiten, nur zeigt die Verdichtung da ein Maximum, wo die Geschwindigkeit Null ist, d. h. an den Knotenpunkten, und sie ist da Null, wo die Geschwindigkeit ein Maximum erreicht, d. h. in den Bäuchen.

Bei einer offenen Röhre (offenen Pfeife) kann man die Geschwindigkeiten der beiden interferirenden Bewegungen darstellen durch

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L-x}{\lambda} \right)$$

und

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L+x}{\lambda} \right).$$

Die Geschwindigkeit der resultirenden Bewegung ist also

$$v = 2a \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda} \right)$$

und die Verdichtung

$$\gamma = -\frac{2a}{V} \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{L}{\lambda} \right).$$

Diese Gleichungen sind, bis auf einen constanten Factor, dieselben wie die für eine geschlossene Röhre geltenden, nur bezeichnet die Formel, welche dort die Geschwindigkeit darstellte, hier die Verdichtung und besitzt ein anderes Voreichen, und umgekehrt. Daraus folgt, dass sich hier ein Bauch befindet, wo dort ein Knoten war, und umgekehrt. Die Knoten sind dabei immer durch die doppelte Eigenschaft charakterisirt, dass in ihnen die Geschwindigkeit zu jeder Zeit Null ist, und dass die Verdichtung im Vergleich zur Verdichtung in den anderen Punkten ein Maximum ist, sich aber, absolut genommen, nach dem Gesetze der Schwingungsbewegung periodisch ändert; in den Bäuchen dagegen ist die Verdichtung immer Null und die Geschwindigkeit ein relatives Maximum, dessen absoluter Betrag zwischen zwei Grenzwerten, einem positiven und einem negativen, hin und her schwankt.

Fünftes Capitel.

Pfeifen.

358. Luftschwingung in einer Pfeife. — Die Anwendung der Blasinstrumente geht bis ins fernste Alterthum zurück: die Erfindung der Schalmey, der Flöte, der Trompete verliert sich in grauer Vorzeit. In unseren Tagen haben die Blasinstrumente eine beträchtliche Weiterentwicklung erfahren, so dass z. B. grosse Orgeln Tausende von Pfeifen aller Art vereinigen.

Im Wesentlichen schwingt in diesen verschiedenen Instrumenten nur die Luft. Die Orgelpfeifen werden ebensowohl aus Holz wie aus Metall hergestellt; die Tonhöhe hängt nicht von dem Material ab, aus welchem die Wände bestehen, wenn diese nur genügend dick und widerstandsfähig sind. Drei Pfeifen aus Kupfer, Holz und Pappe geben bei gleichen Dimensionen denselben Ton, wenn nur die Pappe nicht so dünn ist, dass sie an den Schwingungen der Luft im Innern Theil nimmt, denn dann würde diese Pfeife einen tieferen Ton liefern, als die beiden anderen. Im Gegensatze dazu beeinflusst die Natur des Gases die Tonhöhe; diese nimmt zu oder ab, je nachdem man ein leichtes Gas (Leuchtgas, Wasserstoff) oder ein schwereres Gas (Kohlensäure oder Stickoxydul) verwendet.

Die Luft in der Röhre kann auf ganz verschiedene Weise in Bewegung gesetzt werden. Eine Stimmgabel, die man der Öffnung einer Röhre nähert, theilt ihre Bewegung der Luft im Innern mit, und, wenn die Länge der Luftsäule passend gewählt ist, so wird der Ton der Stimmgabel bedeutend verstärkt werden. Ge-

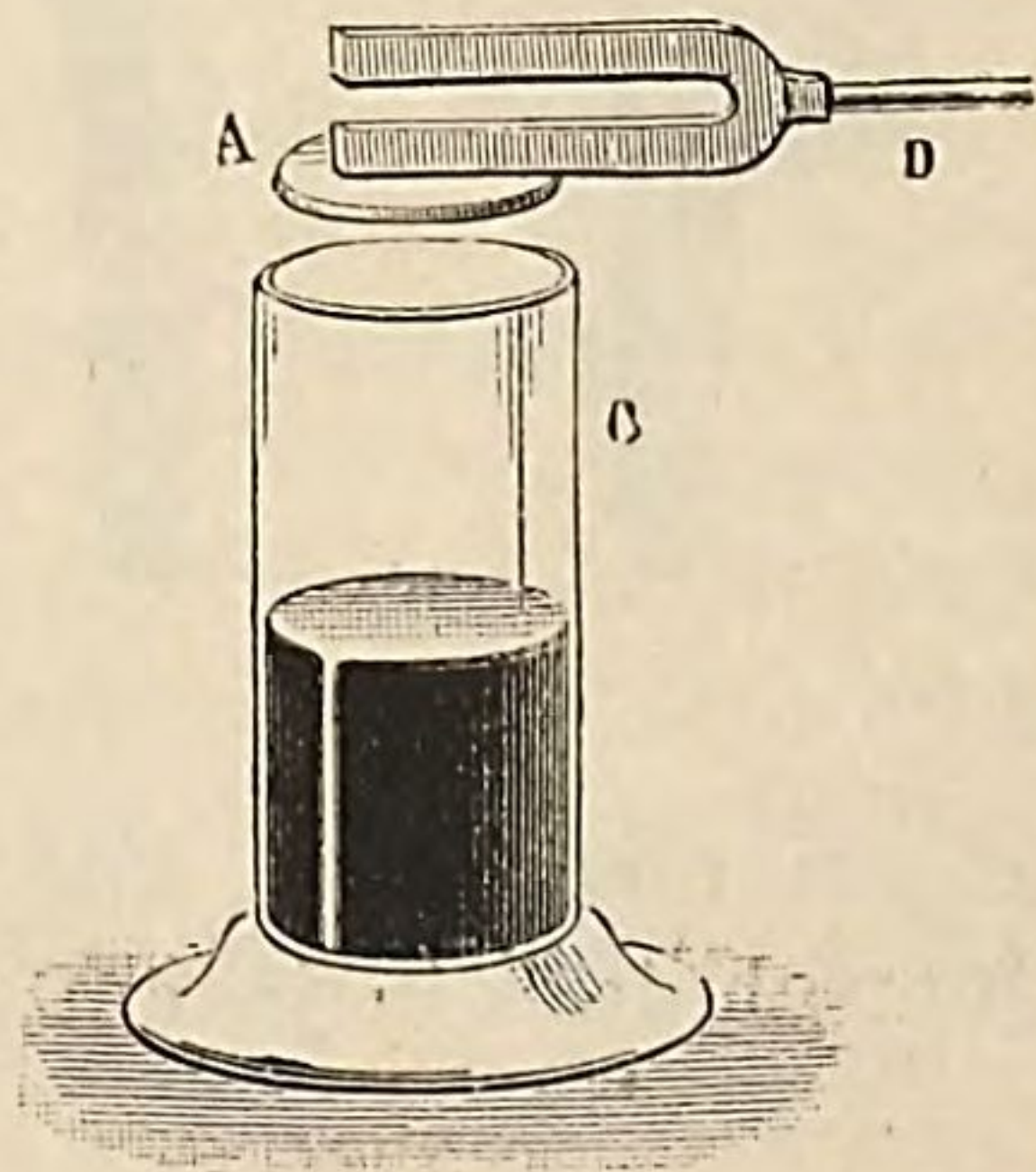


Fig. 61.

wöhnlich verwendet man, um eine Pfeife zum Tönen zu bringen, ein *Mundstück*, das auf den Luftstrom eines Gebläses anspricht.

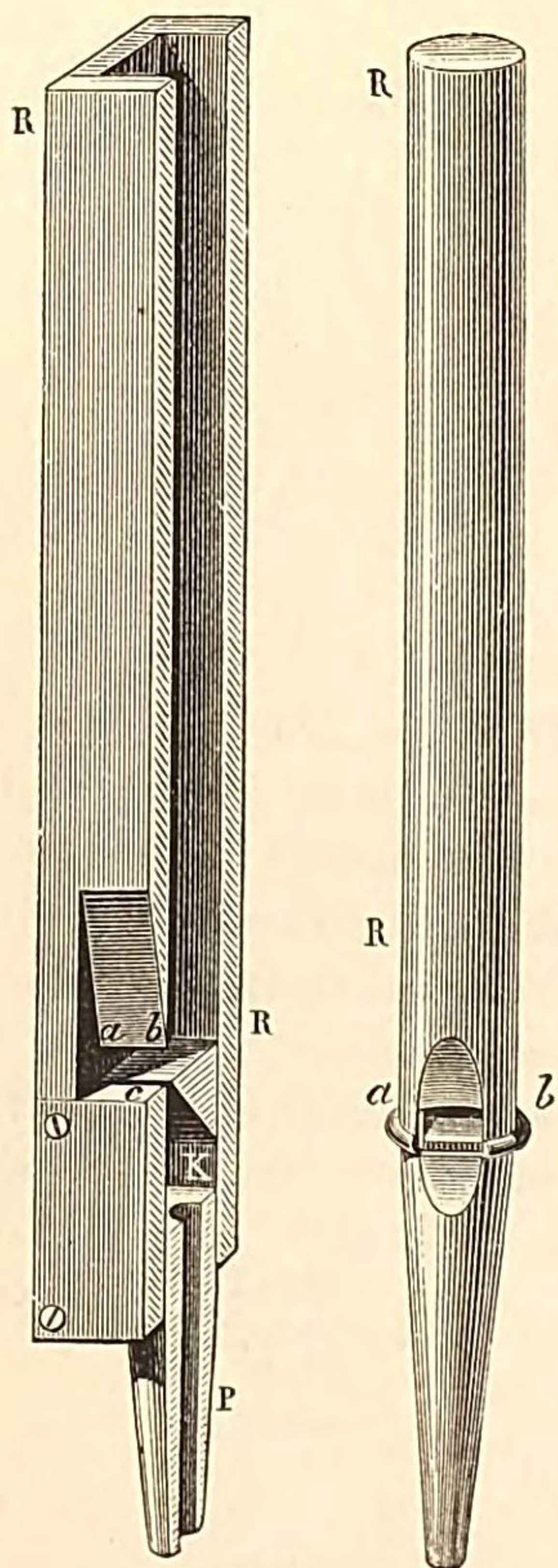


Fig. 62.

Das gebräuchlichste Mundstück ist das in Fig. 62 abgebildete *Flötenmundstück*. Der *Fuss* *P* steht auf der *Windlade* eines Gebläses; von dort tritt die Luft in die *Windkammer* *K* ein, verlässt dieselbe durch die *Lichtspalte* (*Kernspalte*) *c*, um gegen die abgeschrägte *Lippe* *ab* zu stossen. Der zwischen der Lichtspalte *c* und der Lippe *ab* liegende Raum heisst der *Kern*. Die Reibung der Luft an der Lippe verursacht ein Pfeifen, das man bei einem isolirten Mundstücke sehr gut hören kann;¹⁾ dies Geräusch besteht aus einer grossen Anzahl disharmonischer Töne, von denen die Röhre *RR* denjenigen (oder diejenigen) verstärkt, welcher zu ihren Eigentönen gehört.²⁾

359. Gesetz von Bernoulli. —

Die Töne einer Pfeife gehorchen gewissen von Daniell Bernoulli³⁾ aufgestellten Gesetzen, die sich unmittelbar aus den oben entwickelten Sätzen ergeben.

Wir nehmen an, die Querdimensionen der Röhre seien so gering, dass die Bewegung sich nur von Querschnitt zu Querschnitt fortpflanzt, und alle Punkte ein und desselben normalen Querschnittes in jedem Augenblicke die gleiche, parallel zur Achse

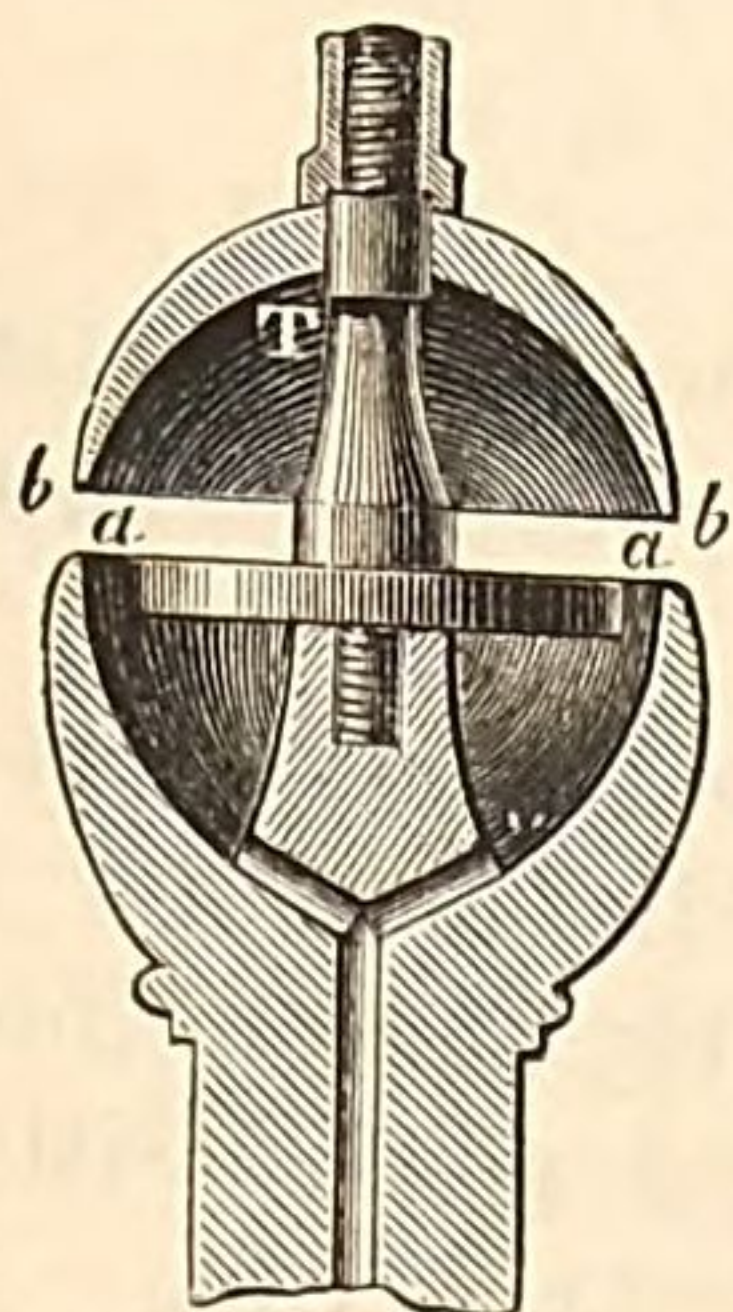


Fig. 63.

¹⁾ Eine Locomotivpfeife ist thatsächlich nichts anderes als ein Pfeifenmundstück, das aus einer kreisförmigen Spalte *aa* besteht, über der sich der scharfe Rand *bb* der Glocke *T* befindet.

²⁾ Die Tonhöhe ist unabhängig von der Substanz, aus welcher die Lippe besteht, vorausgesetzt, dass diese starr ist; dagegen nimmt die Tonhöhe zu, wenn man die Lippe der Spalte nähert. Ebenso steigt auch die Tonhöhe, wenn die Geschwindigkeit des Luftstromes zunimmt.

³⁾ D. Bernoulli, *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1762, S. 431.

gerichtete Geschwindigkeit besitzen. Dann schreitet die beim Mundstücke beginnende Bewegung in der Röhre bis zum Ende der letzteren fort, wird hier reflectirt, durchmisst rückwärts die gleiche Strecke, und, indem sie sich über die directe, am Röhrenanfang unterhaltene Bewegung lagert, bringt sie das früher betrachtete System von stehenden Schwingungen mit festen Knoten und Bäuchen hervor. Aber auch am Ausgangspunkte wird die Schallwelle wieder reflectirt und tritt den Weg von Neuem an, sie bildet also gewissermaassen eine neue directe Welle. Stimmt diese neue Welle mit der ursprünglichen überein, so wird sie genau ebenso am Ende der Röhre wieder reflectirt werden und mit der zu ihr gehörigen reflectirten Welle, — d. h. also mit der im Ganzen dreimal reflectirten, — ein Wellensystem erzeugen, das demjenigen völlig identisch ist, welches aus der Interferenz der ursprünglichen mit der einmal reflectirten Welle entstand. Das Gleiche tritt ein bei der Interferenz der viermal reflectirten mit der fünfmal reflectirten Welle, und so fort. Diese sämtlichen Bewegungen zusammen genommen werden den ursprünglichen Ton ganz bedeutend verstärken. Um also zu entscheiden, in welchen Fällen eine solche Verstärkung eintritt, genügt es, die Bedingungen der Übereinstimmung zwischen der zweimal reflectirten und der directen Welle zu untersuchen.

I. *Offene Pfeifen.* — Die vom Mundstück ausgegangene, zum ersten Male an dem freien Ende, zum zweiten Mal am Ausgangspunkt reflectirte Welle hat in ihrer Geschwindigkeit keinen Zeichenwechsel erlitten; in Bezug auf die Verdichtung dagegen sind zwei Zeichenwechsel nach einander eingetreten, so dass das ursprüngliche Zeichen wieder hergestellt ist. Die zweimal reflectirte Welle wird also mit der directen Welle übereinstimmen, wenn der durchlaufene Weg, d. h. die doppelte Länge L der Röhre, die Wellenlänge λ des betreffenden Tones k -Mal enthält, wobei k eine ganze Zahl sein muss. Die Bedingung für die Verstärkung ist somit

$$2L = k\lambda$$

oder, nach der Beziehung $\lambda = V\tau = \frac{V}{N}$, wobei N die Schwingungszahl des Tones von der Periode τ bedeutet,

$$N = k \frac{V}{2L}.$$

Diese Formel enthält alle für die offenen Pfeifen giltigen Gesetze:

1. Eine offene Röhre kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahl in dem Verhältniss $1:2:3:4 \dots$ stehen, d. h. ausser dem Grundtone auch noch die vollständige Reihe der harmonischen Obertöne.

2. Die Höhe eines jeden dieser Töne steht im umgekehrten Verhältnisse zur Länge der Röhre.

3. Der tiefste Ton, den die Röhre liefert, der *Grundton*, ist durch die Zahl $k = 1$ bestimmt; seine Wellenlänge ist doppelt so gross als die Röhrenlänge

$$\lambda = 2L,$$

und seine Höhe wird bestimmt durch die Schwingungszahl

$$N = \frac{V}{2L}.$$

4. Die Lage der festen Knoten und Bäuche der verschiedenen Töne zeigt Fig. 64; an jedem der beiden offenen Enden befindet sich nothwendigerweise ein Bauch.

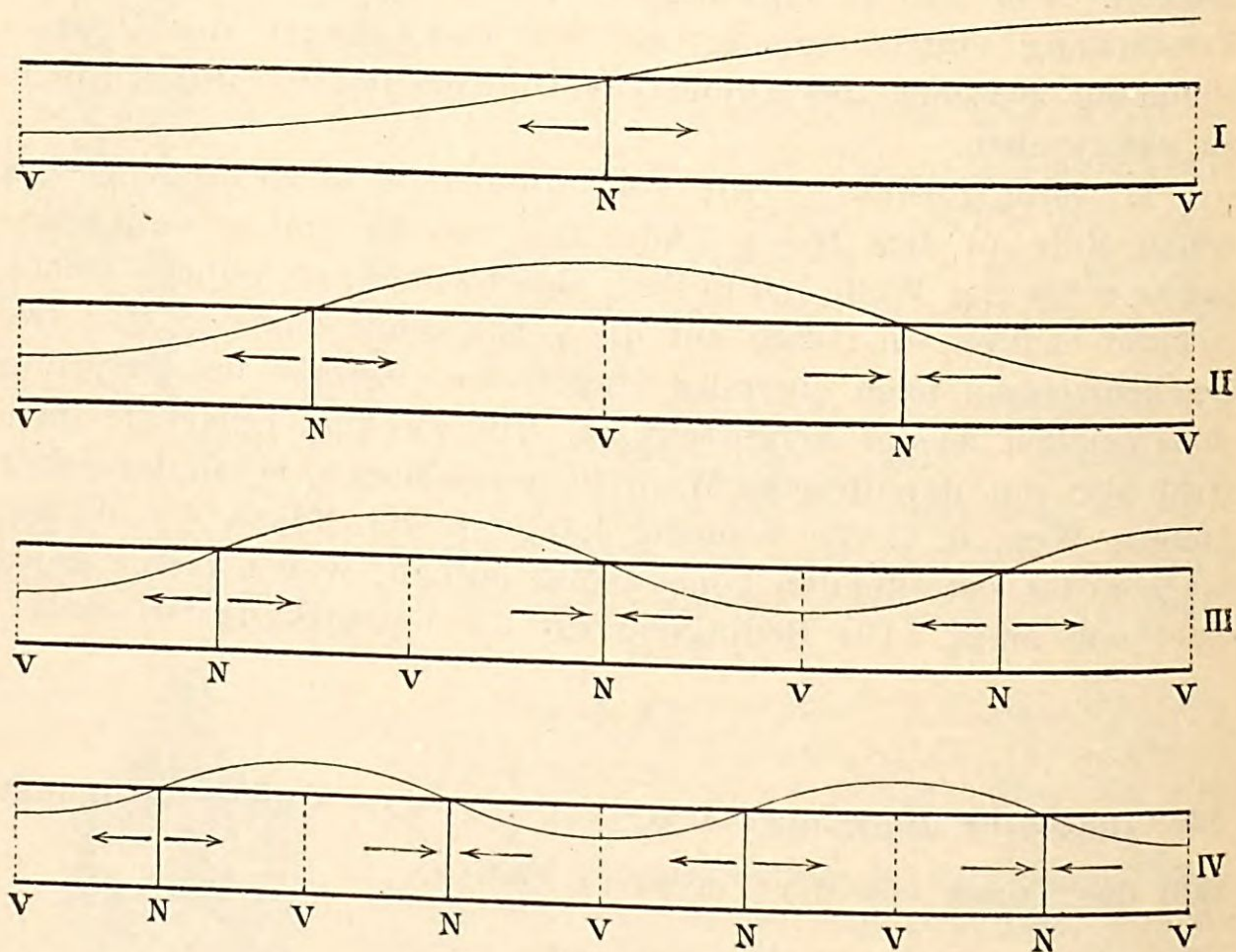


Fig. 64.

In den auf einander folgenden Internodien besitzen die Geschwindigkeiten entgegengesetztes Vorzeichen. Wenn die in diesen Figuren gezogenen Curven die Geschwindigkeiten zu einer be-

stimmten Zeit darstellen, so werden diese Geschwindigkeiten nach einer halben Periode überall gleiche, aber entgegengesetzte Werthe angenommen haben. Demgemäss sind die auf einander folgenden Knoten abwechselnd Verdichtungs- und Verdünnungsknoten, die sämmtlich alle halben Perioden gleichzeitig ihr Vorzeichen wechseln, während die Luft im Innern für einen Augenblick überall unter dem Drucke der äusseren atmosphärischen Luft steht.

II. *Gedekte Pfeifen.* — Da bei den gedekten Pfeifen in Folge der Reflexion am Ende die Geschwindigkeit ihr Vorzeichen ändert und in Folge der Reflexion am Anfang die Verdichtung ebenfalls, so wird die zweimal reflectirte Welle mit der directen Welle übereinstimmen, wenn der durchlaufene Weg $2L$, um $\frac{\lambda}{2}$ vergrössert, gleich $k\lambda$ ist; es muss also sein

$$4L = (2k - 1)\lambda$$

oder

$$N = (2k - 1) \frac{V}{4L}.$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Gesetze:

1. Eine gedekte Pfeife kann eine Reihe von Tönen geben, deren Schwingungszahlen zu einander im Verhältniss der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . . stehen.

2. Die Höhe irgend eines dieser Töne steht im umgekehrten Verhältnisse zur Länge der Pfeife.

3. Die Wellenlänge des Grundtones beträgt das Vierfache der Röhrenlänge

$$\lambda = 4L,$$

während seine Schwingungszahl gegeben ist durch

$$N = \frac{V}{4L}.$$

Der Grundton einer gedekten Pfeife ist also die tiefere Octave des Grundtones einer offenen Pfeife von gleicher Länge.

4. Beistehende Fig. 65 zeigt die Vertheilung der Knoten und Bäuche für die verschiedenen Töne; am Ende der Pfeife befindet sich stets ein Knoten.

Da jeder Ton die tiefere Octave des entsprechenden Tones darstellt, welchen eine offene Pfeife von derselben Länge geben würde, so ist er identisch mit demjenigen, welchen eine offene Pfeife lieferte, die man um ihre eigene Länge über das Ende

hinaus verlängert haben würde; in einer solchen Röhre sind offenbar nur die geraden Obertöne möglich.

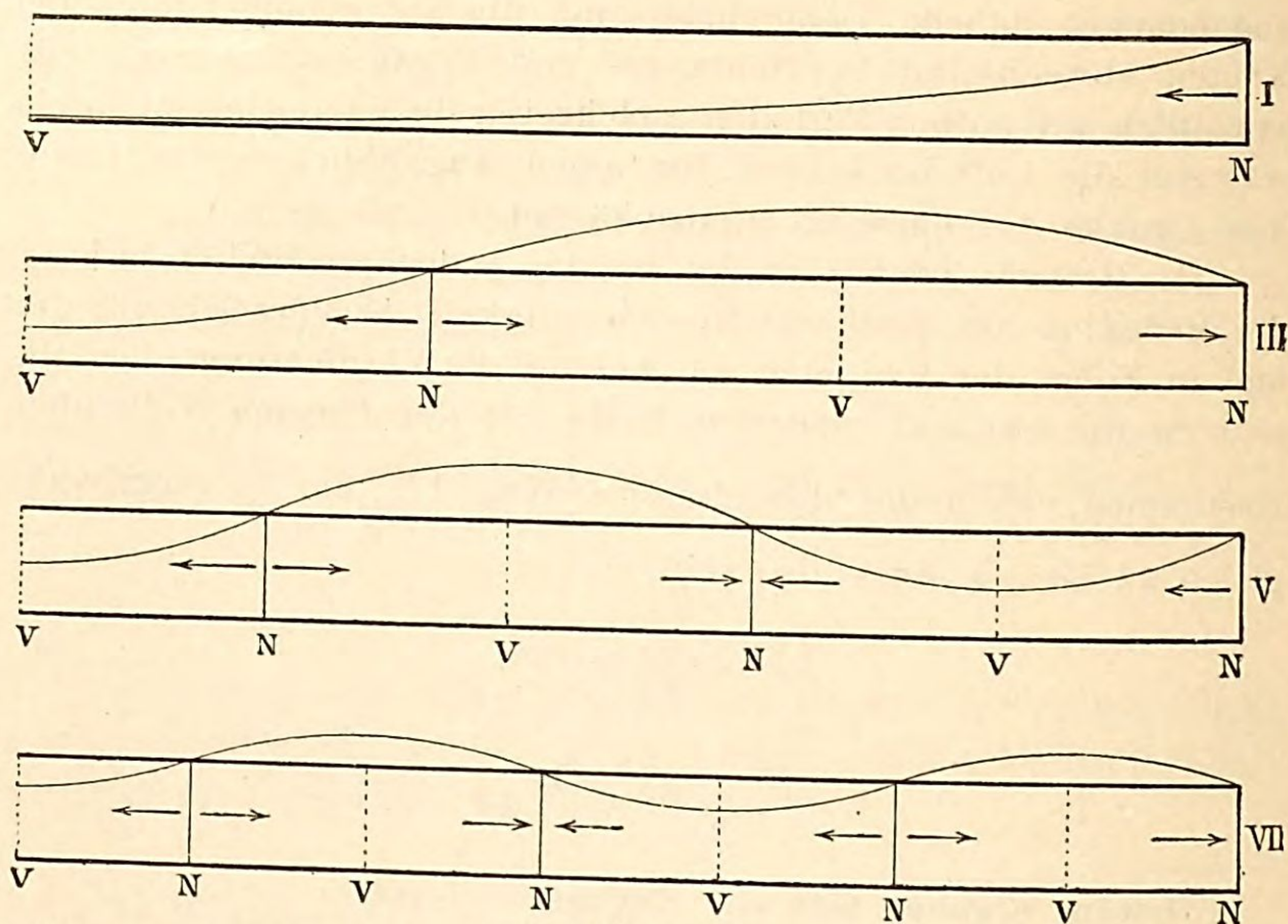


Fig. 65.

360. Experimentelle Bestätigung. — Das Experiment stimmt im Allgemeinen befriedigend mit der oben durchgeführten Theorie überein.

1. Mersenne¹⁾ giebt an, dass man mit dem Horne leicht den Grundton, die Octave, Duodecime (Quinte der Octave) und die doppelte Octave erhält, nicht aber die dazwischen liegenden Töne. Sauveur²⁾ führt ähnliche Thatsachen an; der erste jedoch, welcher die gesetzmässige Folge der Obertöne bei offenen wie bei gedeckten Pfeifen genau studirte, war Bernoulli. Um diese Untersuchung nach seiner Methode durchzuführen, setzt man ein langes und enges Rohr, z. B. eine lange Glasröhre, auf ein Pfeifenmundstück und lässt einen Luftstrom unter wachsendem Drucke eintreten; dann folgen die Töne in der harmonischen Reihe auf einander. Ohne Schwierigkeit erhält man bei einer offenen Röhre die sämtlichen Obertöne bis zum zwanzigsten,³⁾ bei einer ge-

¹⁾ Mersenne, loc. cit. S. 271.

²⁾ Sauveur, Mémoires de l'Académie des sciences, 1701, S. 299.

³⁾ Bei einer sehr langen Pfeife erhält man den Grundton nur sehr schwer, da das Instrument viel leichter die Octave des Grundtones angiebt.

geschlossenen dagegen nur die geraden Obertöne. Hierbei findet der Übergang von einem zum anderen nicht ganz unvermittelt statt, vielmehr bleibt der Ton anfangs etwas unter der richtigen Höhe und steigt dann unter gleichzeitigem Anschwellen an, bis die betreffende Tonhöhe vollständig erreicht ist; in diesem Augenblicke hat er auch seine volle Intensität gewonnen, denn die Maximalintensität tritt dann ein, wenn vollkommene Übereinstimmung aller in der schwingenden Säule befindlichen, über einander gelagerten Wellen vorhanden ist. Übrigens können die verschiedenen Töne, deren Zustandekommen man auf diese Weise successive nachweist, augenscheinlich auch zusammen auftreten; thatsächlich ist auch der Grundton einer engen cylindrischen Röhre stets von deutlich vernehmbaren Obertönen begleitet.

2. Das Gesetz, dass die Tonhöhe der Länge der Röhre umgekehrt proportional ist, kennt man schon seit langer Zeit. Bei sehr langen und engen Röhren lässt es sich nachweisen, dagegen erleidet es im Allgemeinen gewisse Störungen, auf die wir später zu sprechen kommen werden.

3. Die Beziehung zwischen den Grundtönen einer offenen und einer geschlossenen Pfeife kann man leicht dadurch bestätigen, dass man eine beliebige offene Pfeife mit einem Deckel versieht; dann erhält man sofort die tiefere Octave des Grundtones.

4. Zur Bestimmung der Lage der Knotenpunkte und der Bäuche lässt sich eine grosse Anzahl von Methoden verwenden.

Führt man in eine Pfeife, deren Wand aus Glas besteht, eine mit Sand bestreute Membran ein, so sieht man, dass nur an den Knotenpunkten der Sand in Ruhe bleibt, während er an sämtlichen übrigen Punkten der Röhre, hauptsächlich aber in den Bäuchen, aufgewirbelt wird. An Stelle der von Savart¹⁾ angewendeten, sandbestreuten Membran kann man ein Collodiumhäutchen (Gripon) oder auch ein Glycerinhäutchen (Mach) wählen. Der Versuch lässt sich ebensowohl für

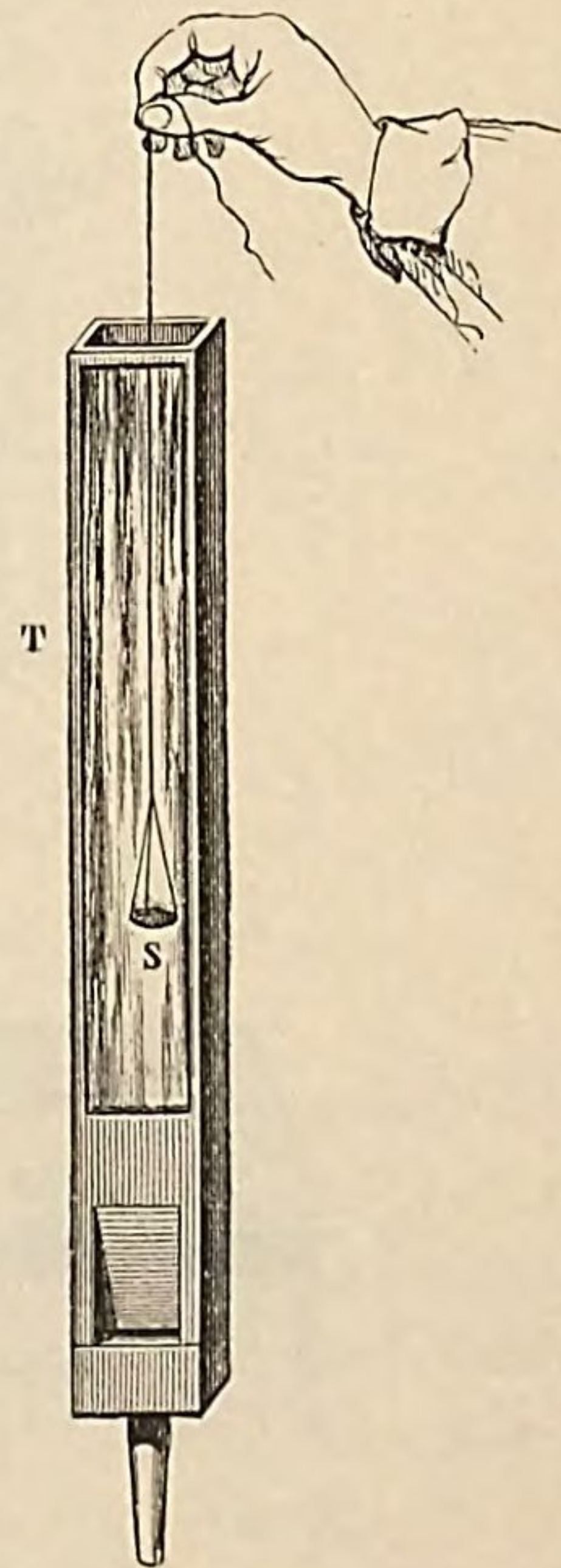


Fig 66.

¹⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), 24, 58; 1823.

einen beliebigen Oberton wie für den Grundton anstellen, und gleich gut in einer geschlossenen wie in einer offenen Röhre.¹⁾

Da der Druck in den Schwingungsbäuchen derselbe ist, wie der Druck der äusseren Luft, so ändert sich die Tonhöhe nicht,

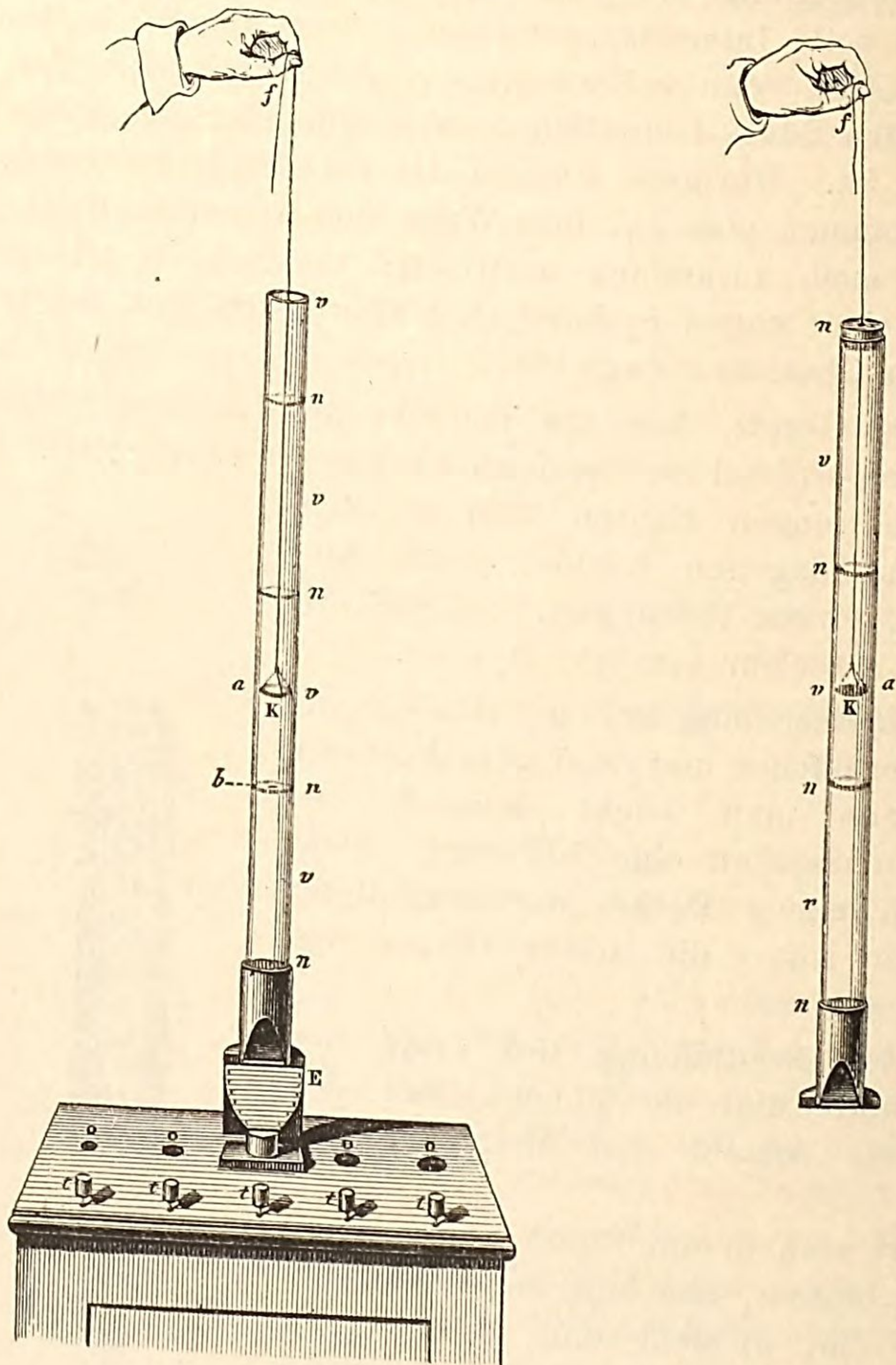


Fig. 67.

wenn man an der Stelle, wo sich ein Schwingungsbauch befindet, ein Loch in die Wandung der Röhre bohrt; dies gilt aber für keine andere Stelle. Bei der in Fig. 68 abgebildeten Röhre, welche so angeblasen wird, dass sie den zweiten Oberton giebt, verändert

¹⁾ In Betreff einiger eigenthümlichen Erscheinungen, die dies Experiment darbieten kann, vgl. auch v. Lang, Wied. Ann. 7, 292; 1879.

sich die Tonhöhe nicht, wenn man die den Bäuchen v , v entsprechenden Löcher öffnet, dagegen steigt dieselbe, wenn man die Klappen a oder b entfernt.

An den Knotenpunkten ist die Geschwindigkeit Null; macht man also die dort befindliche Luftschicht unbeweglich, so ändert man nichts an dem Zustande der schwingenden Säule. Giebt z. B. die offene Pfeife T den Grundton an, so können wir, ohne dass sich der Ton ändert, den beim Knotenpunkt angebrachten Schieber AS so weit hereinschieben, dass an Stelle des durchbrochenen Theiles S der volle Theil A tritt. Dieser Versuch lässt



Fig. 68.

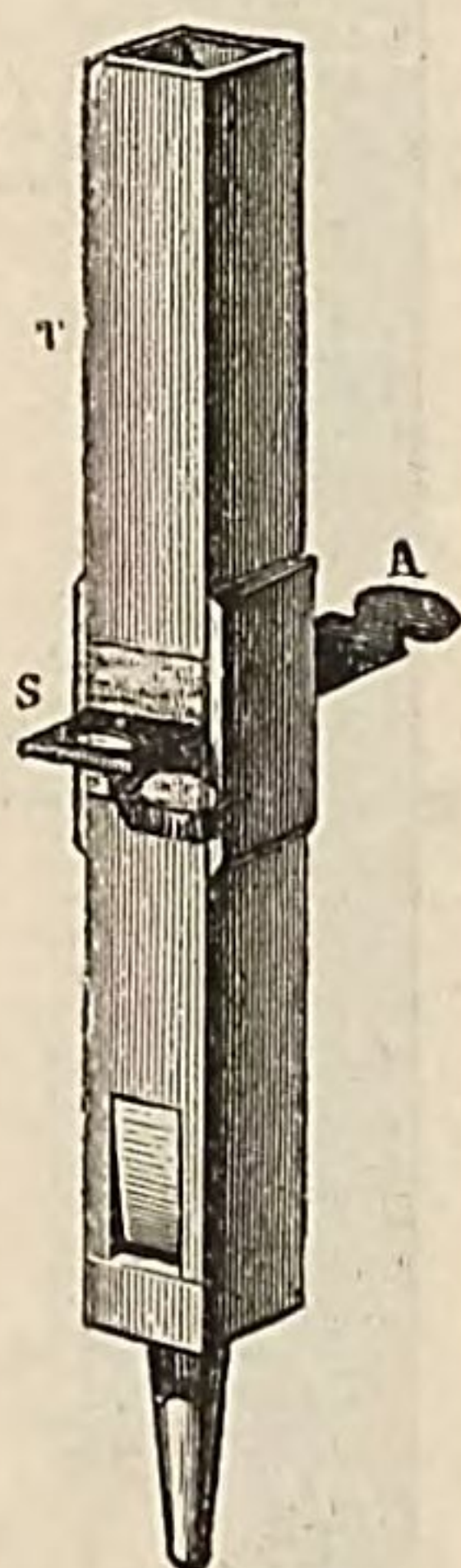


Fig. 69.

sich auch als Beweis dafür auffassen, dass eine gedeckte Pfeife denselben Ton giebt, wie eine offene Pfeife von doppelter Länge.

Da die Luft in den Knoten sich nicht bewegt, so muss hier der Druck ein Maximum sein; hier also sind die manometrischen Flammen von König anzubringen. Fig. 70 stellt eine offene Pfeife dar, die im Knoten a des Grundtones und an den Knoten b und c des ersten Obertones mit solchen Manometerkapseln versehen ist. Giebt die Pfeife den Grundton, so gerathen die drei Flammen in Bewegung, aber die in der Mitte zuckt viel stärker, als die beiden anderen, sie kann sogar, wenn der Ton stark genug ist, ausgelöscht werden. Dagegen bleibt die Flamme a vollkommen unbeweglich, während die beiden anderen b und c lebhaft zucken, wenn die Pfeife die höhere Octave des Grundtones giebt. Bei einer gedeckten Pfeife, wie sie ebenfalls in Fig. 70 dargestellt ist,

entspricht eine Flamme *b* nahe am Deckel immer einem Knoten; die anderen stehen im Bauche *a* und im Knoten *c* des ersten Obertones. Giebt die Pfeife den Grundton an, dann zucken alle drei Flammen, aber mit einer von *b* nach *c* abnehmenden Stärke. Giebt die Pfeife den Ton 3, dann bleibt die Flamme *a* unbeweglich, während die Flammen *b* und *c* beträchtliche Schwankungen

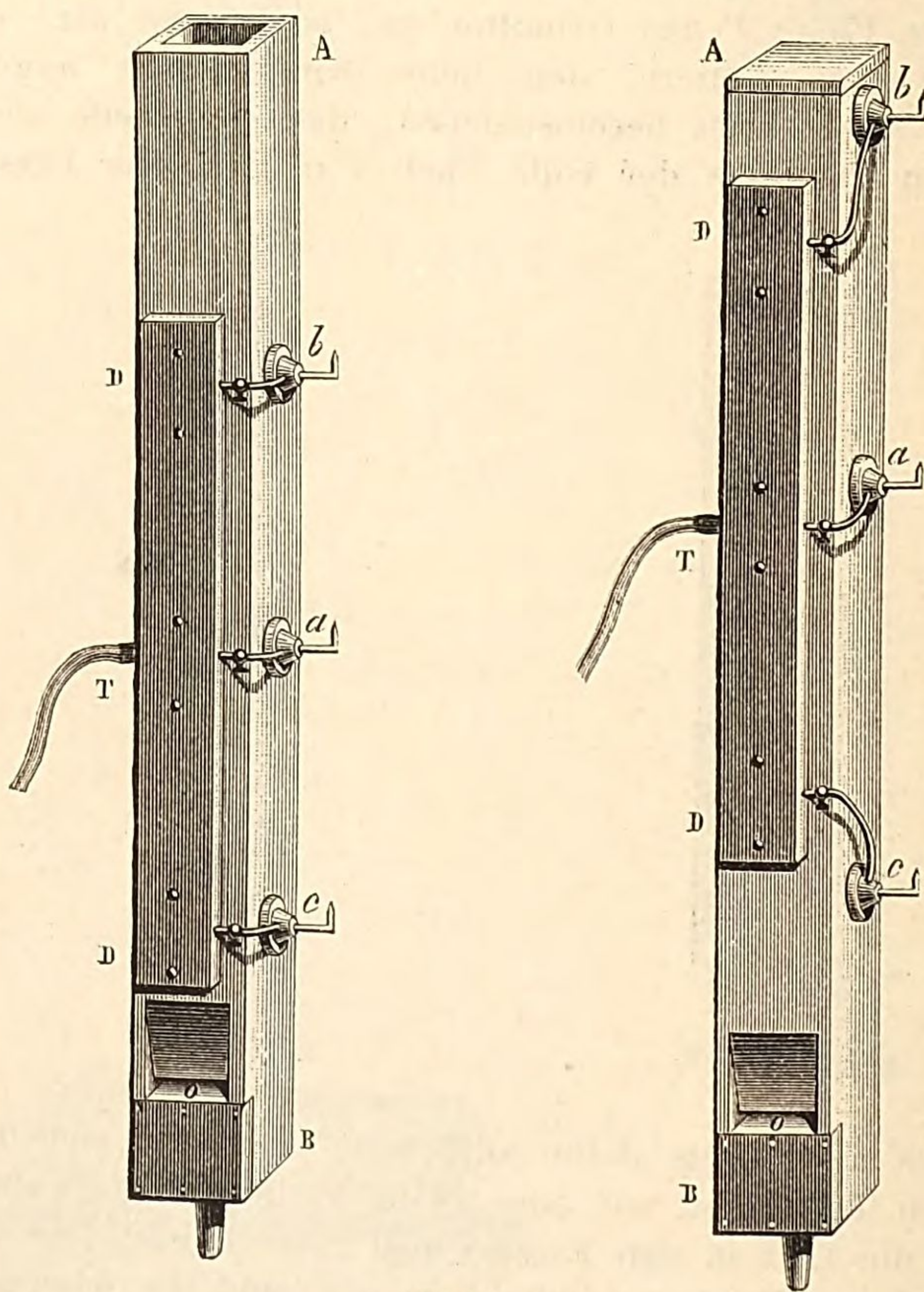


Fig. 70.

in Bezug auf Helligkeit und Höhe aufweisen. Bekanntlich besteht die einfachste Methode zur Untersuchung dieser Schwankungen darin, dass man die Flamme in einem rotirenden Spiegel betrachtet.

König¹⁾ construirte ausserdem noch einen Apparat, der es gestattet, den Zustand einer in Schwingung befindlichen Luftsäule bequem zu studiren. Eine grosse Orgelpfeife, die horizontal über

¹⁾ König, Wied Ann. 1881, 569; und Quelques expériences, S. 206.

einer langen Wanne liegt, ist ihrer ganzen Länge nach auf der Unterseite gespalten. Den Spalt durchsetzt der eine Arm ca einer U-Röhre, der im Mittelpunkte des Pfeifenquerschnittes endigt, während der aussen befindliche Arm db mit dem Ohre oder mit einer Manometerkapsel verbunden werden kann. In die Wanne giesst man eine Flüssigkeit, welche den Spalt fest abschliesst, gleichwohl aber gestattet, das Versuchsrohr längs der Pfeifenachse zu verschieben und seine Öffnung an jede gewünschte Stelle der schwingenden Luftsäule zu bringen. Fig. 71 stellt einen Querschnitt der Pfeife dar; dieselbe ist oben durch eine Glasscheibe geschlossen, über welcher der Schieber mn gleiten kann, der das Versuchsrohr $acdb$ trägt. Verschiebt man das U-Rohr längs der Pfeife, während diese einen beliebigen Ton angiebt, so hört

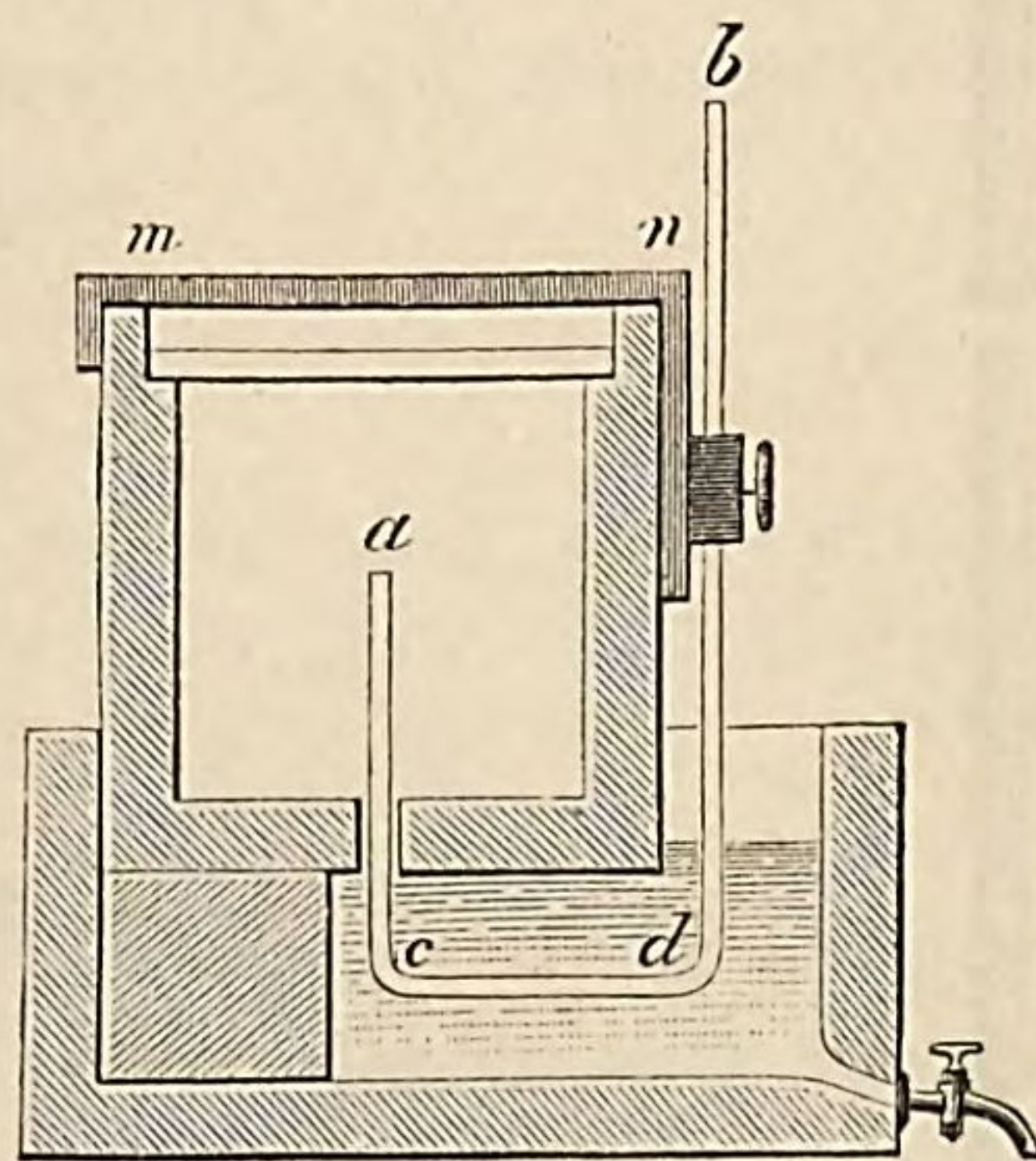


Fig. 71.

man den Ton mächtig anschwellen oder abnehmen, je nachdem sich die Mündung des U-Rohres an der Stelle eines Knotens oder eines Bauches befindet. Der Versuch zeigt, dass es ziemlich schwierig ist, den Ort eines Intensitätsmaximum mit dem Gehöre scharf zu bestimmen, dass sich dagegen die Intensitätsminima, welche den Bäuchen entsprechen, genau ermitteln lassen, da an den betreffenden Stellen der Ton plötzlich verschwindet. Die Beobachtung einer kleinen Flamme kann hierbei das Gehör unterstützen: Die Flamme leuchtet nämlich an den Stellen, wo sich ein Bauch befindet, plötzlich hell auf, während sie an sämtlichen übrigen Stellen bläulich brennt und geringe Leuchtkraft besitzt.

Wenn eine Pfeife auf einen Oberton angeblasen wird, dann zerfällt die Luftsäule in aliquote Theile, die gesondert schwingen, aber alle den gleichen Ton liefern.

Giebt beispielsweise eine offene Pfeife den dritten Oberton,

so ist die Luftsäule in vier Abschnitte von der Länge $\frac{\lambda}{2}$ getheilt, welche durch die Bäuche v, v, v begrenzt werden, und zwar derart, dass der Ton stets dieselbe Höhe behält, wenn man nach einander die drei obersten Abschnitte wegnimmt resp. dieselben wieder aufsetzt. Dieser Versuch lässt sich mit der Bernoulli'schen Pfeife ausführen, einem engen Rohre aus Polisanderholz, das aus vier



Fig. 72.



Fig. 73.

an einander gefügten, gleich langen Theilen besteht, deren unterster das Mundstück trägt.

Statt die Pfeife an den Stellen aus einander zu nehmen, wo sich ein Bauch befindet, können wir auch, nach Bernoulli's Vorgange, einen beweglichen Kolben p an die verschiedenen Knotenpunkte bringen, so dass die Pfeife dadurch verkürzt wird; wir dürfen dann eine beliebige Anzahl von Abtheilungen hinzufügen oder wegnehmen, ohne dass sich die ursprüngliche Tonhöhe irgendwie änderte.¹⁾

¹⁾ Ausser den offenen und den gedeckten oder *Bass-Pfeifen* wendet man in der Musik auch noch Rohrflöten an, geschlossene Pfeifen, in

Diese Messungen ergeben eine ziemlich Genauigkeit. So bestand nach Masson¹⁾ eine Bernoulli'sche Flöte, deren Ton eine halbe Wellenlänge von 0,138 m besass, aus Abschnitten von genau derselben Länge 0,138 m, mit Ausnahme desjenigen am Mundstück, dessen Länge nur 0,103 m betrug.

Stellt man ferner Versuche mit einem beweglichen Stempel in einer langen, engen Pfeife an, die einen Oberton höherer Ordnung giebt, wie es Desains und Lissajous²⁾ thaten, so findet man, dass die Länge der Internodien für die ganze Röhre dieselbe bleibt und der halben Wellenlänge des hervorgebrachten Tones gleich ist.

Die Pfeife von König lieferte dieselben Resultate; König fand beispielsweise für den siebenten Oberton einer 2,33 m langen und 0,12 m breiten offenen Pfeife folgende in Millimeter ausgedrückte Entfernungen der auf einander folgenden Bäuche, vom Mundstück an gerechnet:

173, 315, 320, 314, 316, 312, 309, 271.

Die sechs mittleren Zahlen sind unter einander ziemlich gleich, ihr Mittel beträgt 314; die erste Zahl dagegen liegt um 141, die letzte um 43 unter diesem Mittel.³⁾

Das Experiment bestätigt also die Angaben der Theorie, abgesehen von der Beziehung zwischen der Länge der Pfeifen und der Wellenlänge. Die Länge der offenen oder geschlossenen Pfeife ist geringer als die theoretische Länge $\frac{\lambda}{2}$ resp. $\frac{\lambda}{4}$ ihres Grundtones. Giebt die Pfeife einen Oberton, so beträgt die Entfernung der Bäuche und Knoten über die ganze Röhrenlänge hinweg $\frac{\lambda}{4}$, mit Ausnahme des ersten Knotens, der immer näher am Mundstücke liegt,

deren Deckel sich eine Öffnung befindet, an welche eine kleine offene Röhre von passender Länge angesetzt ist. Die Theorie dieser Instrumente ist von Bernoulli, Poisson und Duhamel durchgeführt worden; Gripon bestätigte auf experimentellem Wege die wichtigste Folgerung dieser Theorie, die mit den oben erwähnten Thatsachen übereinstimmt, nämlich, dass die Schwingungen der beiden Luftsäulen von verschiedenem Durchmesser, welche die Rohrflöte bilden, unter sich im Einklang sind, während die Knoten und Bäuche in jeder derselben sich in der theoretisch abgeleiteten Entfernung vom freien Ende befinden (Gripon, Ann. de l'Éc. norm. (1), 1; 1864).

¹⁾ Masson, Ann. de chim. et de phys. (3), 40, 463; 1855.

²⁾ Desains et Lissajous, Expériences inédites, angeführt in Desains, Leçons de physique 2, 70; Paris, Desobry, 1860.

³⁾ Vgl. Hurion, Journal de physique (2), 1, 136; 1882.

und des letzten Knotens in einer offenen oder des letzten Bauches in einer gedeckten Pfeife,¹⁾ die ebenfalls um weniger als $\frac{\lambda}{4}$ vom Ende entfernt liegen. Diese Abweichungen rühren von den Störungen an den Enden her.

361. Störungen an den Enden. — Ursache derselben. —

Die grösste Unregelmässigkeit tritt am Mundstücke auf; sie rührt davon her, dass in Folge der Art und Weise der Erschütterung die Verdichtung an allen Punkten des Querschnittes am Pfeifenanfang nicht, wie es die Theorie erfordert, Null ist.

Am freien Ende einer offenen Pfeife entspricht der thatsächliche Vorgang ebenfalls nicht genau unserer bisherigen Voraussetzung. Unter dem Einflusse des die Pfeife durchsetzenden Luftstromes verlängert sich nämlich die schwingende Luftsäule über die Wände hinaus, die Reflexion an der äusseren Luft findet also nicht genau in der Endfläche statt, sondern etwas darüber hinaus, und auch an den Punkten, wo die Reflexion wirklich stattfindet, ist die Verdichtung, streng genommen, nicht Null: Die Dichte der Luft im Innern entspricht nämlich nicht der constanten Dichte der in Ruhe befindlichen, sondern vielmehr der variablen Dichte eben dieser in Schwingungen begriffenen äusseren Luft.

Bei den gedeckten Pfeifen hatten wir angenommen, die Geschwindigkeit im letzten Querschnitte sei Null, vorausgesetzt, dass der Deckel absolut fest ist. Diese letztere Bedingung lässt sich indessen thatsächlich nicht streng verwirklichen; immerhin ist es nicht schwer, dem Verschlusse eine solche Festigkeit zu geben, dass die Störung dort nur sehr gering wird.

*Theorie von Poisson.*²⁾ — Poisson verwarf zuerst die Annahme, dass die Verdichtung an den freien Enden Null sei; er nahm nur an, dass sie sehr klein, aber der Geschwindigkeit³⁾ proportional sei und gründete darauf eine Theorie, welche den beobachteten Thatsachen Rechnung trug, die verschiedenen Gesetze enthielt und

¹⁾ Dies Resultat folgt wenigstens aus den Versuchen von König; Savart hatte im Gegensatze dazu gefunden, dass die Entfernung zwischen dem Deckel einer gedeckten Pfeife und dem letzten Bauche grösser war, als $\frac{1}{4}$ Wellenlänge.

²⁾ Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences; 1817, 2, 305.

³⁾ Die letzte Annahme ist unnöthig, ja, sie ist sogar ungenau, denn zwischen der Geschwindigkeit und der Verdichtung am freien Ende einer offenen Pfeife ist ein Phasenunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge vorhanden; aus diesem Grunde liess Hopkins diese Annahme auch fallen.

auch die Unregelmässigkeiten erklärte, während sie über die Grösse der letzteren keinen Aufschluss gab.

*Arbeiten von Hopkins*¹⁾ und von Quet.²⁾ — Hopkins und Quet verbesserten diese Theorie und wiesen den Einfluss der mehrfachen Reflexionen an den Enden nach.

Wie wir früher bereits zeigten, besteht die Bedingung dafür, dass eine Röhre einen am Anfangspunkte derselben erzeugten Ton verstärkt, darin, dass die zweimal reflectirte Welle mit der directen Welle übereinstimmt. Ist dies nämlich der Fall, dann lagern sich alle zwei, vier, sechs Mal reflectirten Wellen über die directe Welle und bewirken bei der bedeutenden Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in sehr kurzer Zeit eine wesentliche Verstärkung des Tones. Worin besteht nun, genau genommen, die Wirkung einer solchen Superposition?

Wir wollen eine am Röhrenanfang unterhaltene Schwingungsbewegung

$$v = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau}$$

ins Auge fassen. Diese Bewegung wird am Ende der Röhre reflectirt, und wir nehmen mit Hopkins an, dass jede Reflexion gleichzeitig eine Veränderung in der Amplitude und in der Phase zur Folge hat. Die Amplitude der reflectirten Bewegung möge ma sein, wobei m einen Factor bezeichnet, der kleiner als 1 ist. Die reflectirte Bewegung lagert sich über die directe, und die hieraus resultirende Bewegung hat in einer Entfernung x vom Ende eine Amplitude A und eine Phase Φ , welche beide nach dem Fresnel'schen Gesetze durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$A^2 = a^2 [1 + m^2 + 2m \cos 2\pi(\varphi' - \varphi)]$$

$$\operatorname{tg} 2\pi\Phi = \frac{\sin 2\pi\varphi + m \sin 2\pi\varphi'}{\cos 2\pi\varphi + m \cos 2\pi\varphi'};$$

hierbei bedeuten φ und φ' die Phasen der componirenden Bewegungen im betrachteten Punkte.

An den Ausgangspunkt zurückgelangt wird die Bewegung wieder reflectirt; es möge $mm'a$ oder μa die Amplitude und Ψ die Phase der zweimal reflectirten Bewegung im Ausgangspunkte bezeichnen. Diese Bewegung giebt dann mit der dreimal reflectirten eine resultirende Bewegung, deren Amplitude μA und deren Phase

¹⁾ Hopkins, Cambridge Phil. Trans. 5; 1838.

²⁾ Quet, Journal de Liouville 20, 1; 1855.

$\Phi + \Psi$ sein wird, da die Interferenzbedingungen die gleichen bleiben, wie für das erste Paar, abgesehen davon, dass die Amplituden mit μ multiplicirt sind und die Phase jeder der componirenden Bewegungen um Ψ vermehrt ist: Jede der Seiten des Fresnel'schen Dreiecks ist mit μ multiplicirt und ist um den Winkel $2\pi\Psi$ gedreht.

In gleicher Weise wird die viermal reflectirte mit der fünfmal reflectirten Bewegung eine Resultante geben, deren Amplitude $\mu^2 A$ und deren Phase $(\Phi + 2\Psi)$ ist, und so fort ins Unendliche, da die Zahl der Bewegungen, durch deren Zusammenwirken schliesslich die definitive Bewegung zu Stande kommt, nach Verlauf einer sehr kurzen Zeit bereits eine recht beträchtliche ist. Die Intensität der Gesamtbewegung lässt sich also darstellen durch

$$A^2 \left\{ \begin{aligned} & [\cos 2\pi\Phi + \mu \cos 2\pi(\Phi + \Psi) + \mu^2 \cos 2\pi(\Phi + 2\Psi) + \mu^3 \cos 2\pi(\Phi + 3\Psi) + \dots]^2 \\ & + [\sin 2\pi\Phi + \mu \sin 2\pi(\Phi + \Psi) + \mu^2 \sin 2\pi(\Phi + 2\Psi) + \mu^3 \sin 2\pi(\Phi + 3\Psi) + \dots]^2 \end{aligned} \right\}$$

oder, nach einer leicht zu übersehenden Umformung

$$A^2 \left\{ \begin{aligned} & [1 + \mu \cos 2\pi\Psi + \mu^2 \cos 2(2\pi\Psi) + \mu^3 \cos 3(2\pi\Psi) + \dots]^2 \\ & + [\mu \sin 2\pi\Psi + \mu^2 \sin 2(2\pi\Psi) + \mu^3 \sin 3(2\pi\Psi) + \dots]^2 \end{aligned} \right\}.$$

Jeder der in den Klammern stehenden Ausdrücke ist jedoch bekannt; ¹⁾ der erste hat den Werth $\frac{1 - \mu \cos 2\pi\Psi}{1 - 2\mu \cos 2\pi\Psi + \mu^2}$, der zweite den Werth $\frac{\mu \sin 2\pi\Psi}{1 - 2\mu \cos 2\pi\Psi + \mu^2}$.

Demnach reducirt sich der obige Ausdruck auf

$$A^2 \frac{1}{1 - 2\mu \cos 2\pi\Psi + \mu^2}$$

oder

$$a^2 \frac{1 + m^2 + 2m \cos 2\pi(\varphi' - \varphi)}{1 - 2\mu \cos 2\pi\Psi + \mu^2}.$$

Da der Nenner von x unabhängig ist, so hängt die Lage der Knoten und Bäuche nur vom Zähler ab.

Die Bäuche entsprechen den Maxima des Zählers, d. h. den Stellen, an denen $\cos 2\pi(\varphi' - \varphi) = +1$.

¹⁾ Vgl. Bertrand, Cours de Calcul différentiel et integral 1, 389; Paris, Gauthier-Villars, 1864.

Nun ist

$$\varphi' - \varphi = \frac{L+x}{\lambda} - \frac{L-x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = \frac{2x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda},$$

wobei L immer die Pfeifenlänge und r die durch die Reflexion am Ende hervorgebrachte Verzögerung bedeutet.

Die Lage der Bäuche ist also bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{2x}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = k,$$

wobei k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, und die Entfernung zweier auf einander folgenden Bäuche

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

ist stets gleich einer halben Wellenlänge.

Dagegen wird der Abstand des dem Ende benachbarten Bauches von diesem Ende durch die Gleichung

$$\frac{2x_1}{\lambda} + \frac{r}{\lambda} = 1$$

gegeben, woraus folgt, dass bei einer offenen Pfeife diese Entfernung ist

$$x_1 = \frac{\lambda}{2} - \frac{r}{2}.$$

Bei einer gedeckten Pfeife, wo r sehr nahezu $= \frac{\lambda}{2}$ ist, kann man setzen: $r = \frac{\lambda}{2} + r'$, folglich

$$x'_1 = \frac{\lambda}{4} - \frac{r'}{2}.$$

Für einen gegebenen Ton hängt die Lage der Knoten und Bäuche nicht von der Länge der Pfeife ab (die von dem Ende ab zu zählen ist, an welchem die erste Reflexion stattfindet), wohl aber die Intensität des Tones.

In der That wird der absolute Werth der Intensität in einem beliebigen Punkte, da x und somit auch der Zähler constant ist, ein Maximum sein, wenn der Nenner ein Minimum wird, d. h. wenn $\cos 2\pi\Psi = +1$.

Nun ist aber

$$\psi = \frac{2L}{\lambda} + \frac{r + s}{\lambda},$$

wenn wir unter s die in Folge der Reflexion am Anfange auftretende Verzögerung verstehen.

Die Verstärkung wird also ein Maximum sein, wenn die Pfeifenlänge L der Gleichung

$$L + \frac{r}{2} + \frac{s}{2} = k \frac{\lambda}{2}$$

genügt, mit anderen Worten, wenn die um $\frac{r}{2} + \frac{s}{2}$ vergrösserte Pfeifenlänge ein ganzes Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt.

Am einfachsten ist die Annahme, dass jede dieser Verzögerungen r und s unabhängig von der Wellenlänge ist; ihre Summe ist dann eine Constante

$$r + s = 2l,$$

und die Bedingung für die Verstärkung wird

$$L + l = k \frac{\lambda}{2}.$$

Man findet also wiederum das oben angegebene Gesetz von dem Verhältniss von Röhrenlänge und Wellenlänge, mit dem einzigen Unterschiede, dass hier nicht genau die Länge der Röhre selbst, sondern die um eine constante Grösse l vermehrte Röhrenlänge zum Zwecke der Tonverstärkung ein genaues Vielfaches der halben Wellenlänge sein muss.

Bei einer gedeckten Pfeife haben wir $r = r' + \frac{\lambda}{2}$; man wird also

$$r + s = 2l' + \frac{\lambda}{2}$$

setzen, dann kommt

$$L + l' = (2k - 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Die am meisten verstärkten Töne sind also diejenigen, für welche die Pfeifenlänge, vermehrt um eine constante Grösse l' , ein ungerades Vielfaches einer viertel Wellenlänge ist.

*Versuche von Wertheim.*¹⁾ — Nach den Versuchen von Wertheim sind die Störungen an den Enden in der That unabhängig von der Wellenlänge. Wertheim befestigte auf einem und demselben Mundstücke nach und nach verschiedene Röhren von gleichem Durchmesser, aber verschiedener Länge. Dadurch, dass er einerseits diese Längen maass und andererseits die Schwingungszahlen der von den Pfeifen gegebenen Grundtöne ermittelte, erhielt er alle Elemente, welche zur Berechnung der gesuchten Constanten nothwendig waren. Es mögen beispielsweise die gedeckten Pfeifen von der Länge $L_1, L_2 \dots$ Töne mit den Schwingungszahlen $N_1, N_2 \dots$ liefern, dann erhält man

$$N_1 = \frac{V}{4(L_1 + l')} \quad \text{und} \quad N_2 = \frac{V}{4(L_2 + l')};$$

hierbei bedeutet V die Schallgeschwindigkeit unter den betreffenden Versuchsbedingungen, deren Kenntniss zur Ermittlung von l' nicht einmal nöthig ist, denn aus beiden obigen Gleichungen folgt unmittelbar

$$4N_1(L_1 + l') = 4N_2(L_2 + l') = \dots$$

oder

$$l' = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2} = \frac{N_3 L_3 - N_2 L_2}{N_2 - N_3} = \dots$$

Wertheim fand in der That bei gleichbleibendem Radius R für l' eine constante Zahl, ungefähr $\frac{1}{20}$. Ändert sich der Radius, so ändert sich auch die Constante, und zwar kann man $l' = 0,746 R$ setzen.²⁾

*Theorie von H. v. Helmholtz.*³⁾ — v. Helmholtz stellte zuerst eine exacte Theorie für die Pfeifen auf, ohne irgend welche Annahme über den Zustand der Luft an den Enden einzuführen. Nach dieser Theorie ist die Correction für eine enge Röhre, die

¹⁾ Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), **23**, 434 und **31**, 385; 1848—1851.

²⁾ Die Resultate von Wertheim schwanken zwischen $0,638 R$ und $0,862 R$; das Mittel ist $0,746 R$.

³⁾ Helmholtz, loc. cit.

in eine zweite, sehr weite Röhre mündet, für die Mündungsstelle gleich $0,82 R$.

Öffnet sich die Pfeife in einen nach allen Richtungen freien Raum, der also auch nicht nach rückwärts durch eine sehr grosse Ebene begrenzt ist, dann muss die Correction nach den Versuchen von Lord Rayleigh¹⁾ um ungefähr $0,2 R$ verkleinert werden, so dass man also etwa $0,6 R$ erhalten würde, wobei aber immer die Annahme bestehen bleibt, dass die Wellenlänge des betreffenden Tones im Verhältniss zum Durchmesser der Röhre sehr gross ist.

Ist das nicht der Fall, dann wird die Erscheinung complicirter, wie bereits Zamminer erkannt hatte.²⁾

Untersuchungen von Bosanquet³⁾ und König.⁴⁾ — Nach Bosanquet wächst die Correction, als Bruchtheil von R ausgedrückt, mit dem Verhältniss des Durchmessers zur Wellenlänge. Bei zwei offenen Pfeifen fand er nämlich für die Correction an einem Ende

$$0,635 R \text{ bei } \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{12} \text{ und } 0,543 R \text{ bei } \frac{R}{\lambda} = \frac{1}{20}.^5)$$

Andererseits beobachtete König bei Experimenten mittelst seiner früher beschriebenen Pfeife (**360**), welche er nach einander auf den Grundton und die verschiedenen Obertöne ansprechen liess, dass die Verkürzung der ersten halben Wellenlänge, absolut genommen, mit steigender Tonhöhe abnimmt, wenn auch weniger rasch als die Wellenlänge; die an sich viel geringere Verkürzung der letzten halben Wellenlänge ist dagegen nur geringen Änderungen unterworfen.

Die beiden folgenden Tabellen enthalten die so gefundenen Resultate, und zwar bezieht sich die erste auf eine offene Pfeife, die zweite auf dieselbe Pfeife, wenn sie geschlossen und dadurch die Länge der Luftsäule auf 2,28 m beschränkt wurde. Die Tabelle giebt für jeden Ton die Ordnungszahl k , die gemessene Zahl der Schwingungen N , und die gemessene halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$.

¹⁾ Lord Rayleigh, loc. cit. 2, 188.

²⁾ Zamminer, Pogg. Ann. 97, 183; 1856.

³⁾ Bosanquet, Phil. Mag. (5), 4, 219; 1877.

⁴⁾ König, loc. cit.

⁵⁾ Blaikley erhielt bei einer engen Röhre eine ganz ähnliche Zahl $0,576 R$ (Blaikley, Phil. Mag. (5), 7, 339; 1879.

Offene Pfeife						Gedeckte Pfeife					
Töne			Correctionen			Töne			Correctionen		
k	$2N$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{r}{2}$	$l = \frac{s+r}{2}$	k	$2N$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{r}{2}$	$l = \frac{s+r}{2}$
		mm	mm	mm	mm			mm	mm	mm	mm
3	376	900	280	90	370	5	332	1035	270	75	345
4	512	658	246	56	302	7	476	707	191	7	198
5	656	513	198	36	234	9	620	549	182	19	201
6	800	425	162	57	219	11	768	449	174	29	203
7	936	365	157	67	224 *)	13	—	—	—	—	— *)
8	1080	314	141	43	184	15	1048	324	144	14	158
						17	1198	282	112	12	124

*) Nur mit grosser Mühe liess sich der Ton 7 der offenen Pfeife halten, und noch in viel höherem Maasse war dies mit Ton 13 der gedeckten Pfeife der Fall; bei diesem musste man auf jede Messung verzichten.

362. Amplitude der Bewegung und Druckschwankungen der Luft in einer Pfeife. — Wir wollen hier noch die neueren Experimente anführen, durch welche man den Zustand der Luft an den verschiedenen Stellen der Pfeife und hauptsächlich in den Knoten und Bäuchen genau zu messen versuchte, indem man die Verschiebungen in den Bäuchen, die Drucke in den Knoten bestimmte.

*Beobachtungen von Kundt mittelst eines Ventilmanometers.*¹⁾ — Kundt bestimmte den Druck mit Hülfe eines Wassermanometers. Da die Zu- und Abnahme des Druckes bei einer Luftsäule, welche sich im tönenden Zustande befindet, zu rasch erfolgt, als dass eine Wassersäule diesen entgegengesetzt gerichteten Schwankungen folgen könnte, so muss man mit dem Manometer ein Ventil verbinden, das nur Druckänderungen in einem Sinne anzeigt. Bei dem Kundt'schen Apparate bestand das Ventil einfach aus einer Kautschukmembran, die vor einer engen Spalte aufgespannt war. Befand sich die Membran auf der Seite des Manometers, dann öffnete sich die Membran bei jeder Compression, und das Wasser stieg im zweiten Schenkel des Manometers so lange, bis der Niveauunterschied dem Maximaldrucke das Gleichgewicht hielt. War das Ventil auf der anderen Seite angebracht, dann zeigte das Manometer die bei der Verdünnung erzeugte Maximaldepression an. Mit diesem Apparate beobachtete Kundt am Ende einer stark tönenden, gedeckten Pfeife von 30 cm Länge einen Anstieg von 30 cm, so dass die gesammte Druckänderung 60 cm oder $\frac{1}{17}$ Atmosphäre erreichte. Im Knoten einer offenen Pfeife erreichte die Niveaudifferenz in beiden Manometerarmen nur ungefähr die Hälfte. Allerdings ist das Ventilmanometer nicht frei von mancherlei

¹⁾ Kundt, Pogg. Ann. **134**, 163; 1868.

Unsicherheiten, wie Dvorák¹⁾ nachwies; er fand am Ende einer Holzpfeife von 27 cm Länge, 2,4 cm Breite und 2,8 cm Tiefe, die unter einem Drucke von 5,5 cm Wasser ansprach, als grössten Druckunterschied nur 5 cm Wasser, d. h. ungefähr $\frac{1}{100}$ Atmosphäre.²⁾

¹⁾ Dvorák, Pogg. Ann. 150, 410: 1873.

²⁾ Die Kundt'sche Methode wurde von A. Raps (Darstellung der Schall-Intensität, Wied. Ann. 36, 273—306, 1889) noch bedeutend verbessert. Derselbe ersetzte das Kautschukventil, auf dessen Trägheit im Wesentlichen die Unsicherheit der Angaben zurückzuführen ist, durch ein sehr leicht bewegliches Metallventil von etwa folgender Beschaffenheit: In der Wand einer Pfeife befindet sich an der Stelle, wo im Innern ein Knoten liegt, ein kleiner, 4 mm langer und $\frac{3}{4}$ mm breiter Spalt; über diesen gleitet, mit Petroleum gedichtet, ein Schieber, der mit einem genau gleich grossen Spalt versehen ist. Dieser Schieber wird von der einen Zinke einer elektrisch erregten Stimmgabel getragen, welche nahezu auf den Ton der Pfeife abgestimmt ist; durch den beweglichen Spalt wird nun der feste Spalt abwechselnd geöffnet und geschlossen. Wären die Schwingungsperioden von Pfeife und Stimmgabel genau gleich, so würde die Öffnung des Ventils immer zu den Zeiten erfolgen, wo im Knoten der Pfeife wieder genau derselbe Druck herrscht; ist dies jedoch nicht der Fall, dann wird bei den auf einander folgenden Öffnungen des Ventils der Druck im Innern der Pfeife stets um eine bestimmte Grösse ab- oder zugenommen haben; somit wird das Manometer, welches auf kleine Druckunterschiede leicht reagiert, während es bei plötzlichen, grossen Druckschwankungen vermöge seiner Trägheit unempfindlich bleibt, successive die sämtlichen im Knoten auftretenden Drucke in langsamer Aufeinanderfolge anzeigen (ähnlich, wie bei der stroboskopischen Methode). Die Periode einer Manometerschwankung hängt offenbar von der grösseren oder geringeren Übereinstimmung zwischen den Perioden der Stimmgabel- und der Pfeifenschwingungen ab, und lässt sich somit in gewissen Grenzen willkürlich verändern. — Als Manometer, welches durch eine hier nicht näher zu beschreibende sinnreiche Vorrichtung mit dem Ventile verbunden war, benutzte Raps eine elastische Membran, deren Bewegung durch ein geeignetes Hebelwerk mit Spiegelablesung stark vergrössert wurde; dasselbe musste natürlich an ein Wassermanometer angeschlossen werden, lieferte aber dann sehr genaue Angaben.

Bezeichnet A den Anblasedruck in Millimeter Wasser, S die mittlere Zeit einer Manometerschwankung, D den (als Wassersäule gemessenen) Maximaldruck und V die Verdünnung im Knoten, so ergaben sich bei einer gedeckten Pfeife von 360 mm Länge, 45×65 mm Querschnitt und 22 mm hoher Mündöffnung für den besonders starken Grundton (184 Schwingungen in der Secunde) folgende Werthe:

A	S	D	V
44 mm	9 Sec.	40,0 mm	— 39,75
60 "	10 "	57,5 "	— 57,3
80 "	8 "	78,4 "	— 78,0
102 "	7 "	94,8 "	— 94,0
145 "	14 "	120,1 "	— 118,4
174 "	9 "	135,1 "	— 133,4
200 "	6 "	145,2 "	— 142,3
240 "	9 "	160,3 "	— 156,2
308 "	5 "	182,4 "	— 177,3. — G.

Stroboskopische Methode. — Plateau¹⁾ verdanken wir eine Methode, welche vortrefflich zum Studium eines periodischen Änderungen unterworfenen Körpers geeignet ist, nämlich die stroboskopische Methode (*στροβός* Umdrehung, *σκοπέω* ich betrachte), die wir schon bei der Untersuchung der Tropfen eines Flüssigkeitsstrahles (256) kennen gelernt haben. Hierbei beobachtet man den Körper durch die Spalten einer sich drehenden Scheibe, oder noch besser, man beleuchtet ihn durch einen intermittirenden Lichtstrahl, dessen Aufblitzen sich in gleichen Zeiträumen wiederholt. Fallen diese Zeiträume mit der Periode der beobachteten Erscheinung zusammen, dann erscheint diese unveränderlich, denn die Nachwirkung der Eindrücke auf der Netzhaut des Beobachters bringt ein scheinbar andauerndes Bild hervor. Folgen die Lichtblitze etwas langsamer auf einander, so stellt sich die Erscheinung langsam in ihrem natürlichen Verlaufe dar, und das Auge hat volle Zeit zur Beobachtung. Wenn τ die Periode der beobachteten Erscheinung, τ' die Zeit zwischen zwei auf einander folgenden Lichtblitzen bezeichnet, dann zeigt der zweite Blitz den Körper in dem Zustande, welcher nach Verlauf von $\tau' - \tau$ Secunden demjenigen Zustande folgt, den der erste Blitz gezeigt hatte, und die verschiedenen Phasen der Erscheinung folgen in der Zeit $\frac{1}{\tau' - \tau}$ auf einander. Wäre τ' etwas kleiner als τ , dann würde sich die Erscheinung ebenso vollständig in der Zeit $\frac{1}{\tau - \tau'}$ abrollen, aber in umgekehrter Reihenfolge.

Versuche von Töpler und Boltzmann. — Töpler und Boltzmann²⁾ verwendeten diese Methode auf folgende Weise zur Messung der Dichtigkeit der Luft in einer Pfeife: Eine horizontal aufgestellte Stimmgabel, deren Zinken in verticaler Richtung schwingen, trägt auf jeder Zinke einen kleinen, mit einer engen horizontalen Spalte versehenen Schirm. Wenn die Gabel schwingt, verschieben sich die beiden Schirme vor einander, und bei jeder Schwingung stehen sich beide Spalten während einer sehr kurzen Zeit zweimal gegenüber. Ein Bündel Lichtstrahlen, das von einem festen, horizontalen Spalt ausgeht, kann in diesem Augenblicke die beiden beweglichen Spalte passiren und sodann auch den oberen Theil einer verticalen Pfeife, deren Wand aus parallelen Glasplatten besteht und deren Boden durch eine gut ausgerichtete horizontale Metall-

¹⁾ Plateau, *Correspondance math. et phys. de l'Observatoire de Bruxelles*; 1832; *Ann. de chim. et de phys.* (2), **53**, 304, 1833; und *Bulletin de l'Académie de Belgique* **3**, 364; 1836.

²⁾ Töpler und Boltzmann, *Pogg. Ann.* **141**, 321; 1870.

platte gebildet wird. Oberhalb dieses Bodens nimmt ein zweites Lichtbündel, das aus derselben Spalte kommt, durch die ruhige Luft seinen Weg. Beide Bündel fallen sodann auf einen Interferenzapparat (Biprisma mit horizontaler Kante), das ein System von Interferenzstreifen liefert, welche man mit einer mikrometrischen Vorrichtung beobachtet. Wenn die Periode der Lichtblitze sich nur wenig von der Periode des Tones unterscheidet, den die Pfeife angiebt, mit anderen Worten, wenn die Stimmgabel nahezu die tiefere Octave der Pfeife giebt, dann schwingt der mittelste Streifen langsam hin und her, und aus der Amplitude seiner Verschiebung lässt sich die Dichtigkeitsänderung in der von dem intermittirenden Bündel durchsetzten Luftschicht berechnen. Um jedoch eine genügende Verschiebung zu erzielen, muss man den Durchgang der Strahlen durch die beiden zu vergleichenden Luftschichten durch Reflexionen vermehren: Nach 11 Durchgängen betrug die Verschiebung 5 Streifenbreiten, die im Maximum einem Dichtigkeitsunterschiede von 0,00888 der normalen Dichte entsprach. Berücksichtigte man noch die dabei auftretende Temperaturänderung, dann folgte daraus, dass der Maximalunterschied zwischen den beiden Drucken $0,00888 \cdot 1,41$ oder $= \frac{1}{80}$ Atmosphäre betrug. Die zur Verwendung gelangende Pfeife war 36 cm lang, 5,85 cm breit und 5,2 cm tief; sie gab einen Grundton von 181 Schwingungen in der Secunde.

Unter der Voraussetzung, dass sich die Verschiebung ξ eines in der Entfernung x vom Boden befindlichen Lufttheilchens darstellen lässt durch

$$\xi = a \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

findet man aus dem bekannten Werthe der Verdichtung am Boden

$$\frac{4\pi a}{\lambda} = 0,00888$$

und hieraus, wenn man $\lambda = 188$ cm setzt:

$$a = 0,133 \text{ cm.}$$

Die Verschiebung einer Luftschicht in der Nähe des Mundstückes, wo $x = 36$ cm ist, beträgt demnach

$$\xi = 0,133 \sin 2\pi \frac{36}{188} \sin 2\pi \frac{t}{\tau} = 0,125 \sin 2\pi \frac{t}{\tau},$$

und die gesammte Amplitude der Verschiebung ist 0,25 cm.

Arbeiten von Mach. — Mach¹⁾ dehnte diese Versuche auf die offenen Pfeifen aus. Indem er in dem Knotenpunkt eine leicht bewegliche Membran anbrachte, welche den Luftstrom aufhielt, ohne die schwingende Bewegung zu hemmen, und indem er das Gas mittelst Rauches sichtbar machte, konnte er direct die Schwingungsamplituden an den verschiedenen Punkten, von der im Knoten angebrachten Membran bis zum offenen Ende hin, messen; an letzterem fand er in einer Pfeife von vier Fuss Länge 0,4 cm.

363. Weite (kubische) Pfeifen. — Die Gesetze von Bernoulli sind nur für sehr enge Pfeifen gültig, versagen dagegen vollständig für weite Pfeifen.

Ausnahmen von den Gesetzen von Bernoulli. — 1. Die Tabelle am Ende von **361** zeigt, dass bei der mässig weiten Pfeife, welche König benutzte, die höheren Obertöne nicht das für die harmonischen Obertöne aufgestellte Gesetz befolgen, vielmehr liegt der Ton 8 um ungefähr eine Secunde über dem siebenten harmonischen Oberton, so dass er fast mit dem achten harmonischen Obertone übereinstimmt. Schon Wertheim hatte die Beobachtung gemacht, dass man bei der Bestimmung des Grundtones einer Orgelpfeife aus einem ihrer Obertöne eine um so grössere Schwingungszahl erhält, je höher die Ordnungszahl des benutzten Obertones ist.

2. Mersenne gelang es, den Grundton einer Pfeife, deren Länge (72 Linien = 161 mm) ungeändert blieb, nur dadurch um volle sieben Töne herabzustimmen, dass er den Durchmesser der Pfeife vergrösserte, wie es folgende kleine Tabelle angiebt, bei welcher der höchste Ton willkürlich mit *c* bezeichnet wurde.

Durchmesser	{	3 Linien	6 Linien	12 Linien	18 Linien	25 Linien	51 Linien
		7 mm	14 mm	27 mm	41 mm	56 mm	115 mm
Ton . . .		<i>c</i>	<i>A</i>	<i>G</i>	<i>E</i>	<i>Cis</i>	<i>Ais-1</i>

Regeln von Savart und von Cavaillé-Coll. — Savart²⁾ untersuchte hauptsächlich die Pfeifen mit rechteckigem Querschnitte. Wir wollen unter der *Länge* einer Pfeife ihre grösste Dimension verstehen; in dem zur Länge normalen Querschnitte bezeichnen wir als *Breite* die zur Mundöffnung parallele und als *Tiefe* die darauf senkrechte Richtung.

Savart fand zuerst, dass die Breite der Pfeife auf die Ton-

¹⁾ Mach, Optisch-akustische Versuche, Prag 1873; und Journal de physique **2**, 112, 306 u. 338; 1873 (Crova).

²⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), **29**, 404; 1825.

höhe ohne Einfluss ist, vorausgesetzt, dass die Pfeife über ihre ganze Breite angeblasen wird.¹⁾

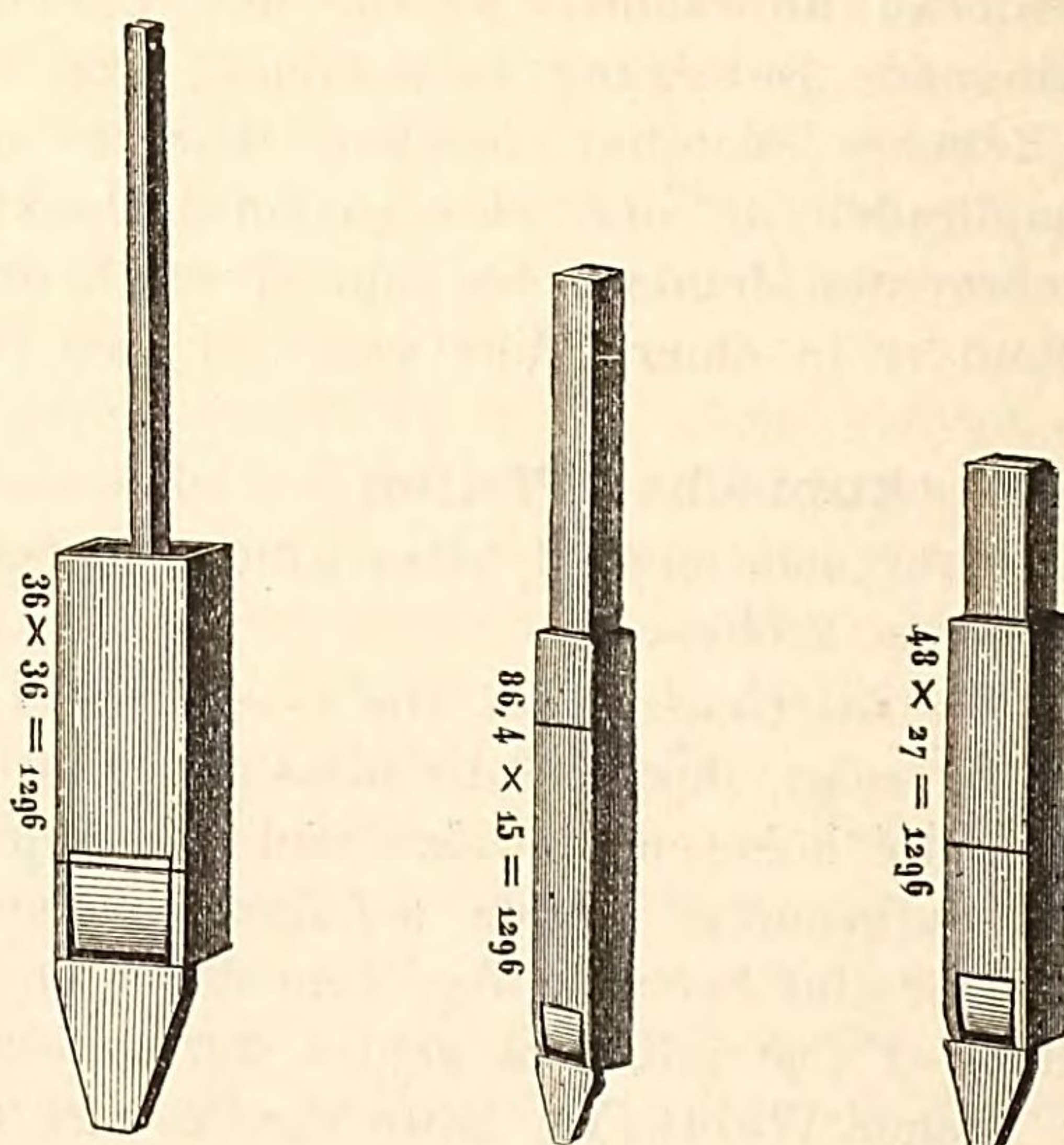


Fig. 74.

Der Vorgang in jedem zur Pfeifenöffnung senkrechten Querschnitte ist also stets der gleiche, und Savart wies nach, dass bei zwei verschiedenen Pfeifen, bei welchem diese Querschnitte denselben Flächeninhalt besitzen, der Ton derselbe ist, voraus-

¹⁾ Bei Verminderung der Breite der Mundöffnung sinkt der Ton; diesen Umstand benutzt man zum Stimmen der gedeckten Pfeifen, indem man dazu sogenannte *Ohren* verwendet, d. h. biegsame Lamellen, die

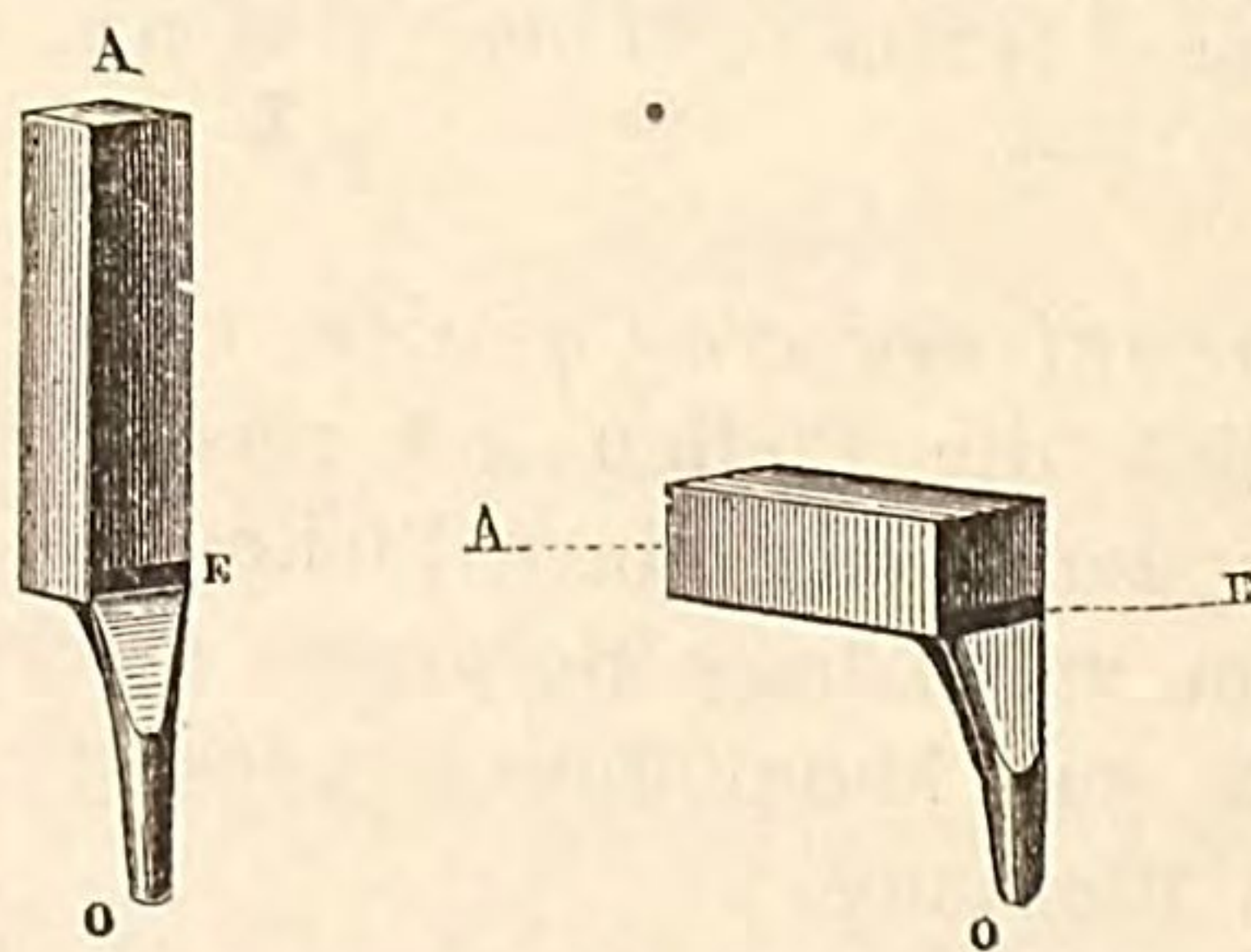


Fig. 75.

beiderseits der Mundöffnung angebracht sind. Die Richtung des aus der Kernspalte tretenden Luftstromes ist dabei ohne Einfluss: Zwei Pfeifen von denselben Dimensionen, die angeblasen werden, wie Fig. 75 es zeigt, geben den gleichen Ton.

gesetzt, dass die Tiefe mehr als $\frac{1}{6}$ der Länge beträgt. Dies ist beispielsweise bei den in Fig. 74 dargestellten Pfeifen der Fall. Bei ungleichem Flächeninhalt dagegen sind die Schwingungszahlen umgekehrt proportional den Quadratwurzeln aus dem Flächeninhalte.

Vermindert man die Tiefe der Pfeife, so wird der Einfluss dieser Dimension immer weniger merklich, und ist derselbe geringer geworden als $\frac{1}{12}$ der Länge, dann hängt die Tonhöhe im Wesentlichen nur noch von der Länge ab, wie das Gesetz von Bernoulli es verlangt.

Bei den Orgelpfeifen, bei welchen die Tiefe meist zwischen $\frac{1}{12}$ und $\frac{1}{6}$ der Länge liegt, sind die Orgelbauer nur auf empirische Regeln angewiesen.

Cavaillé-Coll bestimmt die Länge L' einer offenen Pfeife nach einer der folgenden Formeln, die innerhalb ziemlich weiter Grenzen gültig sind:

$L' = L - 2p$ für eine rechteckige Pfeife mit der Tiefe p
und

$$L' = L - \frac{5}{3}d \text{ für eine runde Pfeife vom Durchmesser } d;$$

hierbei bedeutet L die theoretische Länge.

Setzt man auf die Pfeifen A , B , C , die einen bestimmten Grundton geben, derartige Verlängerungen a , b , c auf, dass der Ton un-

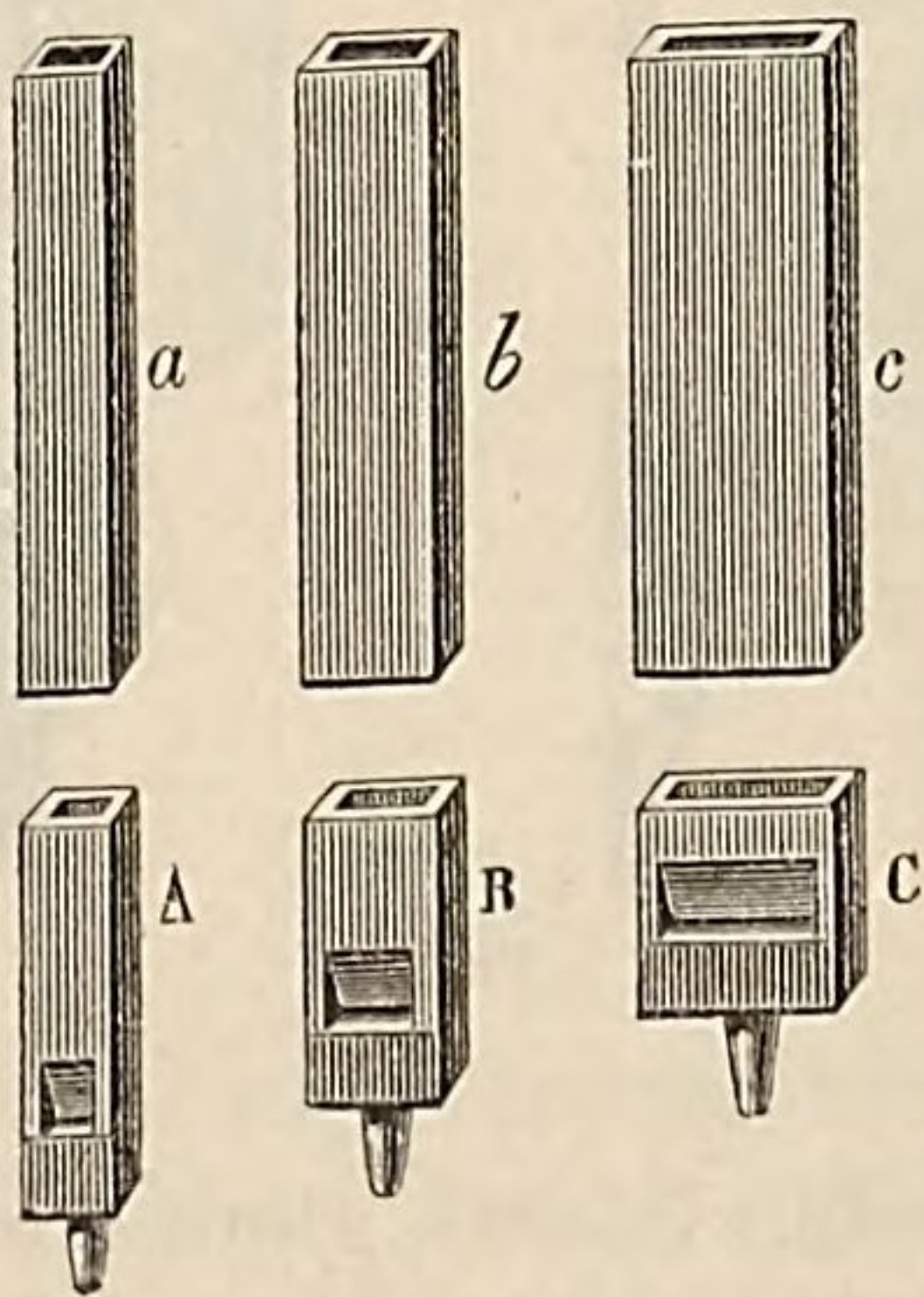


Fig. 76.

geändert bleibt, dann ist die Länge dieses Aufsatzstückes unabhängig von der ursprünglichen Länge, welche bei den gegebenen Transversaldimensionen die Pfeifen A , B , C besitzen mussten, damit diese den betreffenden Ton lieferten. Mit anderen Worten: Die

Correction am freien Ende, die ja immer gering ist gegenüber der Abweichung an der Mundöffnung, ändert sich nicht beträchtlich mit dem Querschnitte der Pfeife, während umgekehrt dieser Querschnitt wesentlich ist für die Länge, welche die ursprüngliche Pfeife erhalten muss.

Ähnliche Pfeifen. — Die ähnlichen Pfeifen befolgen ein sehr einfaches, von Mersenne gefundenes Gesetz: „Giebt man einer Pfeife von einem Fuss Höhe einen Durchmesser von 22 Linien, so liefert dieselbe genau die Octave einer Pfeife von $\frac{1}{2}$ Fuss Höhe und 11 Linien Durchmesser.“¹⁾

Savart wies an Pfeifen mit den mannigfachsten Formen die Richtigkeit dieses Gesetzes nach, das sich folgendermaassen aussprechen lässt:

Ähnliche Pfeifen mit ähnlichen Mundstücken geben Töne, deren Höhe den entsprechenden Dimensionen umgekehrt proportional ist.

Fig. 77 stellt eine Reihe von ähnlichen Pfeifenpaaren dar, deren entsprechende Dimensionen sich wie 1:2 verhalten; die

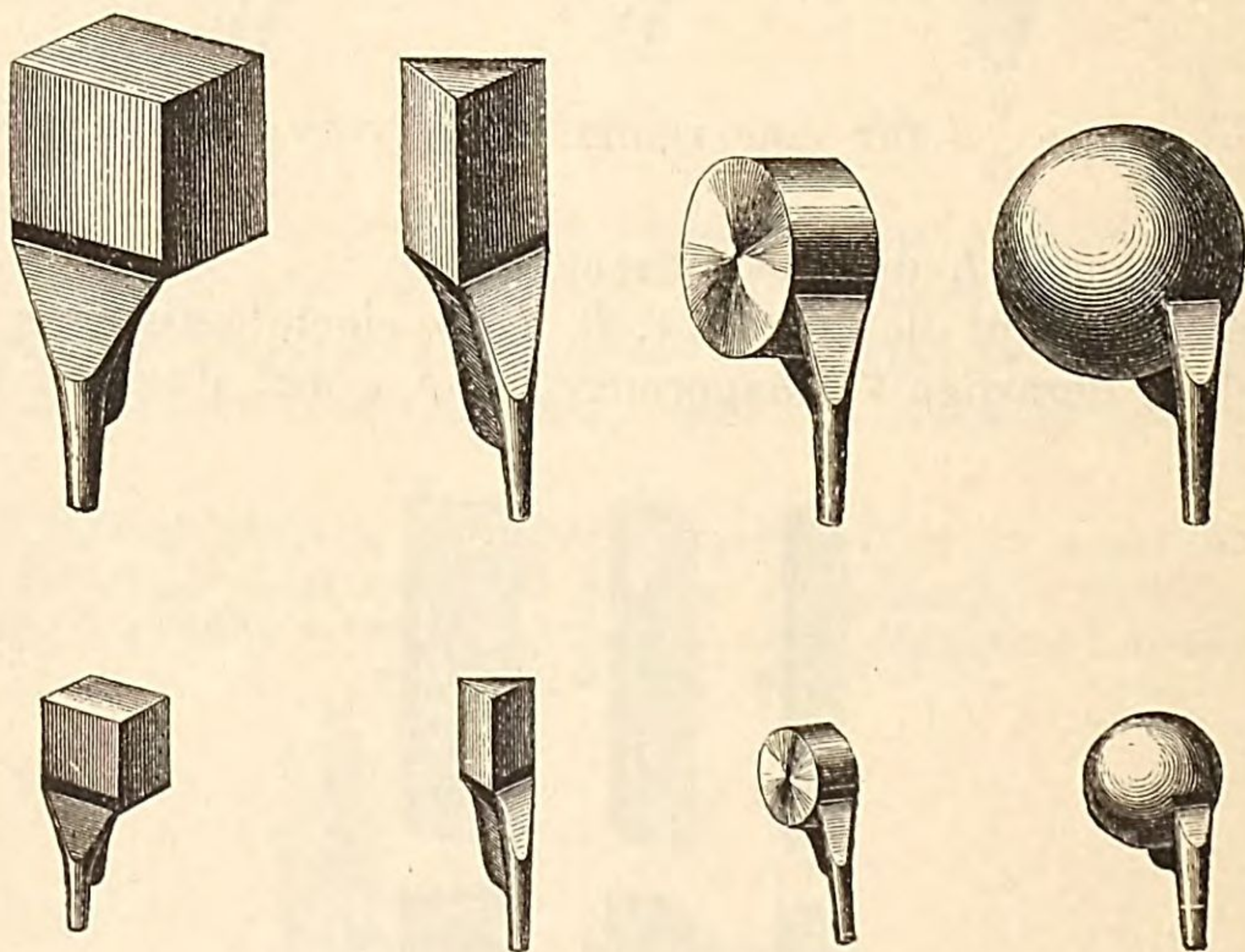


Fig. 77.

kleinere Pfeife eines jeden Paares giebt stets die höhere Octave des Tones der grösseren Pfeife.

Das Gesetz ist vollständig allgemein gültig und lässt sich, wie wir später sehen werden, auf alle schwingenden Systeme anwenden.

¹⁾ Mersenne, loc. cit.

364. Zungenpfeifen. — In der Musik kommen vielfach noch Blasinstrumente zur Verwendung, bei welchen die Luft mittelst eines besonderen Stückes, der *Zunge*, in Bewegung gesetzt wird.

Bei den Zungenpfeifen der Orgel besteht dieser Theil aus einem Metallblättchen *l*, das an einem Ende befestigt ist und

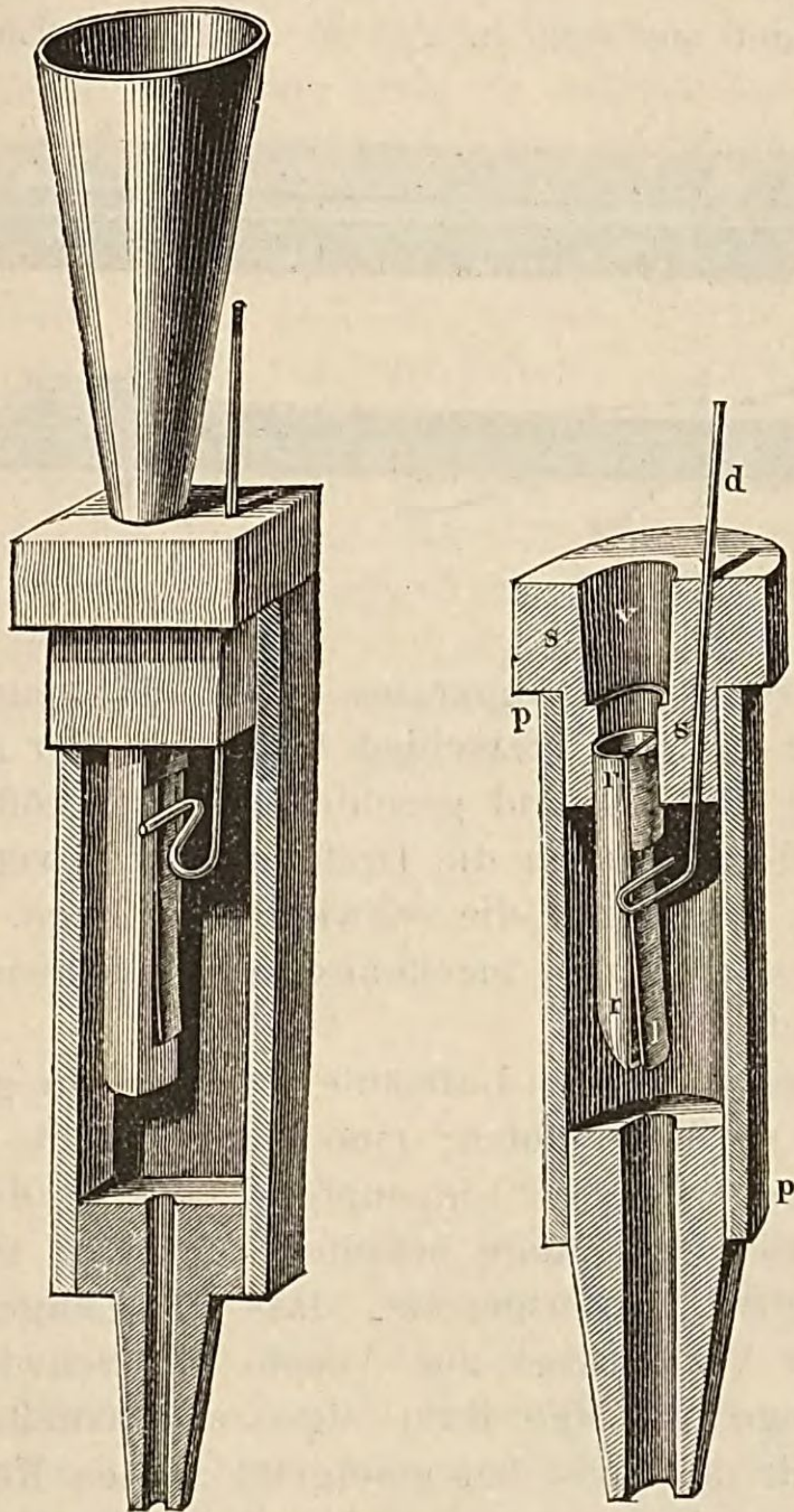


Fig. 78.

dessen freier Theil durch einen beweglichen Haken *d*, den *Stimm-
draht*, begrenzt wird. Diese Zunge öffnet und schliesst beim
Schwingen abwechselnd eine Öffnung in einer halbcylindrischen
Rinne r, welche am oberen Theile des *Fusses PP* befestigt ist. Früher
schlug die Zunge auf die Ränder des Canals auf (*Schnarrwerk*),
wie dies bei der Pfeife rechts in Fig. 78 abgebildet ist, aber dies
Anschlagen gab dem Ton eine Härte, die Grenié mit seiner
durchschlagenden Zunge vermied, wie sie sich auf der links stehenden

Pfeife der Fig. 78 wiedergegeben findet.¹⁾ Die Zunge kann dann frei durch die Öffnung hindurch schwingen, die sie gerade verschliesst, wenn sie sich in ihrer Gleichgewichtslage befindet. Fig. 79 zeigt die Einzelheiten dieser heutzutage allein noch zur Verwendung kommenden Anordnung: Hat die Zunge die Lage z_1 , dann kann die comprimirte Luft aus dem Fuss frei nach aussen entweichen; befindet sie sich in z_2 , so wird der Luftstrom unter-

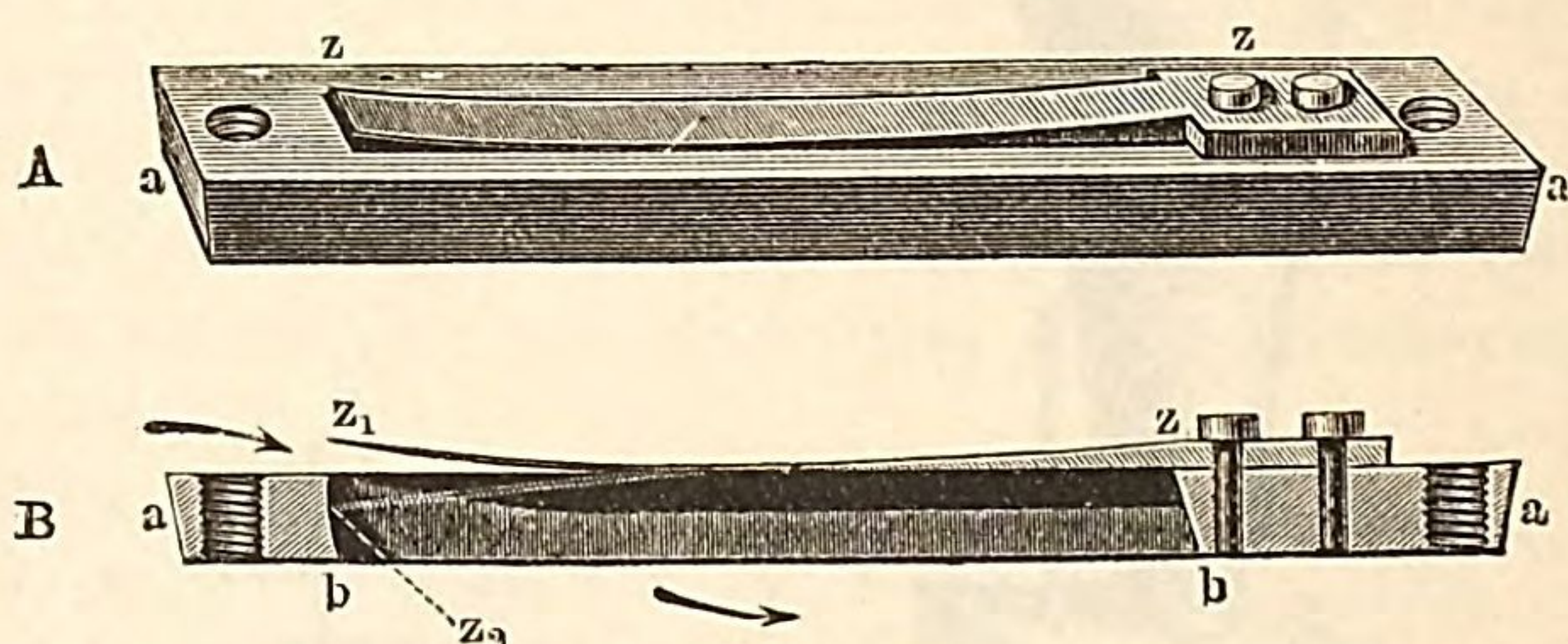


Fig. 79.

brochen. Das Spiel des Apparates entspricht genau demjenigen der Sirene; der einzige Unterschied besteht in der Art und Weise, wie die Öffnung abwechselnd geschlossen und geöffnet wird: Bei der Sirene wird dies durch die Drehung der beweglichen Scheibe hervorgebracht, hier durch die schwingende Zunge. Die Rolle der letzteren ist also eine rein mechanische, der schwingende Körper ist stets die Luft.

Bei einer schwingenden Luftsäule entstehen die grössten Druckschwankungen an den Knoten; eine Zungenpfeife wird sich also ebenso verhalten, wie eine Lippenpfeife, die an dem Punkte gedeckt ist, wo sich die Zunge befindet; sie wird somit die Töne 1, 3, 5, 7... geben, vorausgesetzt, dass die Länge der Pfeife in einem richtigen Verhältnisse zur Anzahl der Schwingungen steht, welche die Zunge in Folge ihrer eigenen Elasticität auszuführen sucht. Immerhin hat man bei genügend weiten Röhren einen gewissen Spielraum, den man noch dadurch vermehren kann, dass man einen Theil der einen Wand aus Leder herstellt. Ist der Unterschied in den Schwingungszahlen aber zu gross, dann spricht die Pfeife nicht an.

Eine starre Metallzunge, wie sie sich bei den Orgelpfeifen findet, bestimmt die Tonhöhe fast vollständig; man bedarf dann für jede Note einer besonderen Pfeife und führt das Stimmen mit

¹⁾ Diese Pfeife trägt ausserdem noch ein *Rohr*, das zur Verstärkung des Tones dient.

Hülfe des Stimmdrahtes aus. Gewöhnlich jedoch hängt die Tonhöhe gleichzeitig von der Zunge und von der Pfeife ab.

Die Zungen lassen sich in zwei Kategorien theilen: 1. *Einschlagende Zungen*, die sich nach dem Innern des Instruments zu öffnen, aus welchem der Wind austritt, beispielsweise die Zungen der Orgelpfeifen, 2. *Ausschlagende Zungen*, die sich nach aussen öffnen, wie die Stimmbänder. Verbindet man mit einer einschlagenden Zunge eine Röhre, so erhält man im Allgemeinen einen tieferen Ton, als die Zunge allein vermöge ihrer Elasticität geben würde; dagegen nimmt bei der Verbindung einer ausschlagenden Zunge mit einer Röhre die Tonhöhe zu. W. Weber,¹⁾ der diese Frage eingehend studirte, setzte auf eine Zunge, die für sich denselben Ton gab, wie eine Pfeife von der Länge $l = 440,5$ mm, d. h. das g von 388 Schwingungen, eine Röhre, die sich verlängern liess. War die Röhre noch sehr kurz, so zeigte die Tonhöhe keine merkliche Änderung; bei Verlängerung der Röhre sank die Tonhöhe allmählich; hatte sie die Länge l nahezu erreicht, so war auch der Ton bis zur tieferen Octave gesunken; sodann stieg derselbe plötzlich wieder zu seiner ursprünglichen Höhe, als die Röhrenlänge gleich l wurde, wie folgende Tabelle zeigt.

Röhrenlänge	Ton	Röhrenlänge	Ton
41	g_1	252	d_1
56	g_1	290	c_1
92	g_1	331	a_{is}
128	f_{is_1}	370	g_{is}
187	f_1	394	g
212	c_1	439	g_1

Wurde die Röhre noch mehr verlängert, so sank der Ton von Neuem, und zwar war er bei einer Röhrenlänge von 866 mm, die also wenig geringer war, als $2l = 881$ m, auf d_1 gefallen, d. h. auf die Quarte; wurde die Röhrenlänge genau $2l$, so nahm die Tonhöhe plötzlich ihren ursprünglichen Werth g_1 wieder an. Durch weitere Verlängerung der Rohre fiel der Ton auf e_1 , d. h. auf die kleine Terz, um wieder auf g_1 zu steigen, wenn die Länge $= 3l$ war, und so fort. Der Ton erreichte also jedesmal wieder seine ursprüngliche Höhe, wenn die Röhrenlänge genau ein Vielfaches von l betrug, mit anderen Worten, wenn einer der Eigentöne der Röhre mit dem Eigentone der Zunge im Einklang stand; dies ging stets sprungweise vor sich, und zwar traten nach einander folgende Sprünge auf:

¹⁾ W. Weber, Pogg. Ann. 14, 397; 16, 415; 17, 193; 1828—1829.

Um eine Octave		1 : 2
„ „ Quarte		3 : 4
„ „ Terz		5 : 6

Die Zunge der Holzinstrumente besteht aus einer oder zwei biegsamen Lamellen,¹⁾ deren Schwingungen durch diejenigen der Röhre so beeinflusst werden, dass die Tonhöhe in Wirklichkeit von der Länge der letzteren abhängt. Der mit dem Feuchtigkeitsgehalt veränderliche Eigenton der Zunge ist viel höher, als die Töne, welche man benutzt; die letzteren stimmen mit denjenigen einer Pfeife überein, die an der Stelle, wo sich die Zunge befindet, geschlossen ist. Die Clarinette, welche ein cylindrisches Rohr besitzt, wird also die Tonreihe 1, 3, 5 . . . geben, ganz abgesehen von den Tönen, welche man erhält, wenn man die an verschiedenen Stellen befindlichen Klappen öffnet. Die Oboe und das Fagott geben die Tonreihe eines konischen, an der Spitze geschlossenen Rohres; dies ist genau dieselbe Reihe, welche eine offene, cylindrische Pfeife von derselben Länge liefert, nämlich 1, 2, 3, 4, 5 . . .²⁾

Es giebt noch eine dritte Art von Zungen, nämlich die membranösen, deren Eigenschaften man bequem mit dem in Fig. 80 abgebildeten Apparat untersuchen kann; derselbe ist von v. Helmholtz angegeben und besteht einfach aus zwei Kautschuklamellen, welche über die schräg geschnittenen Ränder einer dicken Holz- oder Kautschukröhre gespannt sind, so dass nur ein enger Spalt zwischen ihnen frei bleibt. Ist der Luftstrom so gerichtet, wie auf beistehender Figur, dann functionirt der Apparat wie eine einschlagende Zunge. Wenn man die Richtung des Luftstromes ändert, so erhält man eine ausschlagende Zunge; als solche wirken z. B. die Lippen bei den Blechinstrumenten oder die Stimmbänder im Kehlkopfe. Die weichen und biegsamen Lippen gehorchen leicht den beträchtlichen Druckschwankungen, welche im Innern der Blechinstrumente entstehen; die Tonhöhe hängt also bei diesen Instrumenten allein von der Länge des Rohres ab. So geben Jagdhorn und Trompete, beides lange konische Röhren mit einem Mundstücke, nur die Reihe der natürlichen Ober-

¹⁾ Die Clarinette ist mit einer breiten Zunge versehen, welche anschlagen würde, wenn die Amplitude der Schwingungen grösser wäre; thatsächlich öffnet und schliesst dieselbe den Luftzutritt nur mehr oder weniger, ohne ihn jemals vollständig abzusperren. Bei der Oboe und dem Fagott wird das Mundstück aus zwei dünnen Lamellen gebildet, die einen Spalt offen lassen, der sich bei jeder Schwingung schliesst. Alle diese Zungen sind einschlagende.

²⁾ Helmholtz, Pogg. Ann. 114, 321; 1861 und „Die Lehre von den Tonempfindungen“, 163.

töne¹⁾ vorausgesetzt, dass man nicht irgend einen Kunstgriff anwendet um die Beschaffenheit des Rohres zu ändern, indem man beispielsweise die Faust in die Mündung des Rohres steckt. Bei diesen Instrumenten haben die Lippen nur den Luftaustritt zu reguliren, wenn man einen bestimmten Ton erhalten will, ohne dass sie dabei direct die Tonhöhe wesentlich beein-

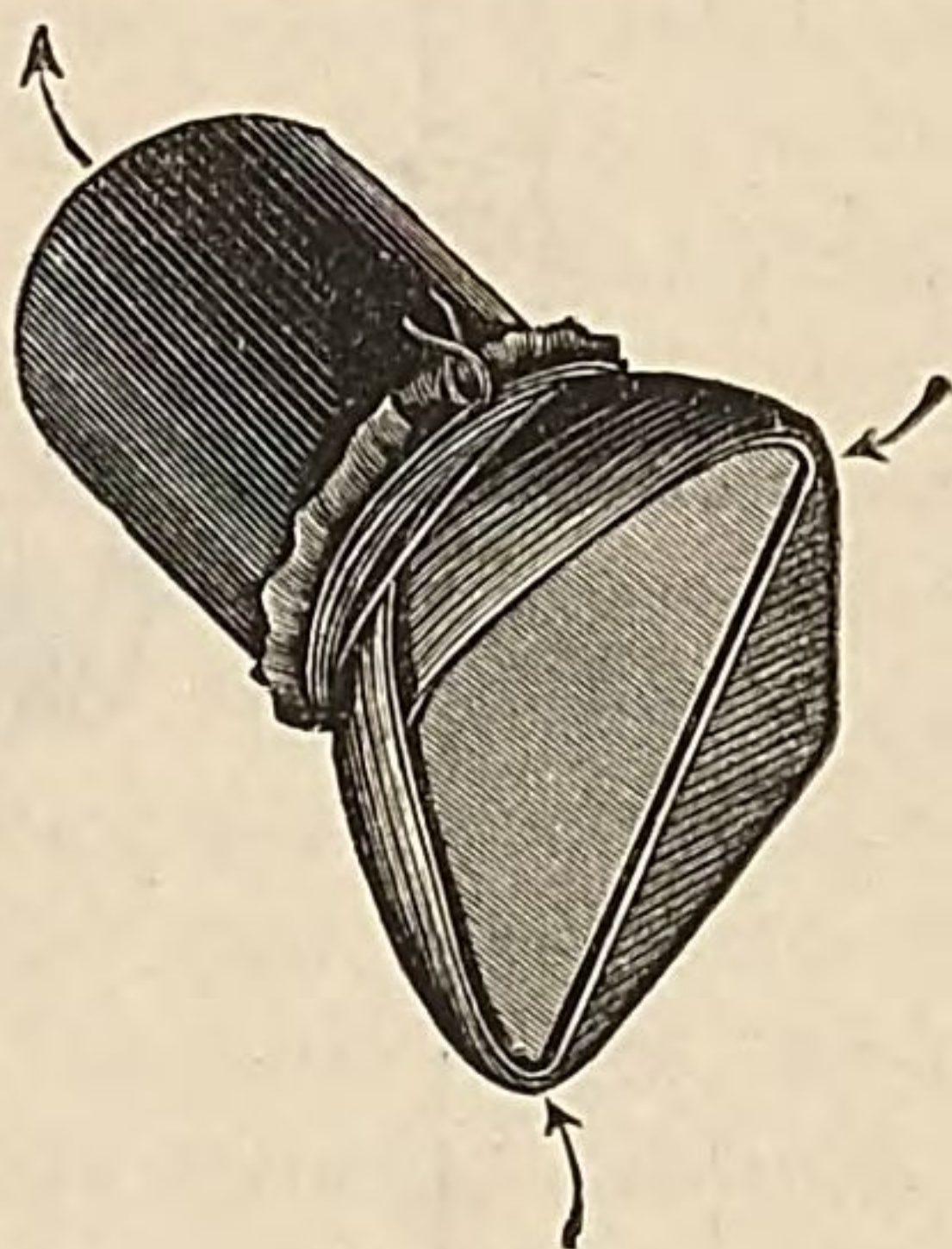


Fig. 80.

flussen. Beim menschlichen Kehlkopfe dagegen wird die Tonhöhe durch die Stimmbänder geregelt, deren Spannung sich in weiten Grenzen ändern kann, entweder durch Veränderung der Entfernung ihrer Ansatzpunkte an den Kehlkopfknochen oder durch die Verkürzung ihrer Muskelfasern, deren Dicke sich verändern zu können scheint.²⁾

365. Chemische Harmonika. — Die Schwingungen der Luft in einer Röhre können auch durch das Zittern einer Flamme hervorgerufen werden, wie dies bei der *chemischen Harmonika* der Fall ist, welche Higgins³⁾ zuerst beobachtet zu haben scheint. Chladni⁴⁾ wies dann nach, dass dieser Apparat genau die Eigentöne der Röhre für die gerade vorhandene Temperatur der schwingenden Säule giebt; durch Regulirung der Flammenhöhe sowie der Stellung der Röhre erhielt er leicht den Grundton, die Octave und die Duodecime. Wenn die Röhre anspricht, treten bei der Flamme an Stelle des unregelmässigen Zitterns rhythmische Bewegungen auf,

¹⁾ Das Rohr des Waldhorns, sagt v. Helmholtz, ist nach Zaminer 27 Fuss = 8,77 m lang, der eigentliche Grundton desselben ist Es_{-1} , dieser und der nächste, Es , werden jedoch nicht gebraucht, wohl aber die weiteren Töne $B, es, g, b, des_1, es_1, f_1, g_1, as_1, a_1, b_1$ etc.

²⁾ Vgl. v. Helmholtz, loc. cit., s. 164 etc.

³⁾ Higgins, Nicholsons Journal 1. 129; 1802.

⁴⁾ Chladni, Traité d'acoustique 85; Paris, Courcier, 1809.

entsprechend den Schwingungen der Luftsäule in der Röhre: Wheatstone machte sie mittelst eines rotirenden Spiegels sichtbar, der von der Flamme eine Reihe äquidistanter Bilder lieferte, welche durch scheinbar völlig dunkle Zwischenräume getrennt waren¹⁾. Die Wirkung der Röhre auf die Flamme kann sogar so stark

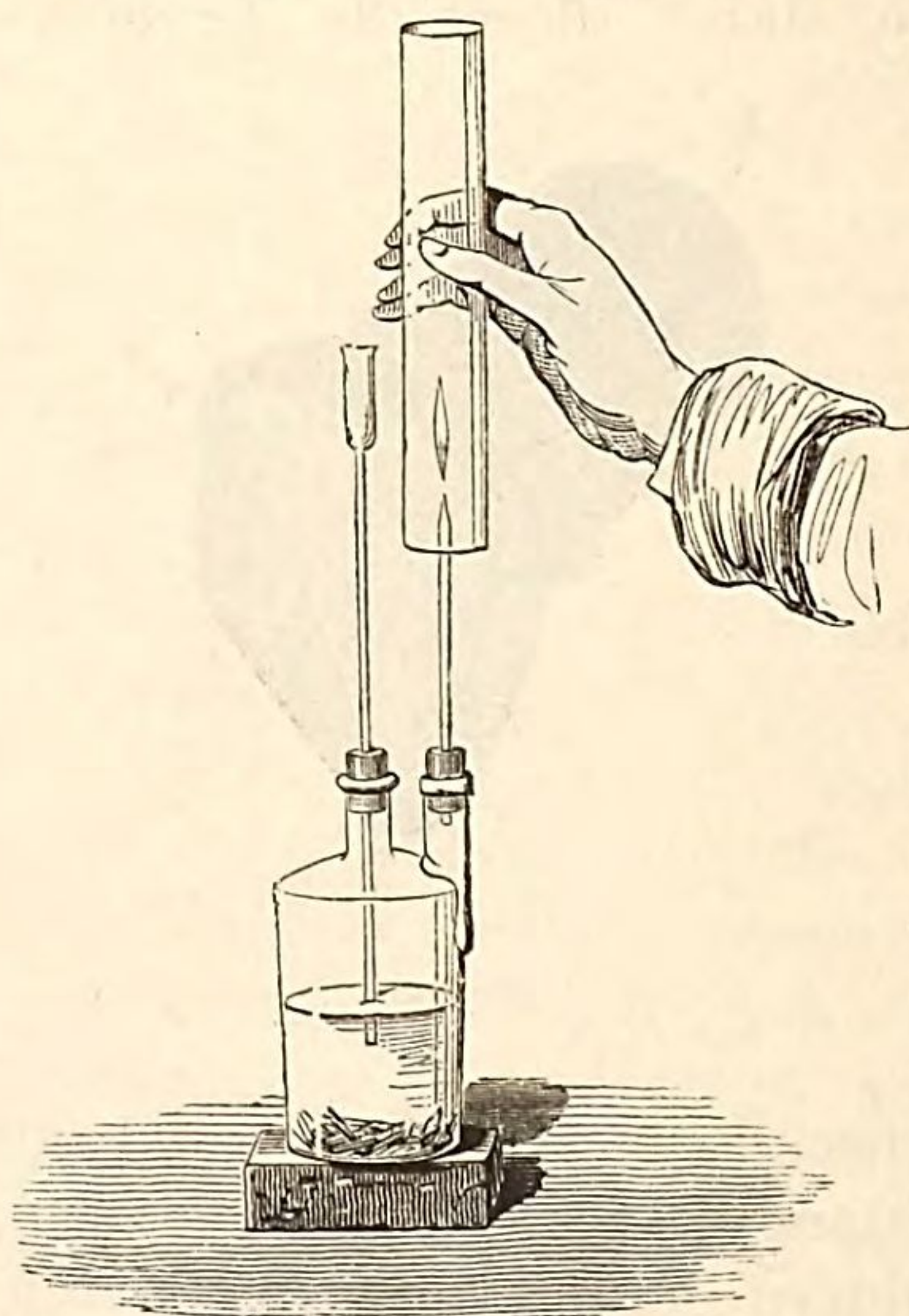


Fig. 81.

werden, dass die Flamme verlöscht. Graf Schaffgotsch²⁾ und Tyndall³⁾ zeigten, dass sich eine Röhre, welche dem Tönen nahe ist, durch die Stimme oder ein beliebiges Instrument, das in der Entfernung den Ton der Röhre angiebt, in Schwingungen versetzen lässt,⁴⁾ während umgekehrt durch einen lauten Schall das Tönen einer Röhre aufgehoben werden kann.

De la Rive⁵⁾ erhitze eine Kugel, die etwas Wasser enthielt

¹⁾ Die stroboskopische Methode gestattete Töpler, die auf einander folgenden Formenänderungen der Flamme zwischen ihren Endzuständen zu beobachten (Töpler, Pogg. Ann. **138**, 108 u. 126; 1866.

²⁾ Graf Schaffgotsch, Pogg. Ann. **100**, 352; 1857.

³⁾ Tyndall, Phil. mag. (4), **13**, 473; 1857.

⁴⁾ Der Versuch gelingt ebenso gut mit einer Orgelpfeife, deren Mundstück so justirt ist, dass das Instrument nahe am Ertönen ist.

⁵⁾ De la Rive, Journal de physique de De la Métherie **15**, 165; 1802. Die Kugelhöhren sind experimentell von Pinaud und Sondhauss untersucht worden, die Theorie wurde von Bourget gegeben (Pinaud, Mém. de l'Ac. de Toulouse **5** und Institut **3**, 366; 1835; Sondhauss, Pogg. Ann. **79**, 1 und **140**, 53 u. 219; 1850—1870; Bourget, Ann. de l'Éc. norm. (1), **4**; 1867).

und auf welcher ein Capillarrohr angebracht war; er erhielt dabei einen Ton, der offenbar auf die periodische Condensation des Dampfes in der Röhre zurückgeführt werden musste; für die Töne der chemischen Harmonika nahm er dieselbe Entstehungsursache an. Faraday¹⁾ wies jedoch die Unrichtigkeit dieser Erklärung nach, indem er die Röhre mit einem über 100 Grad erhitzten Mantel umgab, oder indem er Wasserstoff durch Kohlenoxydgas ersetzte, dessen Flamme keinerlei condensirbaren Dampf liefert. Er nahm an, dass der Ton von einer Reihe von Explosionen herrühre: Das an sich nicht entzündliche Gas wird vom Luftstrom mit fortgerissen und bildet mit der Luft ein explosibles Gemisch, wird dann durch eine neue Menge des Gemisches ersetzt, welches wiederum explodiert, und so fort. Diese Erklärungsweise giebt auch von dem Aussehen der Flamme bei Anwendung eines rotirenden Spiegels Rechenschaft und wurde ausserdem noch durch die Versuche von Martens bestätigt.²⁾ Letzterer zeigte, dass der Ton verschwindet, wenn man durch ein Drahtnetz, das man unmittelbar über der Flamme in der Röhre anbringt, das Zustandekommen der Explosionen verhindert.

Die auf einander folgenden Explosionen können Töne von grosser Stärke hervorrufen. Mit der Flamme eines grossen Bunsenbrenners, bei welcher das Gas durch eine Art von Brause auströmte, und einem 4,50 m langen Rohre erhielt Tyndall einen Ton von ausserordentlicher Mächtigkeit; durch Verkleinern der Flamme entstand der erste Oberton, durch nochmaliges Verkleinern der zweite. Lässt man das ganze Gas ungehindert zuströmen, dann ertönt der Grundton mit seinen Obertönen, die „einen wahren musikalischen Orkan“ hervorbringen. Unter anderen Bedingungen liefern diese Flammenröhren sehr harmonische Klänge, die man für die Musik praktisch zu verwerthen suchte. Kastner³⁾ construirte unter dem Namen „*Pyrophon*“ eine Art von Orgel, deren Anwendung auf folgender Thatsache beruht: Bringt man in ein und dasselbe Rohr, und zwar in ein Drittheil der Höhe, zwei sich berührende kleine Flammen, dann ertönt das Rohr nicht, wohl aber spricht es an, wenn man die Flamme trennt.

366. Empfindliche Flammen. — Im Jahre 1858 beobachtete Leconte,⁴⁾ dass die Gasflammen in einem Concertsaale bei be-

¹⁾ Faraday, Quarterly Journal of science 5, 274, 1818 und Annales de chim. et de phys. 8, 363; 1818.

²⁾ Martens, Bulletin de l'Académie des sciences de Bruxelles 6, part. 2, 442; 1839.

³⁾ Kastner, C. R. 76, 699; 1873.

⁴⁾ Leconte, Silliman's Journal 25, 62 und Phil. mag. (4), 15, 235; 1858.

stimmten Tönen, hauptsächlich denjenigen des Cello, zuckten und die Triller dieses Instruments mit einer solchen Genauigkeit wiedergaben, dass „ein Tauber die Harmonie hätte sehen können“. Er fand gleichzeitig, dass eine Flamme in Folge genügenden Druckes nahe daran sein muss, zu summen, wenn sie empfindlich sein soll. Dies ist in der That eine wesentliche Bedingung für das Zustandekommen der Erscheinung. Die Empfindlichkeit einer Flamme hängt ausserdem ab von der Gestalt des Brenners, von der Breite der Zuführungsröhren (das Einschieben eines Hahnes in die Nähe des Brenners kann eine Flamme absolut ungeeignet machen), und endlich von der Höhe der Töne, welche man angiebt (eine Flamme ist für diejenigen Töne empfindlich, welche sie selbst auszusenden

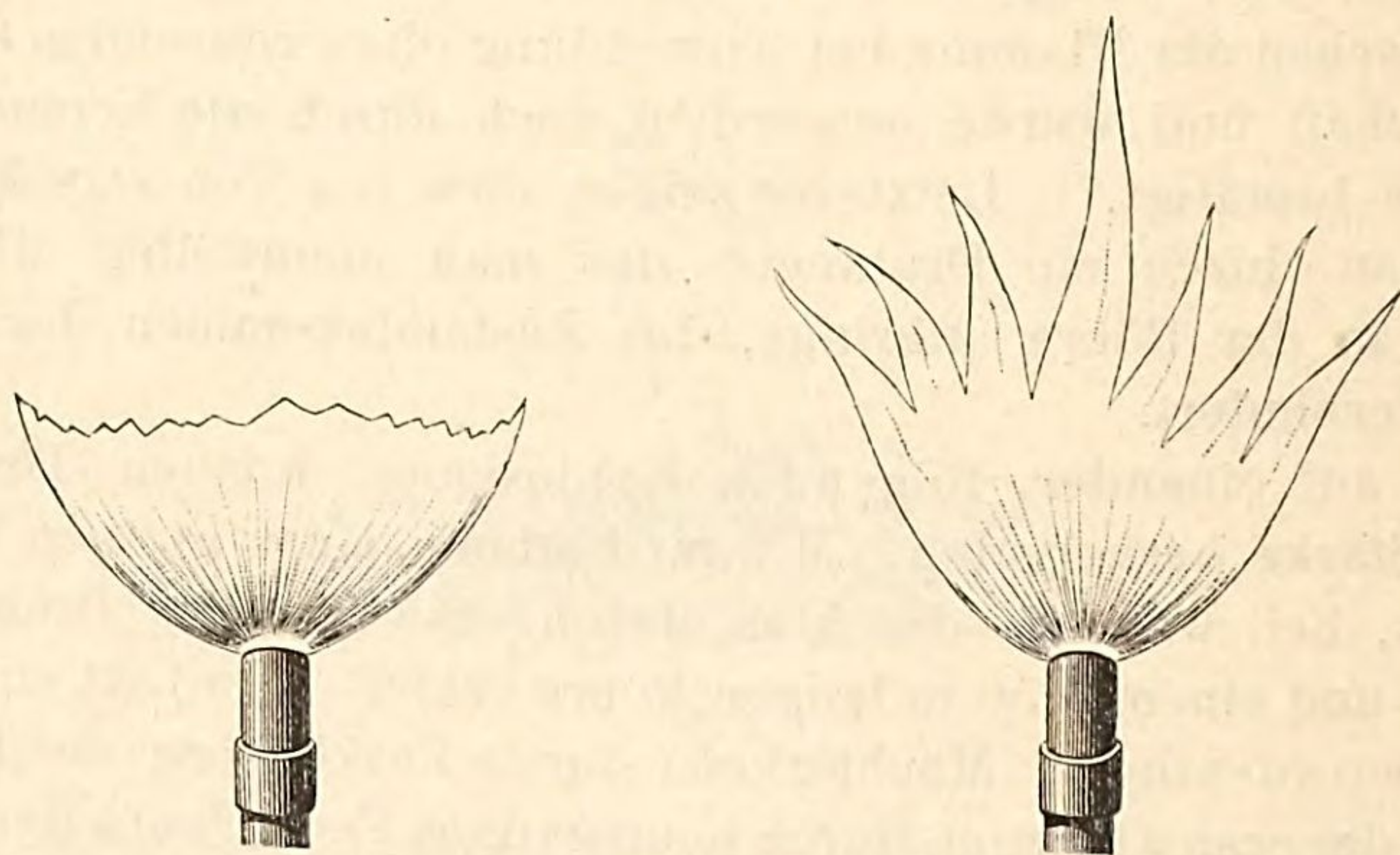


Fig 82.

im Begriffe steht). Alle diese Einzelheiten wurden von Tyndall¹⁾ und Barrett²⁾ untersucht; wir wollen hier einige ihrer Experimente besprechen.³⁾

Die Flamme eines Fledermausbrenners wird aus einem kleinen Gasometer gespeist, der unter stärkerem Drucke steht, als dies bei den städtischen Gasometern der Fall zu sein pflegt; dieselbe verlängert sich bei jedem Schlage eines Hammers auf einen entfernten Amboss und theilt sich gleichzeitig in sieben Zungen.

Eine lange, gerade und leuchtende Flamme (Fig. 83) zieht sich beim Klappern eines Schlüsselbundes zusammen und verliert allen Glanz. Die einzelnen Vocale haben eine verschiedene Wirkung: *U* bringt gar keine Veränderung hervor, *E* hat eine Erschütterung

¹⁾ Tyndall, Phil. mag. (4), **33**, 92; 1867.

²⁾ Barrett, Phil. mag. (4), **33**, 216 u. 287; 1867.

³⁾ Vgl. Tyndall, On Sound 250.

zur Folge und *A* kann die *Vocalflamme* völlig auslöschen; ebenso der Zischlaut *S*.

Manche Flammen sind für die tiefen Töne empfindlicher, andere für die hohen. Ausserdem äussert sich die Übertragung

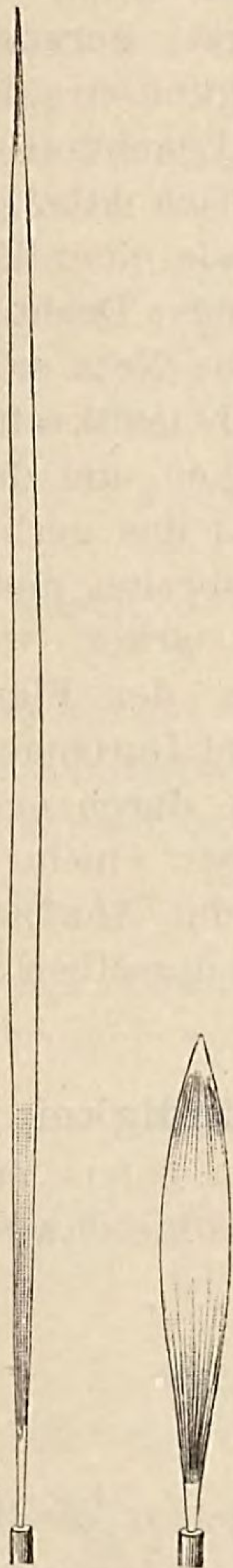


Fig. 83.

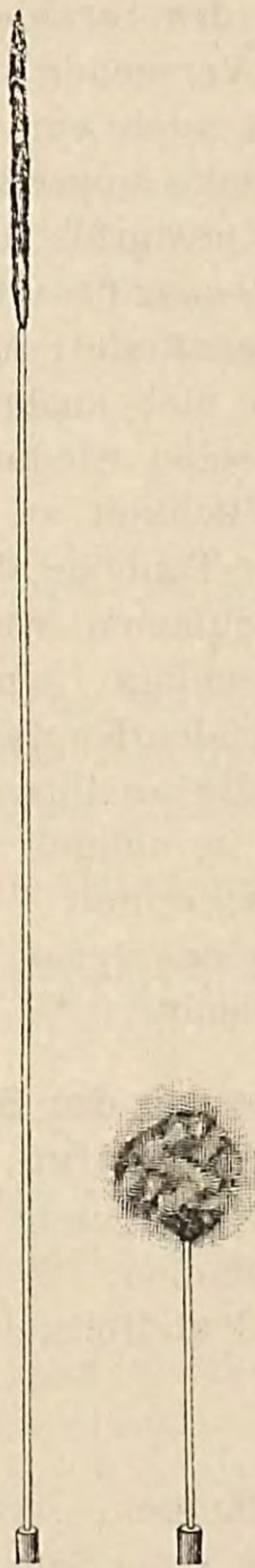


Fig. 84.

der Schwingungen bald durch eine Verlängerung der Flammen, bald durch eine Verkürzung.

Die Flamme lässt sich auch durch eine Rauchsäule ersetzen (Fig. 84), und ganz allgemein durch einen Gasstrahl von gewöhnlicher Temperatur. Um dann die Erscheinung noch sichtbar zu machen, projecirte Govi¹⁾ den Schatten des Strahles auf einen

¹⁾ Govi, Atti della reale Accademia della science di Torino 5, 475; 1870; und Journal de physique 2, 29; 1873 (Lissajous).

Schirm. Die Deutlichkeit wird dadurch vermehrt, dass man das Gas durch eine Flasche streichen lässt, in welcher sich ein Schwamm befindet, der mit einer Flüssigkeit von besonders starkem optischen Brechungsvermögen getränkt ist (Lissajous). Erzeugt man dann in einiger Entfernung einen Ton, so sieht man, wie der durchsichtige Theil des Strahles sich verkürzt, gerade wie bei den Savart'schen Versuchen mit den Flüssigkeitsstrahlen (256).

Man kann auch eine Flamme von Leuchtgas unter dem gewöhnlichen Drucke anwenden, wenn man sich dabei des von Govi¹⁾ angegebenen Kunstgriffs bedient: Das aus einer kleinen Öffnung ausströmende Gas trifft auf ein engmaschiges Drahtnetz, über welchem man es anzündet; hat man nun das Netz so weit gehoben, bis die Flamme sich ausbreitet und ihre Leuchtkraft verliert, dann genügt es, dasselbe wieder etwas zu senken, um der Flamme eine solche Empfindlichkeit zu ertheilen, dass das geringste Geräusch von bestimmter Tonhöhe die Flamme ausbreitet und zum Summen bringt. Das Summen wird noch viel stärker, wenn man, wie Geyser²⁾ vorschlägt, eine Röhre über der Flamme anbringt. Mit einer verticalen Kupferröhre von 4 cm Durchmesser und 15 bis 20 cm Länge, die an ihrem unteren Ende durch ein Drahtnetz geschlossen und in einiger Entfernung über einem Bunsenbrenner aufgestellt war, erhielt Lissajous³⁾ beim Anzünden des Gases in der Röhre einen hohen Ton von fast derselben Stärke wie der Pfiff einer Locomotive.⁴⁾

367. Messung der Schallgeschwindigkeit in den Gasen mit Hülfe der Pfeifen. — Die Pfeifen liefern ein vortreffliches Mittel, um auf indirectem Wege die Schallgeschwindigkeit in den Gasen zu bestimmen.

Aus der Grundformel

$$\lambda = V\tau = \frac{V}{N}$$

ergiebt sich nämlich, dass man unmittelbar die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Schalles in einem Gase bestimmen kann, wenn

¹⁾ Govi, loc. cit., und Journal de physique, loc. cit., vgl. auch Neyreneuf, Journal de physique 9, 280 und 10, 127; 1880—1881.

²⁾ Geyser, American journal of science and arts (3), 3, 340; 1872.

³⁾ Lissajous, Journal de physique 2, 98; 1873.

⁴⁾ Ein ähnlicher Apparat war in anderer Weise bereits von Rijke angewendet worden: In eine Glasröhre wurde ein Drahtnetz eingeführt und mittelst einer Alkoholflamme bis zur Rothgluth erhitzt. Entfernte man dann die Lampe, so entstand ein Ton, da der Durchgang durch das heisse Netz in der Gassäule eine Reihe von periodischen Stößen hervorrief (Pogg. Ann. 107, 339; 1859).

sich bei demselben die Wellenlänge λ eines Tones von bekannter Schwingungszahl N messen lässt. Nun gestatten die Pfeifen, λ zu ermitteln, und liefern somit, da N auf anderem Wege zu finden ist, indirect die Grösse V .

*Untersuchungen von Dulong.*¹⁾ — Im Jahre 1829 unternahm Dulong eine Reihe von Untersuchungen, die sich auf dieses Princip gründeten.

Er versuchte zunächst, die Schallgeschwindigkeit in der Luft zu ermitteln, indem er bei verschiedenen offenen Pfeifen die Höhe N ihres Grundtones und die Länge L der Pfeife bestimmte. Unter der Annahme, dass diese Länge L gleich der halben Wellenlänge des Tones N sei, berechnete er also V nach der Formel

$$V = 2LN.$$

Er fand jedoch auf diese Weise viel zu kleine Zahlen (370).

Sodann liess er die Pfeife ihren ersten Oberton angeben und maass mittelst eines Kolbens die Entfernung d der beiden Knoten, die dabei auftreten; diese Entfernung stellte ebenfalls die Grösse $\frac{\lambda}{2}$ dar. War die Schwingungszahl N' des Tones mittelst der Sirene gefunden, dann erhielt er wiederum V aus der Formel

$$V = 2dN'.$$

Die so erhaltenen Werthe fielen besser aus, ohne jedoch ganz zu befriedigen, denn die Abweichungen betrugen noch 10 m.

Gleichwohl ist die Methode, die Länge der Internodien zu messen, im Princip genau, und wir haben bereits früher gesehen, dass auch bei derartigen Messungen eine ziemliche Genauigkeit zu erreichen ist.

Wenn auch Dulong auf diese Weise nicht einen ganz richtigen Werth für die Schallgeschwindigkeit in der Luft erhielt, so gelangte er nichts desto weniger zu wichtigen Resultaten. Er fand nämlich, dass die Lage der Knoten und Bäuche von der Natur des schwingenden Gases unabhängig ist. Man hatte also nur die Höhe der Töne zu messen, welche verschiedene Gase in ein und derselben Pfeife lieferten, um daraus die relativen Geschwindigkeiten des Schalles in



Fig. 85.

¹⁾ Dulong, Ann. de chim. et de phys. (2), 41, 113; 1829.

diesen Gasen ableiten zu können. Dulong bestimmte daher mittelst der Sirene die Zahlen $N, N' N'' \dots$ der Schwingungen, welche in einer offenen Röhre von 60 cm Länge nach einander von Luft und von verschiedenen Gasen ausgeführt wurden, und hatte unter der Annahme, dass die Schallgeschwindigkeit in der Luft bei 0 Grad 333 m beträgt, die Zahl 333 nur mit den Quotienten $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N}, \dots$ zu multipliciren, um die Schallgeschwindigkeit in den untersuchten Gasen zu finden. Er erhielt auf diese Weise folgende Zahlen:

Luft	333,00 m (zu Grunde gelegte Zahl)
Sauerstoff	317,15 „
Wasserstoff	1269,50 „
Kohlenoxyd	337,40 „
Kohlensäure	261,60 „
Stickoxydul	261,90 „
Ölbildendes Gas	314,00 „

*Messungen von Masson.*¹⁾ — Masson nahm diese Versuche wieder auf und untersuchte eine grosse Anzahl von Gasen und Dämpfen. Folgende Tabelle enthält einige seiner Resultate:

Luft	333,00 m (zu Grunde gelegte Zahl)
Kohlenoxyd	339,76 „
Kohlensäure	256,83 „
Stickoxydul	256,45 „
Ölbildendes Gas	318,73 „
Sumpfgas	431,82 „
Ammoniak	415,00 „
Wasserdampf	401,00 „

*Arbeiten von Wertheim.*²⁾ — Wertheim suchte zur Vervollständigung der Arbeiten von Dulong den absoluten Werth der Schallgeschwindigkeit zu ermitteln, indem er, wie oben gezeigt, bestimmte, um welches Stück die Länge einer den Grundton gebenden Pfeife zu vergrössern ist, damit sie mit der theoretischen Länge übereinstimmt ($\frac{\lambda}{2}$, wenn die Pfeife offen, $\frac{\lambda}{4}$, wenn sie geschlossen ist). Die Übereinstimmung der verschiedenen Bestimmungen war eine genügende (im Allgemeinen $\frac{1}{100}$) und das endgültige Resultat:

$$a = 330,9 \text{ m}^3)$$

¹⁾ Masson, Ann. de chim. et de phys. (3), 53, 257; 1858.

²⁾ Wertheim, loc. cit.

³⁾ Diese Zahl ist etwas grösser als diejenige, welche Regnault später mit bedeutend weiteren Pfeifen erhielt. Aber da die hier zur Verwendung gelangenden Töne viel höher waren, so war der Einfluss

weicht nicht viel vom wahren Werthe der Schallgeschwindigkeit in freier Luft bei 0 Grad ab.

*Versuche von Kundt.*¹⁾ — Kundt gab der Methode der Inter nodien eine sehr elegante Form, indem er die Lage der Knoten durch Staubfiguren bestimmte, ganz ähnlich denjenigen, welche Chladni seiner Zeit auf der Oberfläche der schwingenden festen Körper hatte entstehen lassen.

Die Kundt'sche Anordnung besteht in ihrer endgültigen Form aus einer langen Glasröhre AB , die an ihren Enden durch Korken geschlossen ist. Der eine derselben, A , ist mit einem kleinen Stiel versehen, vermittelst dessen er etwas tiefer eingeschoben oder weiter zurückgezogen werden kann. Der andere, B , sitzt fest und wird mit sanfter Reibung von einem Stabe CD durchsetzt,

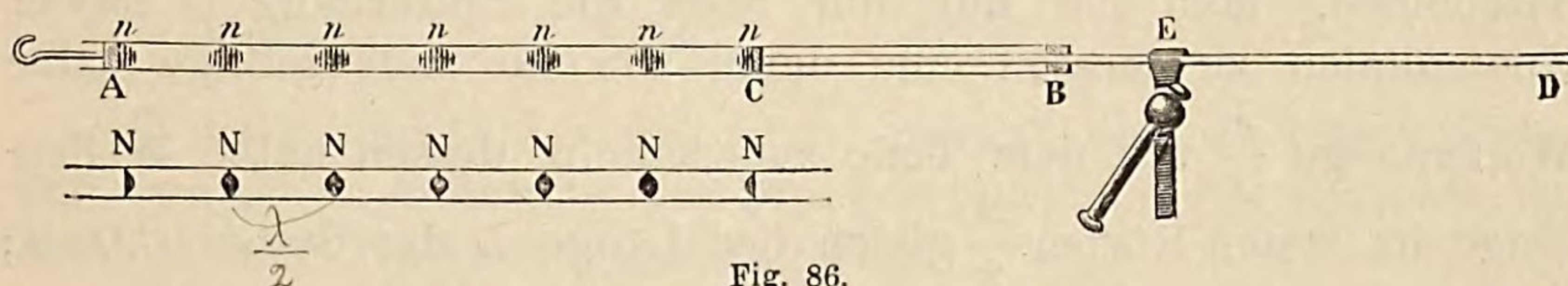


Fig. 86.

der im Innern der Röhre in eine Scheibe C endigt, deren Durchmesser etwas geringer ist, als derjenige der Röhre. Die Röhre wird im Innern mit einem leichten Staube bestreut (Lycopodium, amorpher Kieselsäure oder besser Korkpulver), von welchem man nur eben so viel verwendet, als an den Wänden haftet.²⁾ Spannt man nun die Mitte der Stange in einen Schraubstock E und streicht longitudinal, dann beginnt der Stab genau nach der Art einer beiderseits offenen Röhre zu schwingen, die ihren Grundton giebt. Die Scheibe C theilt ihre Verschiebungen der in der Röhre eingeschlossenen Luft mit, und die Luftsäule theilt sich demgemäss in Abschnitte von solcher Länge, dass jeder einzelne

des Durchmessers geringer (vgl. S. 71—72, Anm.) Immerhin ergab sich derselbe auch aus diesen Versuchen ganz deutlich. Vereinigt man nämlich die auf einen und denselben Durchmesser bezüglichen Zahlen, dann findet man als Mittelwerthe:

Pfeife aus Messing, 4 cm Durchmesser.	331,89 m
„ „ „ 2 „ „	330,11 „
„ „ Glas, 2 „ „	329,98 „
„ „ Messing, 1 „ „	329,12 „

¹⁾ Kundt, Pogg. Ann. 127, 497; 128, 337 und 135, 337 u. 527; 1866—1868.

²⁾ Eine einigermaassen bedeutende Staubmenge verringert die Schallgeschwindigkeit wesentlich.

derselben im Einklang mit dem Stabe schwingt. Damit jedoch diese Theilung thatsächlich vor sich gehen kann, muss die Länge der Säule AC genau ein Vielfaches der halben Wellenlänge des betreffenden Tones in der Luft sein. Gerade um dies Ziel zu erreichen, giebt man dem Propfen A eine gewisse Beweglichkeit, und bei der Regulirung kann man sich durch das Aussehen der Staubfiguren selbst leiten lassen. Der Staub wird nämlich gegen die Knoten $n, n, n, \dots$ getrieben und die zuerst durch einander laufenden Knotenlinien zeichnen sich um so klarer ab, je vollkommener die Regulierung gelungen ist: Entspricht die Länge der Luftsäule genau einem Vielfachen einer halben Wellenlänge, dann verlässt der Staub vollständig die Bäuche und bildet kleine isolirte Häufchen an den Stellen, welche die Knoten $N, N, N, \dots$ bezeichnen. Man hat nun nur noch die Entfernung C zweier Knotenlinien zu messen, um damit die für Luft gültige halbe Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ von dem Tone zu ermitteln, dessen halbe Wellenlänge im festen Körper $\frac{A}{2}$ gleich der Länge L des Stabes CD ist; die Proportion

$$\frac{l}{L} = \frac{v}{V}$$

giebt dann das Verhältniss der Geschwindigkeiten des Schalles in der Luft und in dem festen Körper.

Es mögen hier beispielsweise die Zahlen folgen, welche sich für die Länge eines Abschnittes ergaben (dieselben sind dadurch erhalten, dass man die Gesamtlänge durch die Anzahl der Abschnitte 8 oder 10 dividirte); hierbei hatte der Stab, der aus Messing bestand, eine Länge von 0,9415 m und gab den ersten Oberton.

43,25 mm
43,25 "
43,50 "
43,28 "
43,41 "
43,33 "
43,44 "
43,13 "
43,13 "
Mittel 43,30 mm

Der mittlere Fehler übersteigt nicht 0,10 mm.

Kundt fand auf diese Weise, entsprechend der Theorie von Helmholtz:

1. Die Schallgeschwindigkeit in einer Röhre nimmt mit dem Durchmesser derselben ab, vorausgesetzt, dass dieser geringer ist als der vierte Theil der Wellenlänge des betreffenden Tones.

2. Die Abnahme ist beträchtlicher für die tiefen Töne als für die hohen.

Zum Beweise für diese Schlüsse geben wir hier folgende Tabelle wieder, in welcher für jeden Ton bei der weitesten Röhre die Zahl von Moll und van Beck angenommen ist.

Röhren- Durchmesser	Schallgeschwindigkeit		
	$\lambda = 180$ mm	$\lambda = 90$ mm	$\lambda = 60$ mm
55 mm	332,80 m	332,80 m	332,80 m
26 „	332,73 „	332,66 „	333,45 „
13 „	329,47 „	329,88 „	330,87 „
6,5 „	323,00 „	327,14 „	328,14 „
3,5 „	305,42 „	318,88 „	—

Kundt fand ferner den Satz bestätigt, dass die Geschwindigkeit von einer Änderung des Druckes innerhalb der Grenzen von 400 mm und 1760 mm unabhängig ist.

Er bestätigte ausserdem noch das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeit sich proportional $\sqrt{1 + \alpha t}$ ändert. Bei Luft von 100° fand er

389,21 m; 388,84 m; 389,15 m; 388,47 m; 389,02 m;
389,64 m; 388,60 m;

im Mittel also 388,99 m, während die theoretische, mit $\alpha = 0,003665$ berechnete Zahl 389,03 m ist.¹⁾

Endlich glaubte er aus seinen Versuchen folgern zu dürfen, dass die Geschwindigkeit des Schalles von seiner Stärke unabhängig ist. Aber die Methode ist nicht genau genug, um diese Frage zu entscheiden, denn man kann die Decimeter nicht mehr verbürgen.

Dagegen eignet sich die Kundt'sche Methode vorzüglich zur Vergleichung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles

¹⁾ Da sich die Wellenlänge eines gegebenen Tones in der Luft mit der Temperatur proportional der Grösse $\sqrt{1 + \alpha t}$ ändert, so kann jeder Apparat, der diese Wellenlänge zu messen gestattet, als *akustisches Pyrometer* dienen (Mayer, Dana's and Sillimann's American Journal (3), 4, 425, 1872; und Journal de physique 2, 227; Chautard, Journal de physique 3, 78; 1874). Dabei ist jedoch zu bemerken, dass die Empfindlichkeit eines solchen Pyrometers mit wachsender Temperatur abnimmt: Für eine Zunahme der Temperatur um 1° ist die Änderung der Wellenlänge des Tons $c_2 = 512$ Schwingungen, die bei gewöhnlicher Temperatur mehr als 1 mm beträgt, bei etwa 1000° nur noch 0,5 mm.

in verschiedenen Gasen. Man bringt zu diesem Zwecke am anderen Ende D der Stange CD eine zweite Röhre an, entsprechend der mit Luft gefüllten Röhre AB , und füllt dieselbe mit dem zu untersuchenden Gase; dann sind die entsprechenden Entfernungen der Staubhäufchen in den beiden Röhren den Geschwindigkeiten genau proportional, vorausgesetzt, dass die Versuchsbedingungen auf beiden Seiten dieselben sind.

Wüllner¹⁾ bestimmte auf diesem Wege nicht allein die relative Geschwindigkeit des Schalles in den verschiedenen Gasen, sondern auch die absoluten Geschwindigkeiten vermittelt der Schwingungszahlen des erregenden Stabes; hierbei berücksichtigte er auch noch den Einfluss des Röhrendurchmessers mit Hülfe der Formel von Kirchhoff; er fand:

	Relative Geschwindigkeit	Absolute Geschwindigkeit
Luft	1	331,90 m
Kohlenoxyd	1,016	337,13 „
Kohlensäure	0,781	259,38 „
Stickoxydul	0,782	259,64 „
Ammoniak	1,253	415,99 „
Äthylen	0,952	315,90 „

Zu Demonstrationszwecken lassen sich die Apparate sehr vereinfachen, indem man dann als schwingende Stäbe die Röhren selbst benutzt, welche die Gase enthalten. Bei dieser Anordnung, welche der Verfasser zuerst anwendete, wird jede mit Gas gefüllte und etwas Staub enthaltende Röhre an beiden Enden geschlossen. Es genügt dann, sie in der Mitte fest zu halten und



Fig. 87.

mit einem feuchten Tuche zu reiben, um die Trennung der Luftsäule in Abtheilungen zum Vorschein zu bringen. Immerhin sind hierbei die Staubfiguren weniger scharf, als bei Verwendung eines Stabes, da die Knotenlinien der Röhre selbst in einer schon früher von Savart beobachteten Spirale aufzutreten streben; das Lycopodium vertheilt sich anders, indem ein Ring um jeden Knoten und Transversalstreifen auf den Bäuchen auftreten. Die Entfernung der Mitten zweier auf einander folgender Ringe entspricht einer

¹⁾ Wüllner, Wied. Ann. 4, 321, 1878; und Lehrbuch der Experimentalphysik 1, 803.

Abtheilung d. h. einer halben Wellenlänge. Eine mit Luft gefüllte Röhre aus böhmischem Glase zeigt 16 Abschnitte, woraus sich sofort ergiebt, dass die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft $\frac{1}{16}$ von der Schallgeschwindigkeit im böhmischen Glase beträgt. Mit vier identischen Röhren, die mit Luft, Kohlensäure, Leuchtgas und Wasserstoff gefüllt waren und so erregt wurden, dass sie die Octave des Grundtones gaben, erhielt Kundt 32, 40, 20 und 9 Abschnitte. Die relativen Geschwindigkeiten des Schalles in diesen vier Gasen sind also 1; 0,8; 1,6; 3,56.

368. Messung der Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten mittelst der Pfeifen. — Da die Schwingungen der Flüssigkeitssäulen dieselben Gesetze befolgen, wie die Schwingungen der Gassäulen, so versuchte man, die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten dadurch zu messen, dass man dieselben in Pfeifen einschloss und das gleiche Verfahren auf sie anwandte, wie auf die Gase.

Fig. 88. zeigt den hierzu von Wertheim gebrauchten Apparat. Eine Pfeife *b*, deren Einzelheiten besonders abgebildet sind,

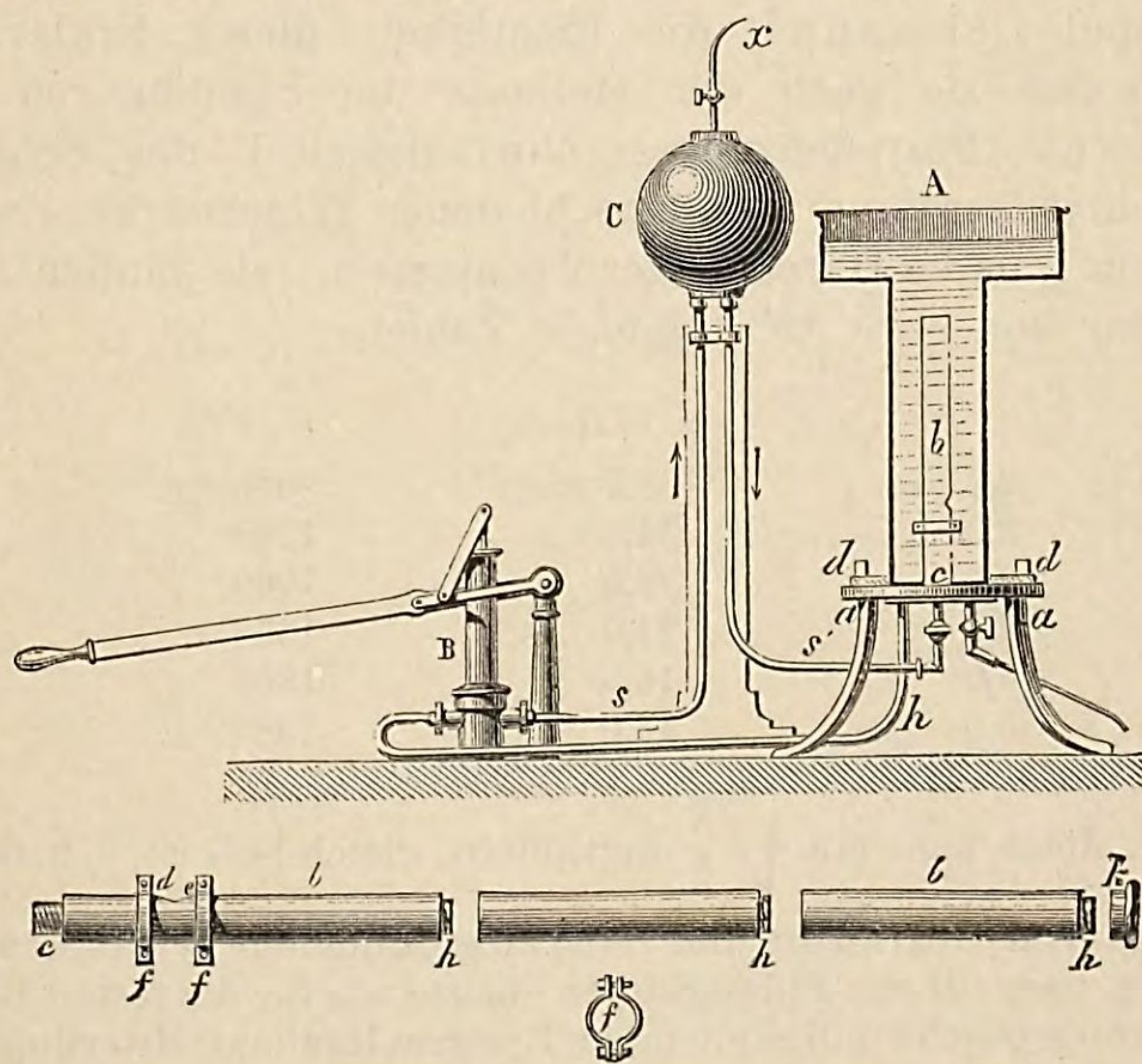


Fig. 88.

wurde in ein Gefäß *A* getaucht, welches die zu untersuchende Flüssigkeit enthielt; mittelst einer Pumpe *B* konnte ihr ein Strom von derselben Flüssigkeit zugeführt werden; dieser Flüssigkeitsstrom wurde durch die Kugel *C* regulirt, die mit Luft unter passen-

dem Drucke gefüllt blieb. Die Pfeife b war mit einem Mundstücke versehen, dessen beide Lippen d und e sich mittelst der Klemmringe ff in beliebige Entfernung von einander stellen liessen; sie bestand im Übrigen aus mehreren einzelnen Theilen, die an einander gesetzt und durch das Aufschrauben einer Kappe k auf das letzte Gewinde h geschlossen werden konnten. Wertheim beabsichtigte, die Störung an dem Mundstück bei der geschlossenen Pfeife, sowie die Summe der Störungen an beiden Enden bei der offenen Pfeife zu untersuchen. Er fand jedoch bald, dass er mit einer geschlossenen Pfeife überhaupt nicht experimentiren konnte, da der Deckel an den Schwingungen der Flüssigkeitssäule immer lebhaft Theil nahm, deshalb beschränkte er sich auf Versuche mit der offenen Pfeife; aber selbst in diesem Falle theilt sich die Bewegung den Wänden noch mit, und zwar erklärt sich hieraus der geringe Werth, den Wertheim für die Schallgeschwindigkeit im Wasser fand (1173 m bei 11^0).¹⁾

v. Helmholtz²⁾ wies nämlich sehr bald nach, dass der Verlust an lebendiger Kraft vom Durchmesser der Röhre, der Stärke der Wand und ihrer Elasticität abhängen müsse. Später haben Kundt und Lehmann³⁾ die Richtigkeit dieser Erklärung bestätigt, indem sie nach der Methode der Staubfiguren mittelst Eisenfeile die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V des Schalles im Wasser in Glasröhren von verschiedener Wandstärke e und verschiedenem inneren Durchmesser $2R$ maassen; sie fanden bei einer Temperatur von etwa 18^0 folgende Zahlen:

e	$2R$	V
2,2 mm	28,7 mm	1040 m
3,0 „	34,0 „	1228 „
3,0 „	23,5 „	1262 „
2,5 „	21,0 „	1358 „
5,0 „	16,5 „	1360 „
5,0 „	14,0 „	1383 „

¹⁾ Da diese Zahl mit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, gleich 1437 ist, d. h. fast genau gleich dem von Colladon und Sturm gefundenen Werthe, so schloss Wertheim dass für die Flüssigkeiten ebenso wie für die festen Körper die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Longitudinalerschütterung in einer cylindrischen Säule nur das $\sqrt{\frac{2}{3}}$ fache der Geschwindigkeit in einer unendlich grossen Masse sei. Dieser Vergleich der Flüssigkeiten mit den festen Körpern ist offenbar unhaltbar.

²⁾ Helmholtz, Fortschritte der Physik im Jahre 1848. Vgl. auch André, C. R. **70**, 568; 1870.

³⁾ Kundt und Lehmann, Pogg. Ann. **153**, 1; 1874.

Dvorák¹⁾ erhielt nach derselben, etwas modificirten Methode mittelst Schiesspulvers, das er durch Auslaugen vom Salpeter befreit hatte, ganz ähnliche Resultate:

e	$2R$	V
0,82 mm	17,9 mm	998 m
0,63 „	11,7 „	1046 „
0,52 „	8,46 „	1164 „
2 „	15 „	1213 „
2 „	11 „	1281 „

Der Fehler vermindert sich mit zunehmender Wandstärke und abnehmendem Durchmesser der Röhre, da hierdurch der Widerstand der Wand wächst, aber er vermindert sich nicht so sehr, dass man nach dieser Methode die Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten messen könnte. Dagegen eignet sich die Methode, wie wir später sehen werden, vorzüglich zur Ermittlung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern.

¹⁾ Dvorák, Pogg. Ann. 144, 156; 1875.

Sechstes Capitel.

Schwingungen von Saiten.

369. Gesetze der schwingenden Saiten. — *Geschichte des Problems.* — Die Griechen schrieben die Erfindung der Leier dem Gotte Apollo zu, die Juden Jubal, einem Nachkommen Kains, die Ägypter ihrem Hermes Trismegistos und die Chinesen dem Religionsstifter Confucius. Aber wenn wir auch von diesen sagenhaften Überlieferungen absehen, so wissen wir wenigstens sicher, dass die Ägypter schon zur Zeit von Ramses III. (1250 v. Chr.) viele sehr vollkommene Saiteninstrumente, von der grossen Harfe bis zur bescheidenen Laute, besassen. Die hauptsächlichsten Erscheinungen, die die transversalen Schwingungen der Saiten aufweisen, waren also schon sehr früh bekannt. Pythagoras zeigte mittelst eines Monochords, dass man die Länge einer Saite auf die Hälfte oder zwei Drittel reduciren muss, um die Octave oder Quinte zu erhalten. Er untersuchte auch den Einfluss der Spannung, scheint aber kein genaues Gesetz dafür gefunden zu haben.

Gesetze. — Im Anfang des 17. Jahrhunderts stellte Mersenne¹⁾ auf experimentellem Wege die Gesetze für die schwingende Saite auf (327); hundert Jahre später lieferte Taylor²⁾ die Theorie dazu. Seine Formel

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

wo g die Beschleunigung der Schwere, T die Spannung,³⁾ P das Gewicht und L die Länge der Saite bezeichnet, enthielt alle von Mersenne entdeckten Gesetze. Wenn die Saite ein Cylinder vom

¹⁾ Mersenne, loc. cit., Buch 2, 18.

²⁾ Taylor, Phil. Trans., 1713; und eingehender in seinem berühmten Werk: *Methodus incrementorum*, London 1715.

³⁾ Die Spannung wird durch das Gewicht gemessen, das man an das Ende der Saite anhängen muss, um diese Spannung hervorzubringen.

Radius R und vom specifischen Gewicht p ist, so hat man $P = \pi R^2 L p$, und die Formel geht über in

$$N = \frac{1}{2RL} \sqrt{\frac{gT}{\pi p}}.$$

Die Höhe des Grundtons (wie gewöhnlich durch die Schwingungszahl definirt) ist der Länge, dem Durchmesser und der Quadratwurzel aus der Dichte der Saite umgekehrt, dem spannenden Gewicht direct proportional.

Experimentelle Beweise. — Alle diese Sätze lassen sich leicht mittelst des Monochords von Marloye (Fig. 19) beweisen, auf dem zwei Saiten ausgespannt sind. Die eine von ihnen dient zur Vergleichung, während die andere den verschiedenen Versuchsbedingungen gemäss abgeändert wird. Um jedoch die Spannung genau messen zu können, bedient man sich am besten nach dem Vorgang von Savart eines verticalen Monochords, dessen Saiten direct durch die an ihrem unteren Ende angehängten Gewichte gespannt werden, während die Schwingungen durch zwei auf dem Brett befestigte Stege begrenzt werden können.

Der Beweis gelingt um so besser, je mehr die Saite ihrer theoretischen Definition (372) genügt, d. h. je biegsamer und je weniger steif sie ist. Darmsaiten sind im Allgemeinen den Metallsaiten vorzuziehen.

Obertöne. — Abgesehen vom Grundton sind noch Obertöne vorhanden, die Mersenne¹⁾ bemerkte, als er aufmerksam auf den Ton hinhörte; je schwächer der Grundton wird, um so mehr treten die Obertöne hervor: man kann auf diese Weise die Octave hören (die Mersenne wegen ihres Gleichklangs mit dem Grundton nicht vernahm), die Duodecime, die zweite Octave (die ihm ebenfalls entging) und die Terz der zweiten Octave.

Versuche von Noble und Pigott. — Im Jahre 1673 bewiesen zwei Schüler von Wallis in Oxford, Noble und Pigott,²⁾ die Existenz der Obertöne durch einen merkwürdigen Versuch. Die Musiker hatten seit langer Zeit beobachtet, dass, wenn eine Saite auf irgend einem Instrument angeschlagen wird, eine andere Saite, die sich in der Nähe befindet und die auf denselben Grundton abgestimmt ist, ebenfalls in Schwingungen geräth. Was tritt aber ein, wenn die zweite Saite auf die erste tiefere Octave, auf die

¹⁾ Mersenne, loc. cit.

²⁾ Noble und Pigott, citirt von Wallis, Phil. Trans., 1677; und Algebra 2, S. 466; London 1685.

tiefere Duodecime oder die zweite tiefere Octave der ersten direct angeschlagenen Saite abgestimmt ist? Die Schüler von Wallis zeigten, dass diese zweite Saite jedesmal den gleichen Ton giebt wie die erste: sie theilte sich in 2, 3, 4 . . . Theile, von denen jeder für sich schwingt und die durch feste Knoten getrennt sind. Noble und Pigott wiesen diese Knoten durch kleine Papierreiter nach, die sie auf die Saite setzten; diese blieben an den Knoten unbeweglich, während sie sonst überall abgeworfen wurden.

Versuch von Sauveur. — Der Franzose Sauveur¹⁾ stellte seinerseits dasselbe Experiment in etwas verschiedener Form an, in dem er einen der Theile der Saite direct mit dem Violinbogen

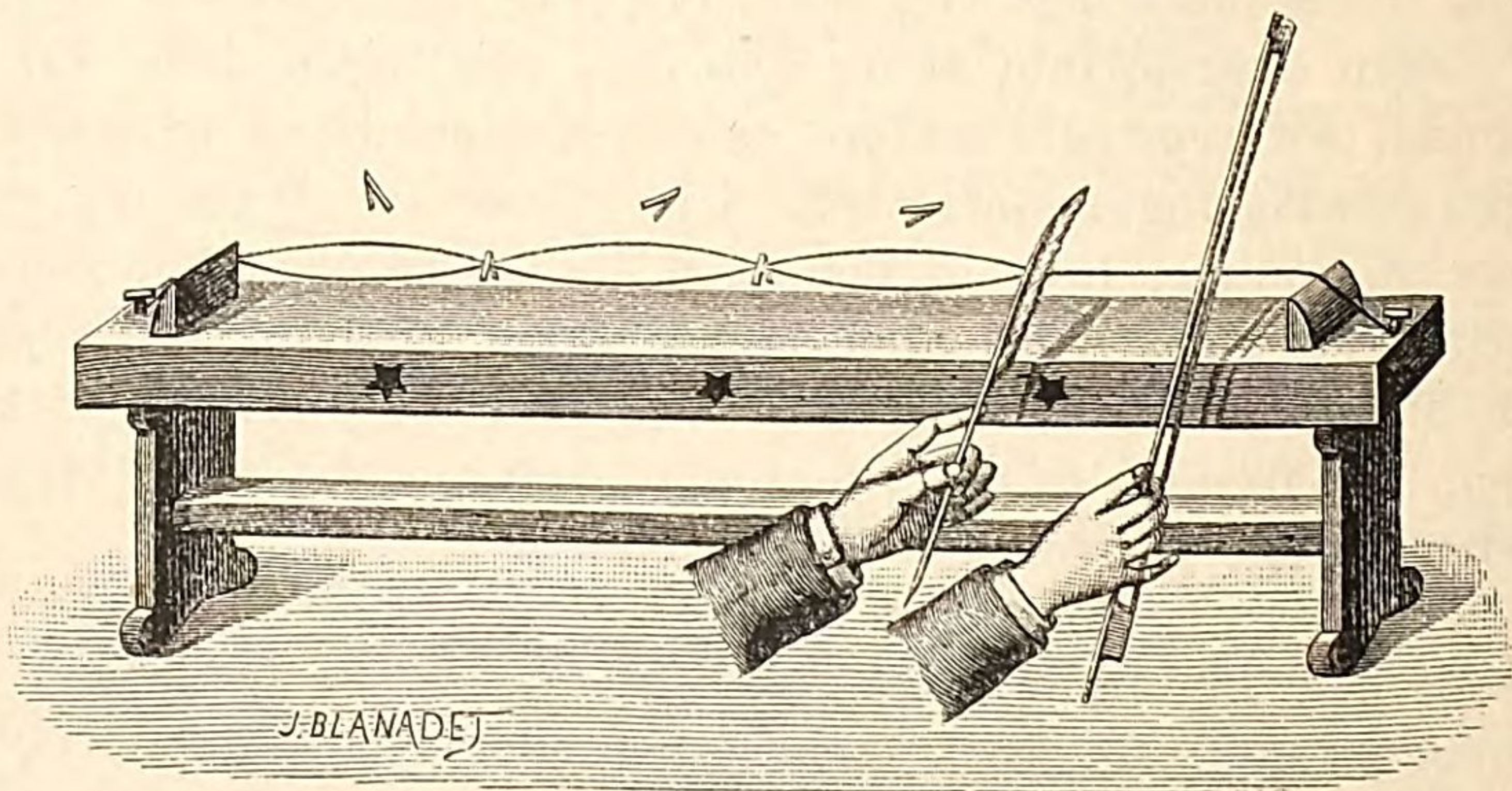


Fig. 89.

anstrich. Er beobachtete ferner, dass man die Octave, die Duodecime oder die zweite Octave hört, wenn eine Saite, die den Grundton angiebt und folglich ihrer ganzen Länge nach schwingt, mit dem Bart einer Feder auf der Mitte oder auf einem Drittel oder Viertel . . . der Länge berührt wird.²⁾ Gleichzeitig stellte er die Theilung der Saite mittelst weisser und schwarzer Reiter fest, die er auf die Knoten und Bäuche setzte (diese beiden Benennungen rühren von Sauveur her).

Versuch von Young. — Young³⁾ zeigte, dass keine ungeraden Obertöne entstehen, wenn die Saite in ihrer Mitte gezupft, angeschlagen oder, wie wir hinzufügen können, mit dem Bogen

¹⁾ Sauveur, Mémoires de l'Acad. des Sciences; 1701.

²⁾ Die Geigenspieler machen von dieser Thatsache Gebrauch, um sehr hohe und sehr reine Töne zu erhalten: sie berühren die schwingende Saite an dem entsprechenden Punkte leicht mit dem Finger.

³⁾ Young, Phil. Trans., 1880; und Miscellaneous Works (Ausgabe von Peacock, London 1855), 1, 64.

gestrichen wird:¹⁾ denn falls man sie alsdann in der Mitte mit der Feder berührt, hört sie vollständig zu tönen auf. Ebenso fehlen der zweite, vierte, sechste . . . Oberton, wenn die Saite auf einem Drittel ihrer Länge angeschlagen wird. Im Allgemeinen verschwinden alle Obertöne, deren Knoten mit der Stelle des Anschlags zusammenfallen.

Analogie zwischen den Gesetzen der Saiten und denen der Pfeifen. — Die hauptsächlichsten Bedingungen der transversalen Bewegung²⁾ der Saiten sind den Gesetzen für die longitudinalen Schwingungen der Pfeifen oder Stäbe sehr ähnlich. In beiden Fällen bedingt nämlich dieselbe Art der Bewegung dasselbe Verhältniss zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungszahl.

370. Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Schwingungszahl. — Wir wollen auf den Fall zurückgehen, den wir schon oben (343) behandelt haben: Man spanne einen langen Kautschukschlauch, dessen eines Ende befestigt ist, während man das andere in der Hand hält, ziemlich straff an und rufe alsdann nahe bei der Hand eine transversale Bewegung hervor. Diese pflanzt sich bis zu dem festen Ende fort, wird dort reflectirt, wobei die Geschwindigkeit ihr Zeichen wechselt (der Wellenberg geht in ein Wellenthal über) und kehrt nach der Hand zurück, um dort von Neuem das Zeichen zu wechseln.³⁾ Auf diese Weise wird eine an dem Ende unterhaltene periodische Bewegung sehr schnell verstärkt, da die zweimal reflectirte Welle mit der ursprünglichen Welle übereinstimmt, vorausgesetzt, dass der doppelte von der Welle zurückgelegte Weg ein ganzes Vielfaches k der Periode ist. Be-

¹⁾ Delezenne beobachtete, dass eine Saite, die in ihrer Mitte mit dem Bogen angestrichen wird, keinen Ton giebt und schloss daraus, dass die Octave für die Entstehung des Grundtones nothwendig sei. Aber obwohl die Breite des Bogens den Versuch schwierig macht, so kann man doch, wenn die Mitte der Saite gestrichen wird, eine grosse Anzahl von geraden Obertönen hervorrufen. (Delezenne, *Recueil des travaux de la Société des sciences de Lille*, 1827; Duhamel, *C. R.*, 10, 855, 1840; Antoine, *Ann. de chim. et de phys.* (3), 27, 191, 1849.)

²⁾ Die Saiten können auch longitudinale Schwingungen ausführen, die wir bei Gelegenheit der schwingenden Stäbe besprechen werden, da zwischen beiden kein Unterschied besteht.

³⁾ Die Gebrüder Weber haben die Fortpflanzung einer Erschütterung an einer langen, sehr biegsamen und wenig elastischen seidenen Schnur sorgfältig beobachtet: sie fanden, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Natur der Erschütterung (Zupfen, Anschlagen mit dem Hammer) und von dem schon zurückgelegten Wege unabhängig ist (E. H. und W. Weber, *loc. cit.* 460).

deutet also V die Geschwindigkeit, mit der sich die transversale Schwingung fortpflanzt, und L die Länge der benutzten Saite, so ist die Bedingung dafür, dass sich die einzelnen Wellen verstärken

$$\frac{2L}{V} = k\tau,$$

oder

$$N = k \frac{V}{2L};$$

dieselbe Formel haben wir oben (359) für die Pfeifen abgeleitet.

Wenn man die Periode verändert, lässt sich der Schlauch leicht in eine beliebige Anzahl Theile zerlegen, die gleiche Schwingungen ausführen. Man kann aber dem Versuch noch eine genauere Form geben, die von Melde in Marburg herrührt.

371. Versuche von Melde.¹⁾ — Eine lange Schnur aus weisser Seide wird horizontal zwischen einem Nagel oder einer festen Rolle und einer verticalen Stimmgabel ausgespannt. Wenn die Schnur in der Ebene liegt, die durch die Zinken der Stimm-

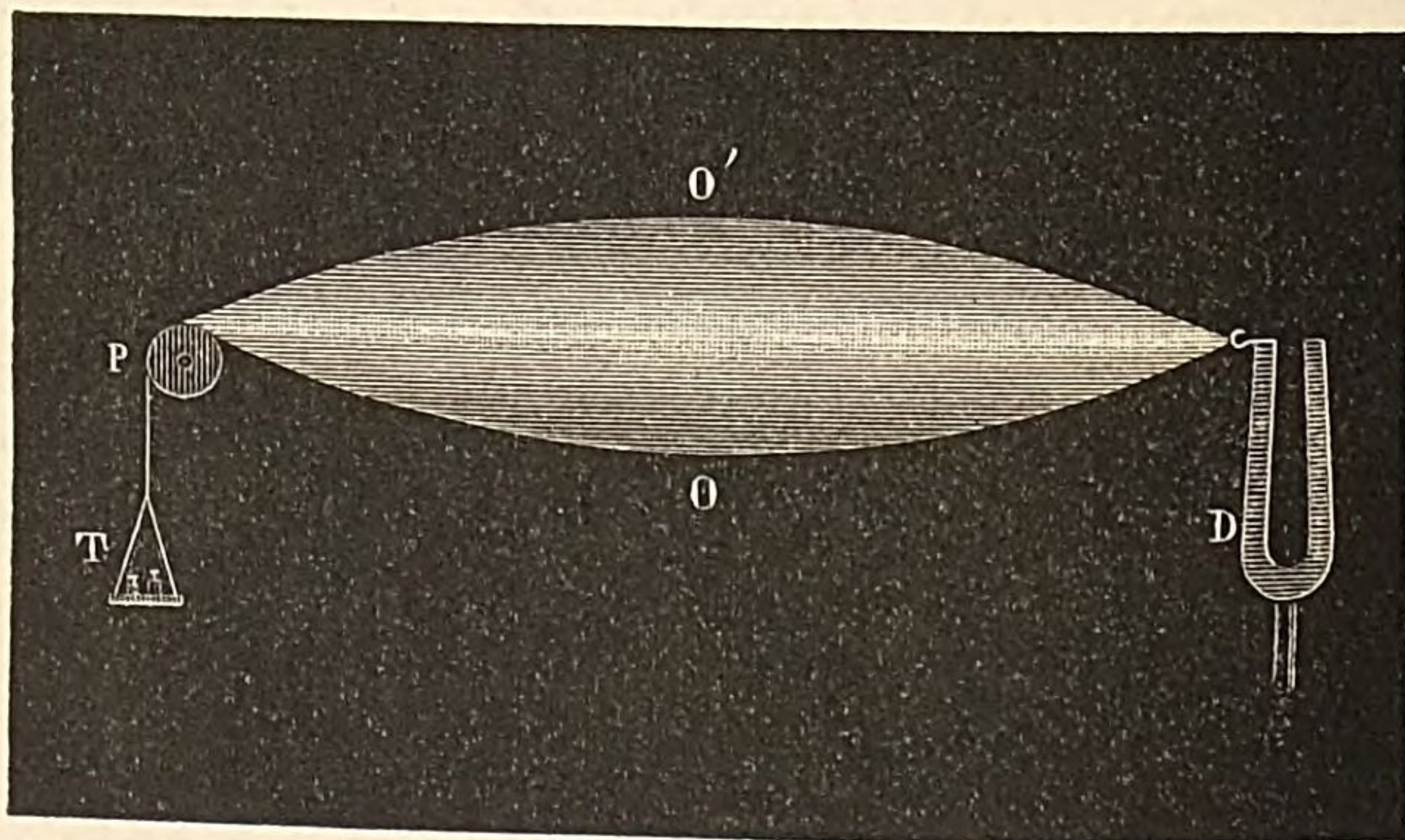


Fig. 90.

gabel geht, so verschiebt sich beim Schwingen der Gabel das Ende der Schnur longitudinal. Die bald gespannte, bald schlaffe Schnur senkt sich in Folge dessen, kehrt wieder in die horizontale Lage zurück, erhebt sich, wird darauf wieder horizontal u. s. w., da die longitudinale Bewegung des Befestigungspunktes eine transversale Bewegung des Systems von doppelter Periode hervorruft; die ganze Saite schwingt also in der tieferen Octave der Stimm-

¹⁾ Melde, Pogg. Ann., 109, 193 und 111, 513; 1860—1864.

gabel.¹⁾ Damit aber die Saite in dieser Weise schwingt, muss sie passend gespannt sein. Anfangs erhält man im Allgemeinen ein unregelmässiges Schwirren; nachdem man alsdann allmählich die Spannung geändert und den gewünschten Grad erreicht hat, nimmt die Saite die Form einer Spindel von bewundernswerther Schärfe und vollkommener Beständigkeit an. Vermindert man darauf die Spannung der Saite, so tritt wieder eine vollständige Unregel-

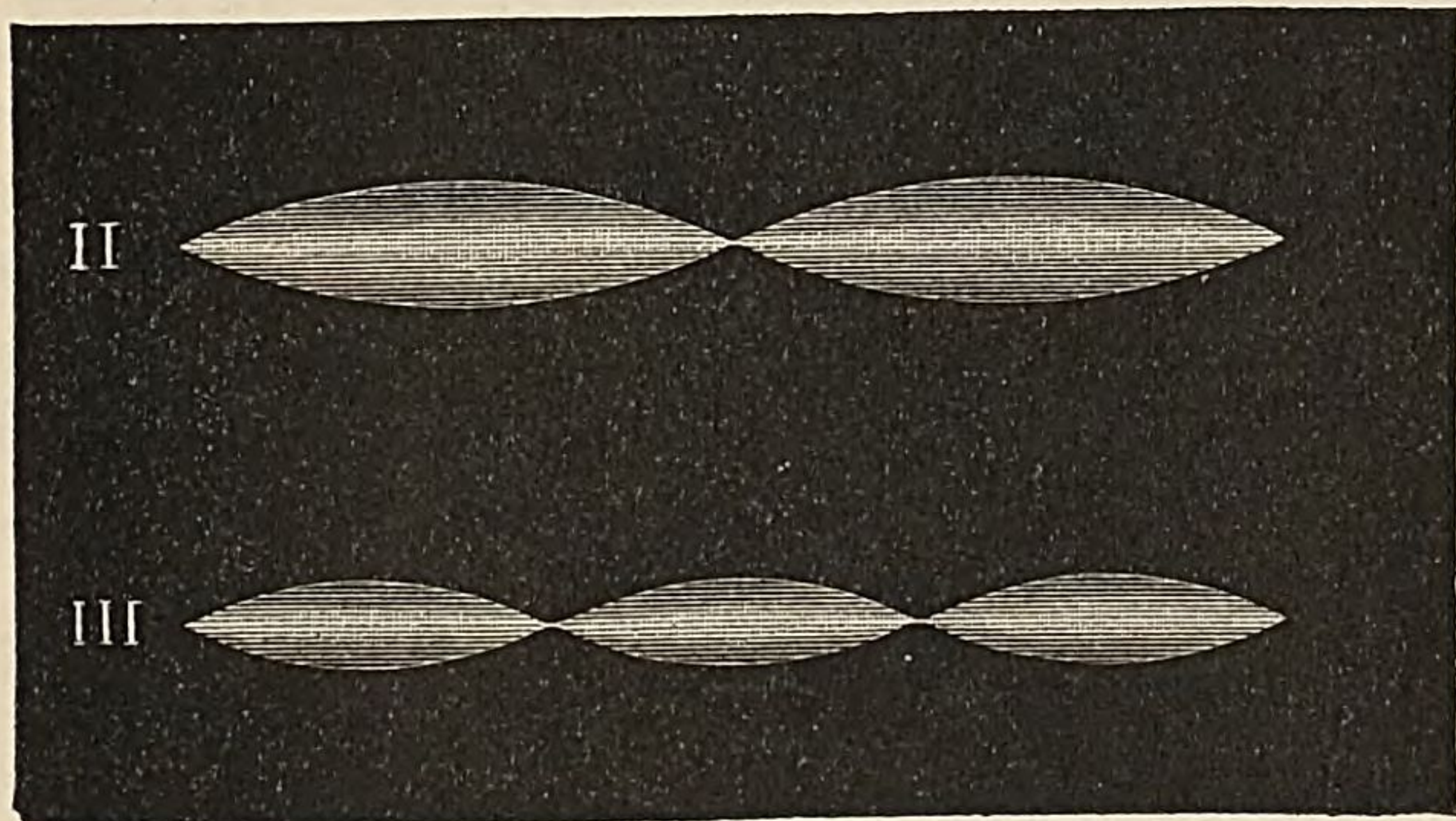


Fig. 91.

mässigkeit ein, und die Schwingungen werden erst dann wieder regelmässig, wenn die Spannung genau ein Viertel des ersten Werthes beträgt: die Saite schwingt nun in zwei Abtheilungen, die durch einen ganz unbeweglichen Knoten getrennt sind. Beträgt die Spannung nur noch ein Neuntel des ursprünglichen Werthes, so zeigt die Saite drei Abtheilungen u. s. w. Jede dieser Formen tritt mit auffallender Deutlichkeit auf.²⁾

¹⁾ Stehen die Schwingungen der Stimmgabel auf der Richtung der Saite senkrecht, so giebt diese denselben Ton wie die Gabel. Wenn

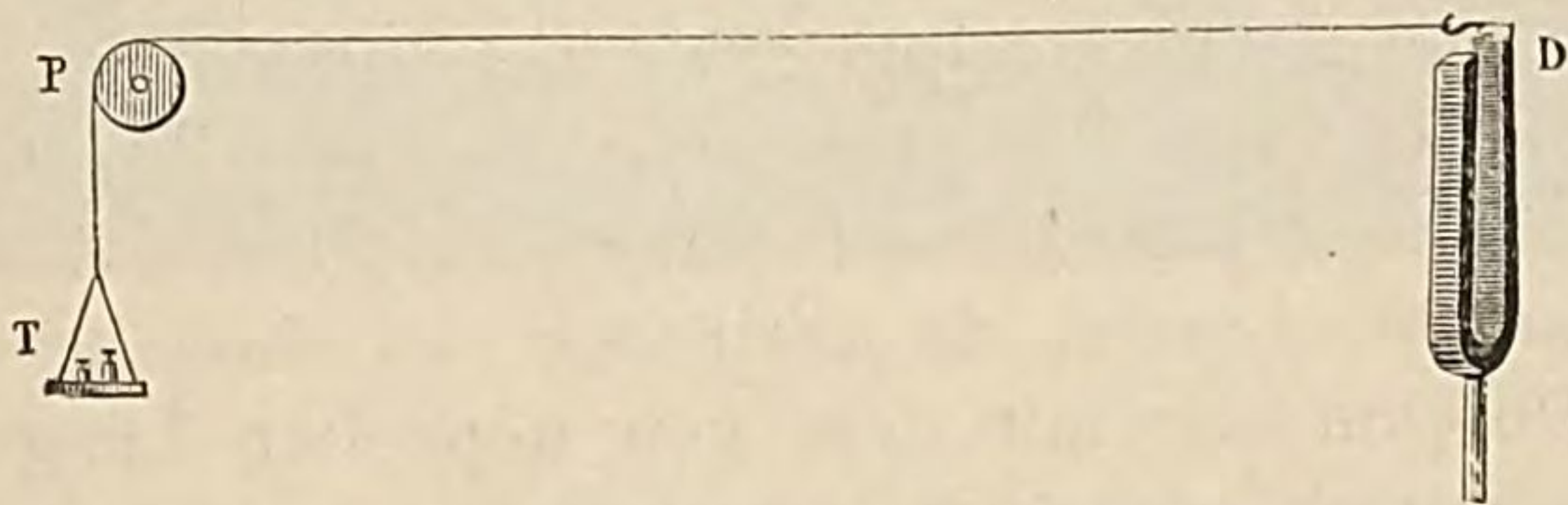


Fig. 92.

daher die Saite zuerst die tiefere Octave der Stimmgabel giebt (Fig. 90) und diese alsdann um 90 Grad um die verticale Achse gedreht wird, so sieht man, dass sich zwei durch einen Knoten getrennte Bäuche bilden.

²⁾ Tyndall machte den Versuch einem zahlreichen Zuhörerkreise dadurch sichtbar, dass er die seidene Schnur durch einen Platindraht

Da ausserdem in allen Fällen jede Abtheilung der Saite die tiefere Octave der Stimmgabel angiebt, so folgt, dass der Grundton z. B. für die Spannung $\frac{1}{9}$, bei der die Saite in drei Abtheilungen schwingt, $\frac{1}{3}$ oder die tiefere Duodecime des Tones beträgt, den die durch das Gewicht 1 gespannte Saite angiebt. Das Gesetz der Spannungen ist damit bewiesen.

Der Einfluss der Länge lässt sich leicht mit Hülfe zweier Stimmgabeln von verschiedener Tonhöhe veranschaulichen: die Längen derselben gleich gespannten Saite, die nach einander durch diese beiden Stimmgabeln erregt wird, müssen den Schwingungszahlen der Stimmgabeln umgekehrt proportional sein.

Soll der Einfluss bestimmt werden, den das Gewicht der Saite ausübt, so nimmt man einerseits eine Schnur von der Länge L , die bei der Spannung T unter dem Einfluss einer Stimmgabel a in

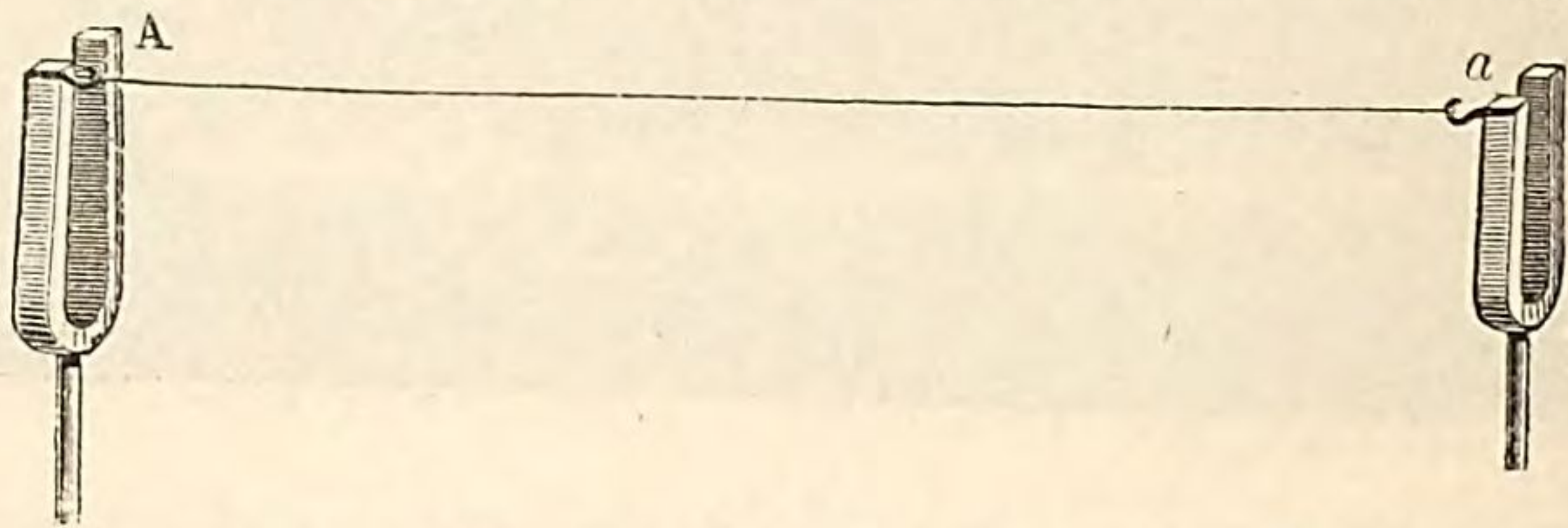


Fig. 93.

einer einzigen Abtheilung schwingt, andererseits vier gleiche Schnüre, die parallel neben einander gelegt eine einzige Schnur von der Länge L bilden. Hat diese wiederum die Spannung T und wird sie an einer Stimmgabel A (welche die tiefere Octave der früheren angiebt) befestigt, so schwingt sie ebenfalls als ein Stück; folglich geht der Grundton in die tiefere Octave über, wenn das Gewicht der Saite vervierfacht wird. Nach der Angabe von Tyndall kann auch die Saite auf ein Drittel ihrer Länge aus vier parallelen Fäden bestehen, während die übrigen zwei Drittel nur von einem Strang derselben Schnur gebildet werden; lässt man eine solche Saite alsdann in zwei Abtheilungen schwingen, so entsteht der Knoten genau an der Stelle, wo die beiden Theile von ungleicher Dicke an einander stossen, da das Stück von einfacher Länge und doppeltem Durchmesser mit dem von doppelter Länge und einfachem Durchmesser synchron schwingt.

ersetzte, der durch einen elektrischen Strom rothglühend wurde: es bleiben dabei die Wellenbäuche dunkel, da sie durch die schnelle Bewegung in der Luft abgekühlt werden, während die Knoten stark leuchten. Auf beiden Seiten von jedem Knoten nimmt die Helligkeit schnell ab.

Nimmt man endlich gleich lange und gleich dicke Saiten aus verschiedenem Material und befestigt sie an dieselbe Stimmgabel, so lässt sich leicht nachweisen, dass die spannenden Gewichte, die nöthig sind, damit die Saite die tiefere Octave der Stimmgabel angiebt, den specifischen Gewichten des benutzten Materials pro-

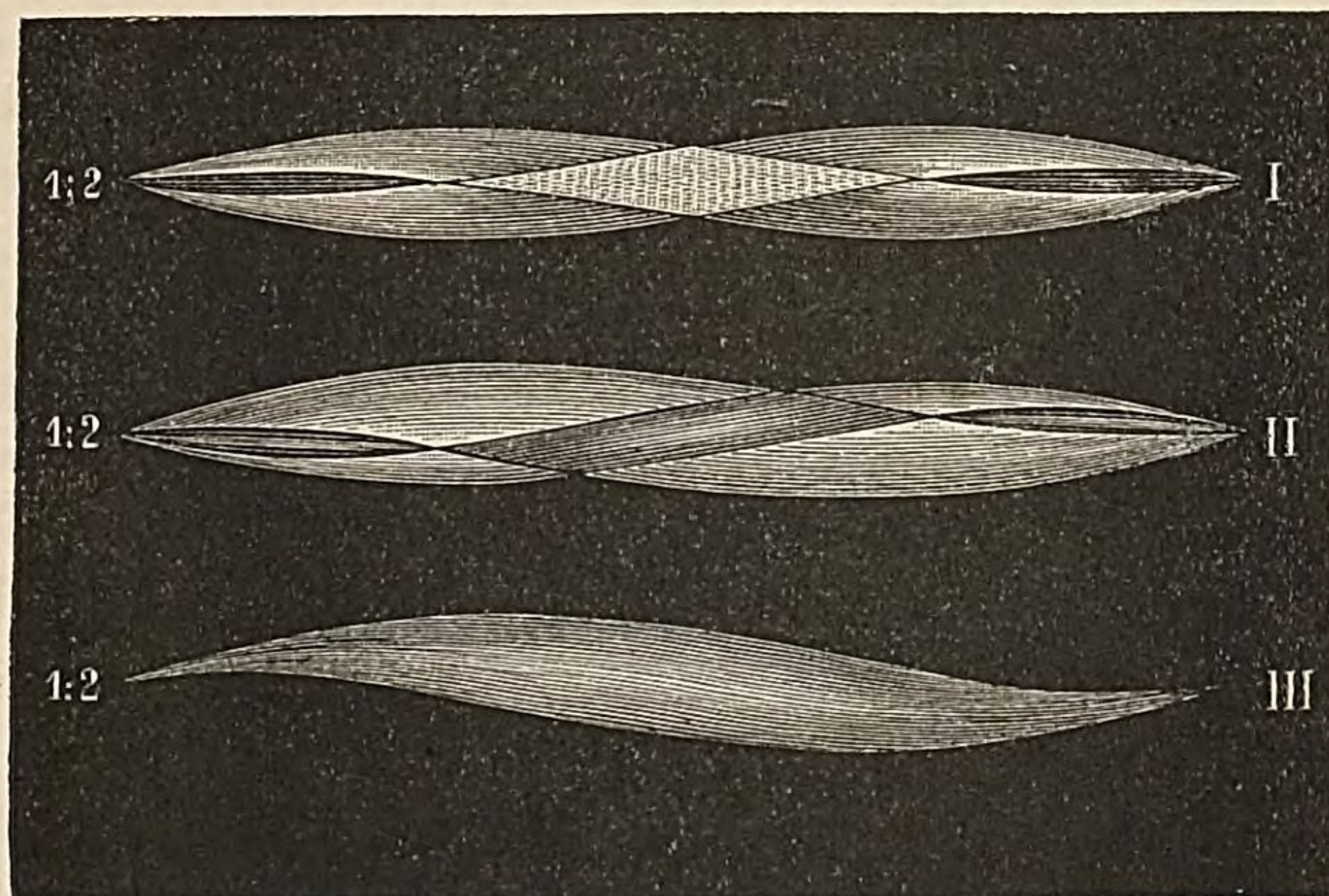


Fig. 94.

portional sind: man hat hierin ein Mittel an der Hand, um in aller Strenge die relativen specifischen Gewichte der Metalle zu bestimmen, die sich zu feinen und biegsamen Drähten ausziehen lassen.

Wenn man zwei Stimmgabeln, von denen die eine die Octave der anderen angiebt, auf dieselbe Saite wirken lässt, so erhält

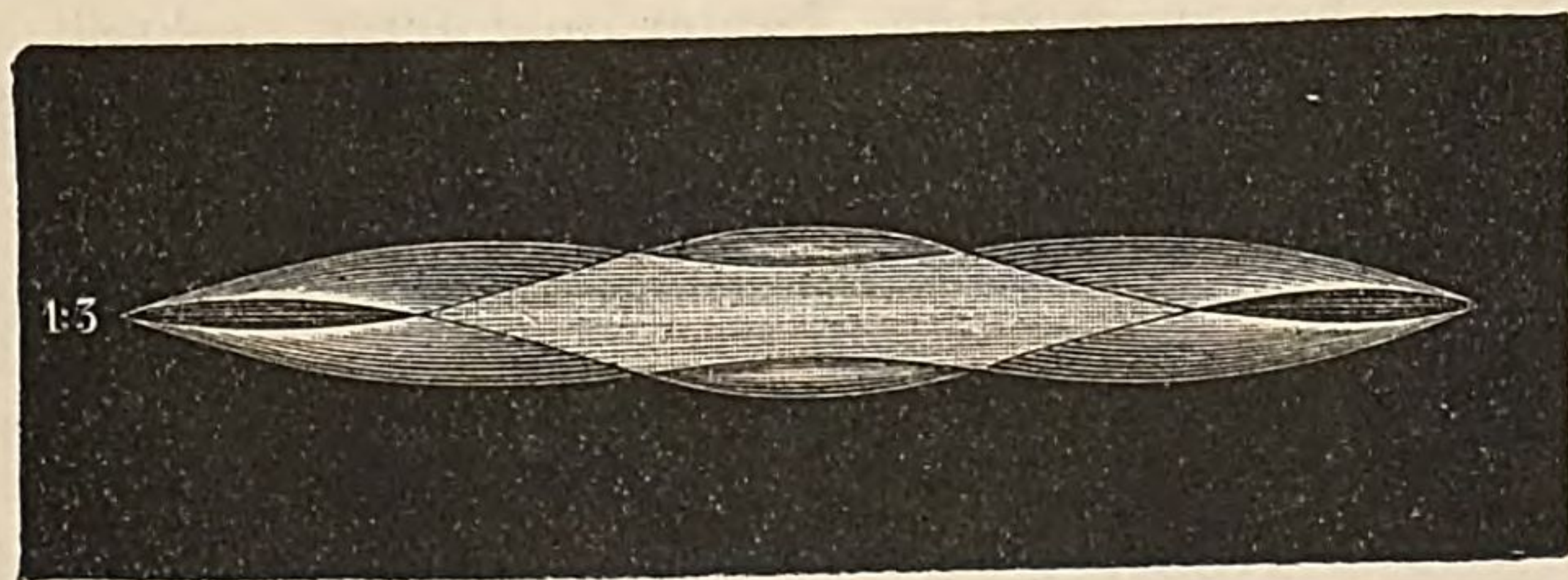


Fig. 95.

man eine Reihe von Formen, von denen die vorstehenden Figuren die hauptsächlichsten wiedergeben. Die beiden Wellenbewegungen lassen sich darin deutlich unterscheiden.

Fig. 95 stellt eine der Formen dar, die entstehen, wenn die Saite gleichzeitig durch zwei Stimmgabeln erregt wird, von denen die eine die Duodecime der anderen angiebt.

Da das Verfahren von Melde besonders dazu geeignet ist, die Schwingungen längere Zeit zu unterhalten, so lassen sich auf diese Weise leicht die auf einander folgenden Formen der Saite mittelst einer intermittirenden Beleuchtung studiren. Zu diesem Zweck lässt Neumann auf eine mit Metalledraht überspannene Saite starkes Licht aus einem ihr parallelen Spalt fallen. Vor dem Spalt befindet sich eine Glasplatte, auf der man mit Tusche einen schwarzen Strich gezogen hat. Die Platte ist an einer Stimmgabel so befestigt, dass der schwarze Strich in der Ruhelage das Licht verdeckt. Schwingt aber die Stimmgabel, so fällt das Licht im Allgemeinen auf die Saite und lässt sie als eine leuchtende Spindel erscheinen; auf dieser bewegt sich langsam eine dunkle Linie, die die auf einander folgenden Formen der Saite annimmt, wenn sie annähernd die Octave der Stimmgabel angiebt. Würde sie genau in der Octave schwingen, so würde die Linie unbeweglich sein.¹⁾

¹⁾ Eine sehr vollkommene Methode, die Bewegung schwingender Saiten zu studiren, ist die photographische Fixirung der Schwingungsfiguren, wie sie neuerdings von O. Krigar-Menzel und A. Raps angewendet ist (Wied. Ann. 44, 623—641; 1891). Über das Princip der Methode theilen die Verfasser folgendes mit: Man entwirft von einem stark leuchtenden verticalen Spalt in einem dunklen Zimmer durch ein Linsensystem ein reelles Bild, welches so im Raume liegt, dass es einen Punkt der horizontal ausgespannten Saite scharf beleuchtet. Hinter der Saite gehen die Strahlen von diesem Bilde aus weiter, wie von einem dort befindlichen wirklichen Spalte. Von diesem Bilde wird durch ein zweites Linsensystem ein zweites Bild entworfen, in welchem man die durch den Schatten der Saite gebildete scharfe Lücke erkennt, und dieses wird auf einer mit photographischem Papier umhüllten, schnell um eine verticale Achse rotirenden Walze aufgenommen; der leuchtende Spalt erzeugt dabei einen breiten geschwärzten Streifen, die Lücke aber eine scharfe weisse Linie darin, welche geradlinig und horizontal verläuft, so lange die Saite in Ruhe ist, welche dagegen bei Schwingungen der Saite durch ihre Hebungen und Senkungen ein treues Abbild des zeitlichen Verlaufs der Bewegung des vom Spalte getroffenen Saitenpunktes darstellt.

Eine grosse Bequemlichkeit dieser Methode besteht darin, dass weder die Saite genau abgestimmt, noch die durch ein Uhrwerk erzeugte schnelle Walzendrehung regulirt zu werden braucht. Man muss nur durch einen einfachen Momentverschluss dafür sorgen, dass das Papier nicht länger als während einer Umdrehung exponirt wird.

Mit diesen Mitteln wurden die Bewegungen gestrichener Saiten untersucht; die hier wiedergegebenen Abbildungen bieten einige Proben der dabei gefundenen Schwingungsfiguren und sind getreue Copien der Originalphotographien. Die von Helmholtz beobachtete Figur — das geradlinige Zickzack — tritt für alle Seitenpunkte nur auf, wenn man nahe dem Saitenende streicht. Die Projektionen der beiden Strecken

372. Theorie der schwingenden Saite. — *Gleichung der schwingenden Saite.* — Die Theorie der schwingenden Saite wurde

dieses Zickzacks verhalten sich dabei bekanntlich, wie die beiden Theile der Saite, welche durch den Beobachtungspunkt getrennt werden. Rückt man mit der Streichstelle mehr nach der Mitte zu, so treten sehr mannigfaltige Figuren auf; die Streichstelle selbst aber, oder ihr Symmetriepunkt, welche beide nothwendig gleiche Bewegungen haben müssen, zeigen in allen Fällen als mögliche und einfachste Schwingungsfigur das Zickzack, dessen Verhältniss nun aber verschieden ist von demjenigen der beiden Saitentheile.

Bei der Einfachheit der Gestalt liessen diese Schwingungsfiguren der Streichstelle Messungen zu, eine analytische Zerlegung durch

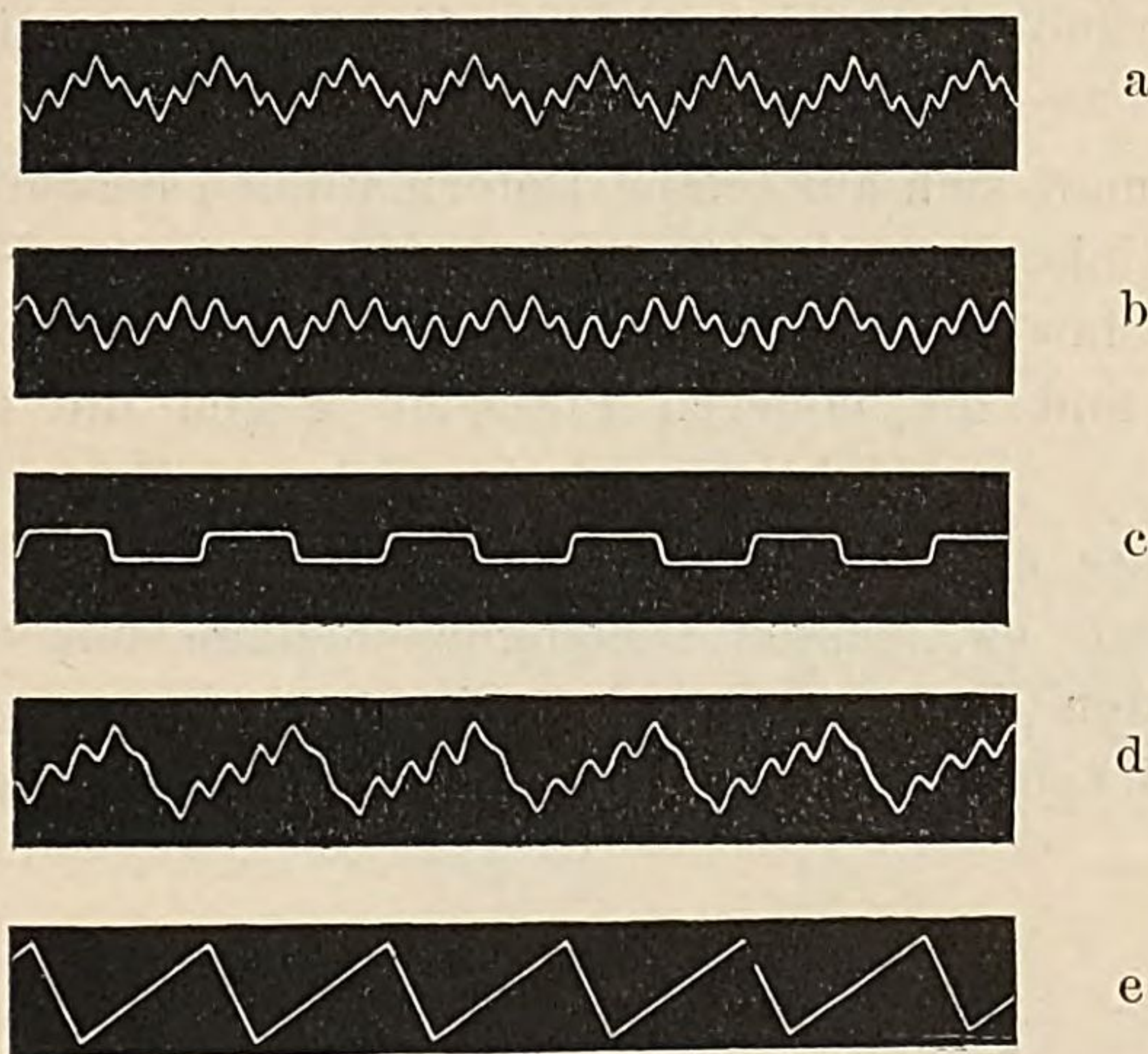


Fig. 95 a-e.

Fourier'sche Reihen ist auch möglich und aus der Kenntniss der Bewegung dieses einen Saitenpunktes folgt die Bewegung der ganzen Saite.

Bezeichnet l die Saitenlänge, x den Abstand eines Punktes vom Ende der Saite, y dessen Verschiebung, ξ den Abstand der Streichstelle vom Saitenende, t die Zeit, n die Schwingungszahl für 2π Secunden und ω das Verhältniss der Projection der kürzeren Zickzackstrecke zur Länge des ganzen Zickzacks, welches die Streichstelle ausführt, so ist die Bewegung der Saite dargestellt durch:

$$y = \text{const.} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha-1}}{\alpha^2} \frac{\sin \alpha \pi \omega}{\sin \alpha \pi \xi/l} \sin \alpha \pi x/l \cdot \sin \alpha n t.$$

Die Messungen ergaben, dass $\omega = \xi/l$ ist, nur so lange beide Brüche klein sind (etwa $< 1/10$), und genau in den wichtigsten Knotenpunkten: $\xi/l = 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$ etc. Sonst hat ω einen zwischen $1/10$ und $1/14$ schwankenden Werth.

Die Figuren 95 a-e stellen einige Beispiele dar, bei denen $\xi/l = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{15}$ ist. — H.

zuerst von Taylor in Angriff genommen und darauf von Jean und Daniel Bernouilli, d'Alembert, Euler und Lagrange fortgeführt. Sie beschäftigt auch heute noch viele Mathematiker.

Um die Theorie abzuleiten, setzt man eine vollkommen biegsame und unelastische Saite voraus. Es kommt dies praktisch auf folgende Bedingungen hinaus:

1. Die transversalen Dimensionen der Saite müssen so klein sein, dass man sie als einen einfachen und vollkommen biegsamen Faden ansehen kann.

2. Die Saite muss genügend gespannt sein und nur so schwache Deformationen erleiden, dass die aus diesen Deformationen resultierenden veränderlichen elastischen Kräfte gegen die permanente Spannung T zu vernachlässigen sind.

Wenn man sich auf solche Deformationen beschränkt, so kann man den Winkel, den ein beliebiges Element der Saite in jedem Augenblick mit seiner Anfangslage bildet, als unendlich klein betrachten und die höheren Potenzen gegen die erste vernachlässigen.

Es sei zu einer beliebigen Zeit der Bewegung $a'b'$ die Lage eines Elements ds , dessen Gleichgewichtslage mit ab zusammenfällt. An den Endpunkten des Elementes mögen zwei gleiche Kräfte T wirken, die aber einander nicht direct entgegengesetzt

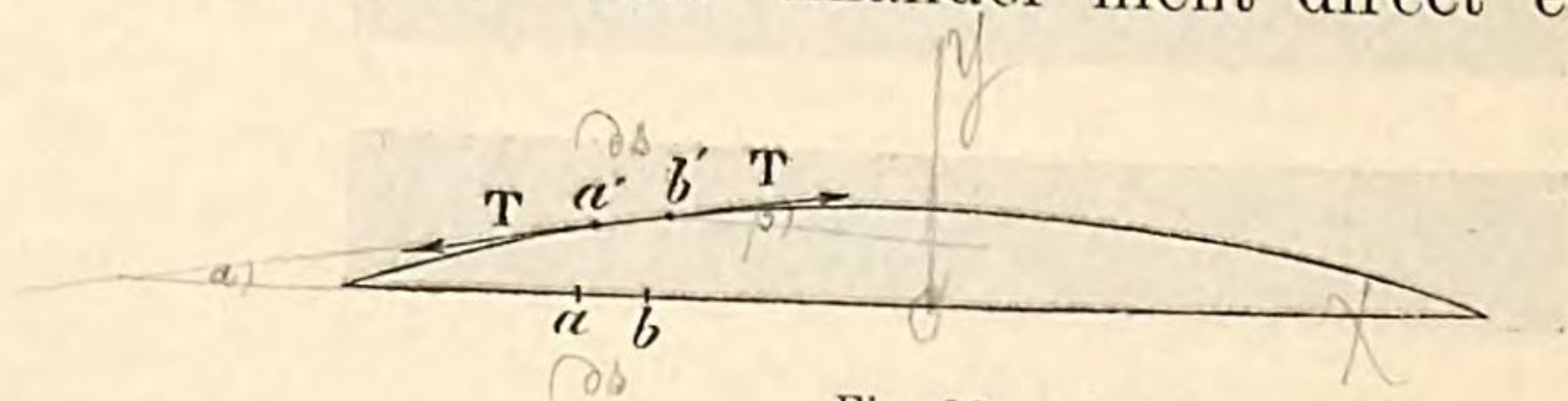


Fig. 96.

sein sollen, so dass kein Gleichgewicht besteht: es sei ferner α der Winkel, den die Tangente in a' mit der x -Achse, der Anfangslage AB der Saite, bildet und β der Winkel, den die Tangente in b' mit derselben Achse einschliesst. Alsdann wirkt auf das Element $a'b'$ in der Richtung oy , die auf ox senkrecht steht, die Kraft

$$F = T(\sin \beta - \sin \alpha) = T \cdot d \sin \alpha,$$

oder, da wir α als unendlich klein voraussetzen und folglich den Sinus mit der Tangente vertauschen können,

$$F = T \, dtga = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Die Bewegungsgleichung für die Richtung der y wird also, wenn μ die Masse bezeichnet, die der Längeneinheit der Saite entspricht,

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} ds = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

oder, da sich nach unseren Voraussetzungen ds nicht von dx unterscheidet,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

oder endlich, wenn man $\frac{T}{\mu} = V^2$ setzt,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Es ist dies die bekannte Gleichung der schwingenden Saite, die, wie wir schon gesehen haben, auch für die Fortpflanzung einer longitudinalen Erschütterung in einem elastischen Cylinder gilt (344).

A. *Integration durch willkürliche Functionen.* — Bekanntlich kann das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung durch die Summe zweier beliebiger Functionen

$$y = f(x + Vt) + F(x - Vt),$$

dargestellt werden. Es wird damit die Superposition zweier Deformationen angedeutet, die sich im entgegengesetzten Sinne mit derselben Geschwindigkeit V fortpflanzen.

Diese Lösung gilt unmittelbar für den Fall einer unendlich langen Saite; man kann sie aber auch auf das Problem der begrenzten Saite mittelst des Kunstgriffs ausdehnen, dessen wir uns schon früher bei der begrenzten Pfeife bedient haben.

Setzen wir nämlich zuerst voraus, dass die Saite nur an dem einen Ende im Ursprung des Koordinatensystemes begrenzt ist und sich in der Richtung der positiven x -Achse ins Unendliche ausdehnt, so kann man die Saite als einen Theil einer solchen auffassen, die sich nach beiden Richtungen ins Unendliche erstreckt. Die Anfangsverschiebungen und Anfangsgeschwindigkeiten des negativen Theiles müssen alsdann nur so beschaffen sein, dass, wenn man die Saite sich selbst überliesse, der Ursprung immer in Ruhe bliebe. Mit anderen Worten, die positive Welle des nega-

tiven Stückes dürfte den Nullpunkt nicht bewegen, wenn sie sich über die negative Welle des positiven Stückes superponirte; oder auch, die positive Welle, die vom Ursprung ausgeht, muss genau mit derjenigen zusammenfallen, die durch die Reflexion der wirklichen Welle an dem festen Endpunkt erzeugt wird.

Von hier aus gelangt man leicht zu dem Fall der Saite, die an ihren beiden Endpunkten befestigt ist: die Anfangsbewegung theilt sich nämlich von selbst in positive und negative Wellen, die an den Enden reflectirt werden, dabei ihr Zeichen wechseln und ihren ursprünglichen Zustand nach einer beliebigen geraden Anzahl von Reflexionen wieder annehmen, so dass die Periode der Bewegung gleich der Zeit $\tau = \frac{2L}{V}$ (oder einem aliquoten Theil derselben) ist, in der die Länge der Saite zweimal durchlaufen wird.

Die an beiden Endpunkten befestigte Saite. — Da der Fall der an ihren beiden Enden befestigten Saite für die Praxis am wichtigsten ist, wollen wir die Methode näher beschreiben, mittelst deren man ihn auf den allgemeinen Fall zurückführt; wir gehen dabei von der Voraussetzung aus, dass sich die Saite nach beiden Richtungen ins Unendliche erstreckt und verfügen über die Anfangsbedingungen in der Weise, dass die Endpunkte des betrachteten Stückes stets in Ruhe bleiben.

a. Anfangsverrückung $y = 2f(x)$,

Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, wo die Saite aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht ist und darauf ohne Anfangsgeschwindigkeit sich selbst überlassen wird. Da die Verrückung sich in gleicher Weise auf zwei Wellen vertheilt, so sei $y = 2f(x)$, wo x zwischen den Grenzen 0 und L liegt, die Gleichung der Curve, die die deformirte Saite bildet. Wir wollen die Curve $y = f(x)$ für die Werthe von x zwischen 0 und L zeichnen. Es möge acb (Fig. 98) diese Curve sein; wir ziehen alsdann die Curve $bc'b'$, die zu acb in Bezug auf den Punkt b symmetrisch liegt, darauf die in Bezug auf b' zu $bc'b'$ symmetrische Curve u. s. w.; in derselben Weise verfahren wir auf der linken Seite. Die Bewegung der gegebenen Saite ist dieselbe wie die des Stückes ab einer unendlich langen Saite, deren Anfangszustand von allen soeben gezeichneten Curven

gebildet wird; die Deformation pflanzt sich nach beiden Richtungen mit der Geschwindigkeit V fort, d. h. sie wird zu jeder beliebigen Zeit durch die Gleichung

$$y = f(x + Vt) + f(x - Vt)$$

dargestellt. In der That ist zur Zeit $t=0$ für die ganze Curve $y=2f(x)$, $\frac{\partial y}{\partial t}=0$, und für die Punkte $x=0$ und $x=L$ ist stets $y=0$.

Die Bewegung eines beliebigen Punktes ist periodisch, da

$$f(x \pm 2L) = f(x),$$

und folglich

$$f\left(x \pm V\left(t \pm \frac{2L}{V}\right)\right) = f(x \pm Vt),$$

d. h. nach der Zeit $\tau = \frac{2L}{V}$ nimmt die Curve wieder dieselbe Form an.

Wird z. B. eine Saite gezupft oder besser durch eine feine Spitze (wie das Plectrum der Leierspieler) aus der Gleichgewichts-

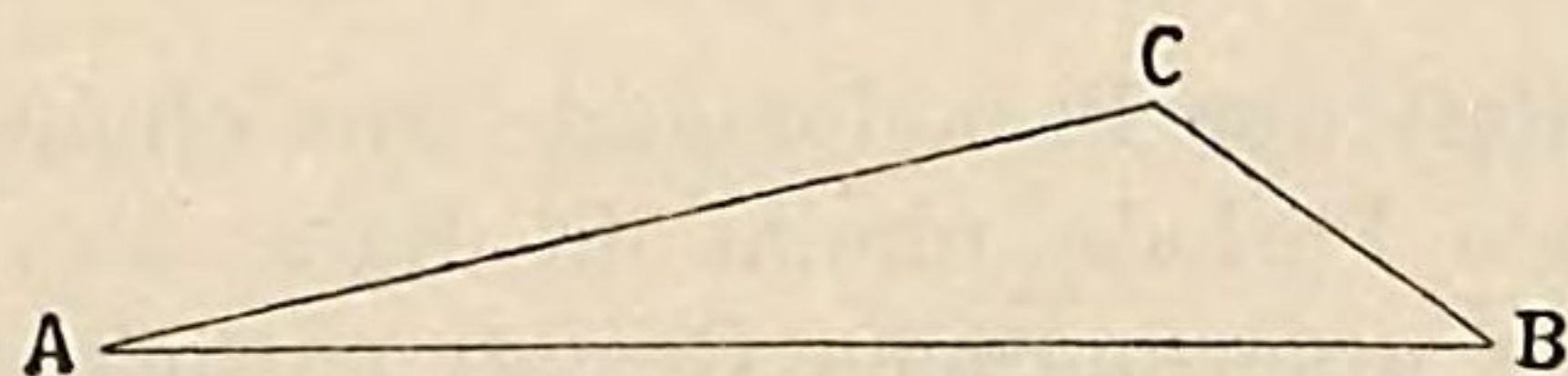


Fig. 97.

lage entfernt, so möge sie zur Zeit $t=0$ die Form ACB annehmen, die aus zwei geradlinigen Stücken besteht. Reduciren wir den

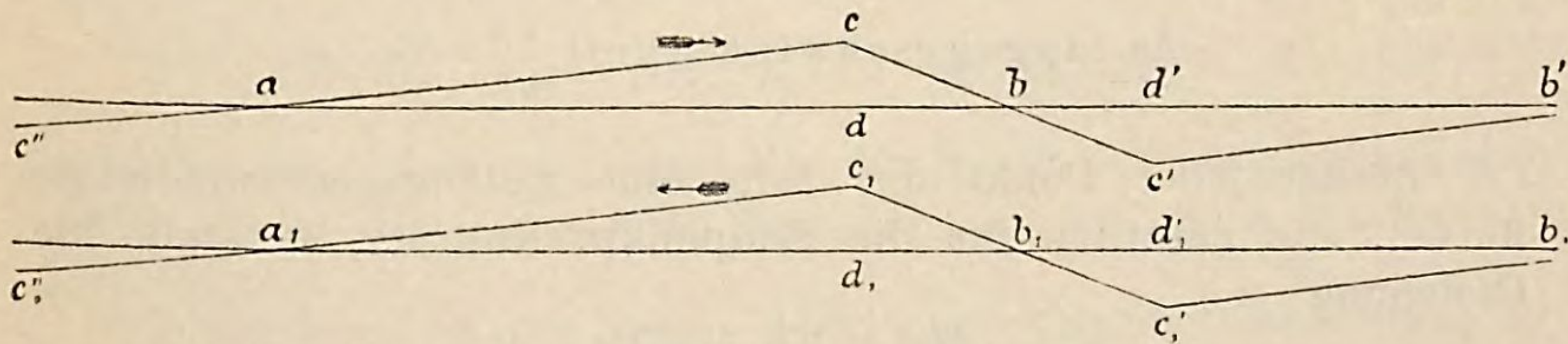


Fig. 98.

Maassstab der Ordinaten auf die Hälfte, so erhalten wir die in Fig. 98 dargestellten Curven, von denen die obere die positiven, die untere die negativen Wellen im Anfangszustande wiedergiebt.

Man braucht nur beide Curven zu vereinigen, nachdem man sie im verschiedenen Sinne, und zwar jede um Vt verschoben hat, um die Form der Saite für die Zeit t zu erhalten. Auf diese Weise sind die Curven der Fig. 99 entstanden; sie entsprechen Zeitpunkten,

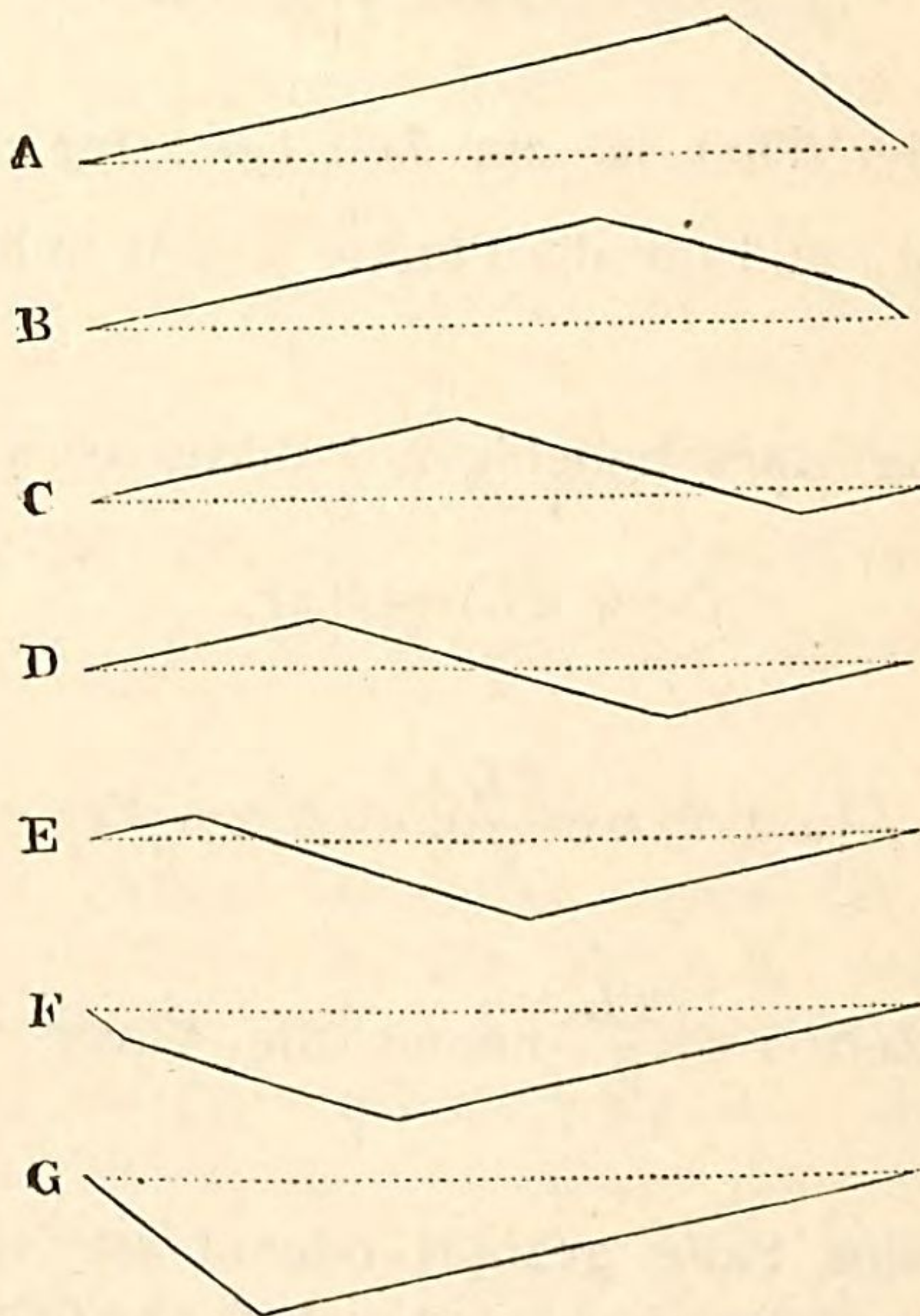


Fig. 99.

die um ein Zwölftel der Periodenlänge aus einander liegen. Am Ende einer halben Periode nimmt die Saite die Form G an und kehrt dann in die ursprüngliche Gestalt zurück, indem sie dabei dieselben nur aus geradlinigen Stücken zusammengesetzten Curven rückwärts durchläuft.

b. Anfangsverrückung $y = 0$,

Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t} = 2\varphi'(x)$.

Besitzt jeder Punkt der Saite eine Anfangsgeschwindigkeit $2\varphi'(x)$, die natürlich für die Endpunkte Null ist, so stellt die Gleichung

$$y' = \varphi'(x + Vt) + \varphi'(x - Vt)$$

die Geschwindigkeiten, und

$$y = \frac{1}{V} \left[\varphi(x + Vt) - \varphi(x - Vt) \right]$$

die Verrückungen für eine beliebige Zeit dar; die beiden Functionen y' und y sind ferner periodisch und besitzen ebenfalls die Periode $\tau = \frac{2L}{V}$.

c. Anfangsverrückung $y = 2f(x)$,

Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial y}{\partial t} = 2\varphi'(x)$.

Sind endlich für die verschiedenen Punkte der Saite Anfangsverrückung und Anfangsgeschwindigkeit gegeben, so kann man immer durch Vereinigung der beiden vorhergehenden Lösungen den Zustand der Saite für jeden ihrer Punkte und für jede beliebige Zeit bestimmen.

Die Aufgabe darf also als vollständig gelöst betrachtet werden.

Formel von Taylor. — In allen Fällen hat der Grundton die Periode $\tau = \frac{2L}{V}$ und die Höhe (Schwingungszahl)

$$N = \frac{V}{2L}.$$

Nun hatten wir aber $V^2 = \frac{T}{\mu}$ gesetzt, wo T das spannende Gewicht und μ die Masse der Längeneinheit bedeutete. Da $\mu = \frac{P}{gL}$, wenn P das Gewicht der ganzen Saite bezeichnet, so ist

$$N = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gT}{PL}};$$

es ist dies die Taylor'sche Formel.

Mit Hülfe der Dimensionsgleichungen (72) der verschiedenen Grössen, die in diese Formel eingehen,

$$T = [MLt^{-2}], \quad g = [Lt^{-2}], \quad P = [MLt^{-2}], \quad L = [L];$$

lässt sich leicht beweisen, dass $N = [t^{-1}]$, die Formel also homogen ist.¹⁾ Wenn wir *a priori* für bewiesen ansehen, dass die Periode

¹⁾ Einfacher ist der Beweis noch durch folgende Betrachtung zu führen. Da T und P Kräfte sind, folglich das Verhältniss $\frac{P}{T}$ eine abstracte Zahl ist, und $\frac{L}{g}$ das Quadrat einer Zeit (die Hälfte des Quadrats der Zeit, die ein Körper braucht, um aus der Höhe L herabzufallen), so stellt die Formel das Reciproke der Zeit dar.

nur von L , T und μ abhängt, so liefert uns die Bedingung der Homogenität die Taylor'sche Formel, abgesehen von dem numerischen Factor, der unbestimmt bleibt. Denn die Dimensionsgleichung für μ ist

$$\mu = [ML^{-1}],$$

und die einzige Verbindung dieser Grössen, die eine Zeit darstellt, ist $T^{-\frac{1}{2}} \mu^{\frac{1}{2}} L$.

B. *Integration durch trigonometrische Reihen.* — Wenn auch die Methode von Lagrange die Aufgabe vom Standpunkt der Mechanik aus vollständig löst, so muss der Physiker doch noch wissen, wie der Ton beschaffen ist, der durch die Bewegung der Saite hervorgebracht wird. Die Antwort auf diese Frage giebt eine zweite Methode für die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

D. Bernoulli¹⁾ hat nämlich gezeigt, dass das allgemeine Integral in der Form einer trigonometrischen Reihe dargestellt werden kann.

Nach dem Vorgang von Taylor suchen wir zuerst eine particuläre Lösung. Zu diesem Zweck lassen wir uns von der Beobachtung leiten und untersuchen, ob die Aufgabe durch eine Wellenbewegung

$$y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right)$$

gelöst werden kann, deren Amplitude a mit dem Punkte x veränderlich ist.

Damit dieser Werth von y genügt, muss

$$-\frac{a}{V^2} \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^2 = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

sein oder, da $V\tau = \lambda$,

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = - \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 a;$$

hieraus folgt durch Integration

$$a = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + B \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}.$$

¹⁾ D. Bernoulli, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1753.

Die angenommene Bewegung ist also möglich, wenn die Amplitude jedes Punktes dieser Gleichung genügt. Da aber die beiden Enden der Saite fest sind, so muss y und folglich auch a für $x=0$ und $x=L$ Null sein; daraus folgt $B=0$, $\sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = 0$ oder $\lambda = \frac{2L}{k}$, $\tau = \frac{1}{k} \frac{2L}{V}$, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Die Saite kann also jede Schwingung ausführen, deren Periode gleich einem aliquoten Theil von $\frac{2L}{V}$ (oder gleich dieser Grösse selbst) ist, aber keine andere, da die Bewegung vom Index k durch

$$y = A_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \left(\frac{k\pi Vt}{L} - \varepsilon_k \right)$$

ausgedrückt wird, wo

$$2\pi\varphi_k = \varepsilon_k.$$

Dem Werthe $k=1$ entspricht der Grundton; folglich ist seine Höhe, wie wir schon früher gefunden haben,

$$N = \frac{V}{2L}.$$

Einem beliebigen Werthe von k entspricht ein harmonischer Oberton des Grundtones.

Für diesen Oberton ist y stets Null in den Punkten

$$0, \quad \frac{L}{k}, \quad \frac{2L}{k}, \quad \frac{3L}{k}, \quad . \quad . \quad . \quad \frac{(k-1)L}{k}, \quad L;$$

die alle Knotenpunkte sind. Ausserdem hat die Curve zu jeder Zeit die Form einer Sinuslinie.

Nach dem Princip von der Superposition kleiner Bewegungen kann die Saite aber gleichzeitig alle Schwingungen ausführen.

In der Sprache der Analysis heisst dies: für eine lineare Differentialgleichung, wie sie für die schwingende Saite gilt, ist die Summe einer beliebigen Anzahl particulärer Lösungen auch eine Lösung. Bildet man also die Summe aus einer unendlich grossen Zahl solcher Lösungen wie

$$y = A_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \left(\frac{k\pi Vt}{L} - \varepsilon_k \right),$$

so erhält man die allgemeine Lösung

$$y = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \left(\frac{k\pi Vt}{L} - \varepsilon_k \right);$$

das Summenzeichen zeigt hier die Summation der unendlich grossen Zahl aller Glieder an, die entstehen, wenn man in dem Ausdruck unter dem Summenzeichen k nach einander alle ganzzahligen Werthe von 0 bis ∞ beilegt.

Physikalisch bedeutet dies, dass man sich jede schwingende Bewegung einer Saite durch die Superposition von Schwingungen entstanden denken kann, deren Perioden aliquote Theile von $\frac{2L}{V}$ bilden und deren Amplituden und Phasen¹⁾ durch die Anfangsbedingungen passend bestimmt sind.²⁾

a. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind Null.

Wir wollen zuerst voraussetzen, dass die Saite Anfangs verschoben wird, ohne eine Anfangsgeschwindigkeit zu empfangen. Alsdann ist $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$ für $t = 0$, folglich sind alle ε_k Null, und der allgemeine Ausdruck reducirt sich auf

$$y = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi Vt}{L}.$$

Die Bedingung, dass die Saite zur Zeit $t = 0$ die Form

$$y = f(x)$$

annimmt, lässt sich also folgendermaassen ausdrücken:

$$f(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{L} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{L} + \dots + A_k \sin \frac{k\pi x}{L} + \dots$$

¹⁾ Bei jeder Bewegung ist die Amplitude mit der Abscisse des betrachteten Punktes der Saite veränderlich, die Phase ist in allen Punkten dieselbe.

²⁾ Der Satz ist für jedes schwingende System richtig, wie wir später sehen werden (Satz von Fourier).

Um einen der Coefficienten A_k zu bestimmen, braucht man nur die beiden Seiten dieser Gleichung mit $\sin \frac{k\pi x}{L} dx$ zu multipliciren und längs der ganzen Länge der Saite zu integriren. Alle Terme auf der rechten Seite des Integrals werden dann Null mit Ausnahme desjenigen, der den Coefficienten A_k enthält; für diesen ergibt sich der Werth $\frac{L}{2}$.¹⁾ Man bekommt also

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx.$$

Gezupfte Saite. — Als Beispiel wollen wir eine Saite betrachten, die in ihrer Mitte gezupft wird, so dass sie Anfangs die beiden Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks von der Höhe h und der Grundlinie L bildet.²⁾ Wir multipliciren die Ordinaten des Dreiecks mit denen der Sinuslinie von der Ordnung k und erhalten die Ordinaten der Curve

$$y = f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Bei geradem k ist, da die Sinuslinie eine gerade Zahl von Bäumen hat, der Flächeninhalt der Curve zwischen 0 und $\frac{1}{2}L$ gleich gross und vom entgegengesetzten Zeichen, wie der zwischen 0 und $-\frac{1}{2}L$; folglich ist der gesammte Flächeninhalt Null, es verschwinden also alle Coefficienten A_k von gerader Ordnung.

¹⁾ Man hat nämlich für einen beliebigen Term von der Ordnung k'

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin \frac{k'\pi x}{L} \sin \frac{k\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos \frac{(k-k')\pi x}{L} - \cos \frac{(k+k')\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{(k-k')\pi} \sin \frac{(k-k')\pi x}{L} - \frac{L}{(k+k')\pi} \sin \frac{(k+k')\pi x}{L} \right]_0^L; \end{aligned}$$

die Grösse ist identisch gleich Null, wenn k' von k verschieden ist. Für den Term von der Ordnung k erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2 \frac{k\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(1 - \cos \frac{2k\pi x}{L} \right) dx \\ &= \frac{L}{2} - \left(\frac{L}{k\pi} \sin \frac{2k\pi x}{L} \right)_0^L = \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

²⁾ Vgl. Mathieu, Cours de Physique mathématique, S. 19.

Wenn k ungerade ist, so addieren sich die beiden Flächeninhalte, und der gesammte Flächeninhalt ist gleich ihrer Summe, so dass für die ungeraden k

$$A_k = \frac{4}{L} \int_0^{\frac{1}{2}L} f(x) \sin \frac{k\pi x}{L},$$

oder, wenn man $f(x)$ durch seinen analytischen Ausdruck zwischen 0 und $\frac{1}{2}L$, nämlich durch $\frac{2h}{L}x$ ersetzt,

$$A_k = \frac{8h}{L^2} \int_0^{\frac{1}{2}L} x \sin \frac{k\pi x}{L} dx,$$

hieraus erhält man durch Integration

$$A_k = \frac{8h}{L^2} \left[-\frac{L}{k\pi} x \cos \frac{k\pi x}{L} + \left(\frac{L}{k\pi} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{L} \right]_{\frac{1}{2}L}^0$$

oder

$$A_k = \frac{8h}{k^2 \pi^2} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Die Bewegung der Saite wird also dargestellt durch die Formel

$$y = \frac{8h}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi Vt}{L} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi Vt}{L} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi x}{L} \cos \frac{5\pi Vt}{L} \dots \right].$$

Diese Reihe convergirt sehr schnell. Es herrscht also der Grundton vor, die geraden Obertöne verschwinden vollständig nach dem Young'schen Gesetz, und die ungeraden nehmen an Stärke schnell ab.

Ebenso leicht lässt sich der Fall behandeln, wo die Saite in einem beliebigen Punkte l gezupft wird.¹⁾ Man findet alsdann, wenn h jedesmal die Höhe bezeichnet, auf die dieser Punkt gehoben wird,

$$A_k = \frac{2hL^2}{k^2 \pi^2 l (L-l)} \sin \frac{k\pi l}{L}.$$

¹⁾ v. Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen, 4. Aufl., S. 603.

Der Coefficient von der Ordnung k wird Null, wenn $\sin \frac{k\pi l}{L} = 0$ oder wenn l gleich $\frac{L}{k}, \frac{2L}{k}, \frac{3L}{k}, \dots$ ist, d. h. wenn die Saite in einem Knoten des k ten Obertons gegriffen wird.

- b. Die Anfangsverrückungen sind Null und
c. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind von Null verschieden.

Wenn die Anfangsgeschwindigkeiten nicht Null sind, so muss man für jeden Term den vollständigen Ausdruck

$$y = A_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \left(\frac{k\pi Vt}{L} + \epsilon_k \right)$$

nehmen, oder den äquivalenten Ausdruck

$$y = A_k \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{k\pi Vt}{L} + B_k \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{k\pi Vt}{L};$$

bezeichnet $\varphi'(x)$ die Geschwindigkeit jedes Punktes zur Zeit $t=0$, so hat man

$$\varphi'(x) = -\frac{\pi V}{L} \sum_{k=0}^{\infty} k B_k \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Hieraus folgt nach demselben Verfahren wie vorhin

$$B_k = -\frac{2}{k\pi V} \int_0^L \varphi'(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx.$$

Angeschlagene Saite. — Schlägt man eine Saite durch einen harten und scharfen Hammer stark an und hebt diesen dann so schnell empor, dass der berührte Punkt (dessen Abscisse wir immer mit l bezeichnen) Anfangs allein eine gewisse Geschwindigkeit besitzt, ohne gleichzeitig eine merkliche Verrückung erlitten zu haben, so sind die Coefficienten A alle Null; man hat alsdann

$$y = \frac{2c}{\pi V} \left[\sin \frac{\pi l}{L} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi Vt}{L} + \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi l}{L} \sin \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{2\pi Vt}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi l}{L} \sin \frac{3\pi x}{L} \sin \frac{3\pi Vt}{L} + \dots \right],$$

wo c das Product der Anfangsgeschwindigkeit und der Länge des unendlich kleinen erschütterten Stückes bedeutet, so dass der allgemeine Ausdruck für B_k übergeht in

$$B_k = \frac{2c}{k\pi V} \sin \frac{k\pi l}{L}.$$

Es verschwindet noch der Coefficient von der k ten Ordnung, wenn der angeschlagene Punkt in einem der Knoten des k ten Obertons liegt. Ausserdem haben die Obertöne verhältnismässig eine grössere Stärke als bei der gezupften Saite, da der Nenner von B_k nur k enthält, während in dem von A_k die Grösse k^2 auftrat. Da bei dem Clavier die Weichheit und Elasticität des Hammers die Dauer des Anschlags verlängert, so ändert sich die Stärke der Obertöne nach einem verwickelteren Gesetze; nach Helmholtz tritt alsdann die Grösse k^3 auf.

Die durch den Bogen angestrichene Saite. — Wenn der Bogen gut geführt wird, so betragen die Obertöne der Geige $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{16}$ des Grundtons: das Verhältniss der Stärke der Obertöne ist also dasselbe wie bei der in ihrer Mitte gezupften Saite, abgesehen davon, dass bei dieser nur die geraden Obertöne auftreten. Was die

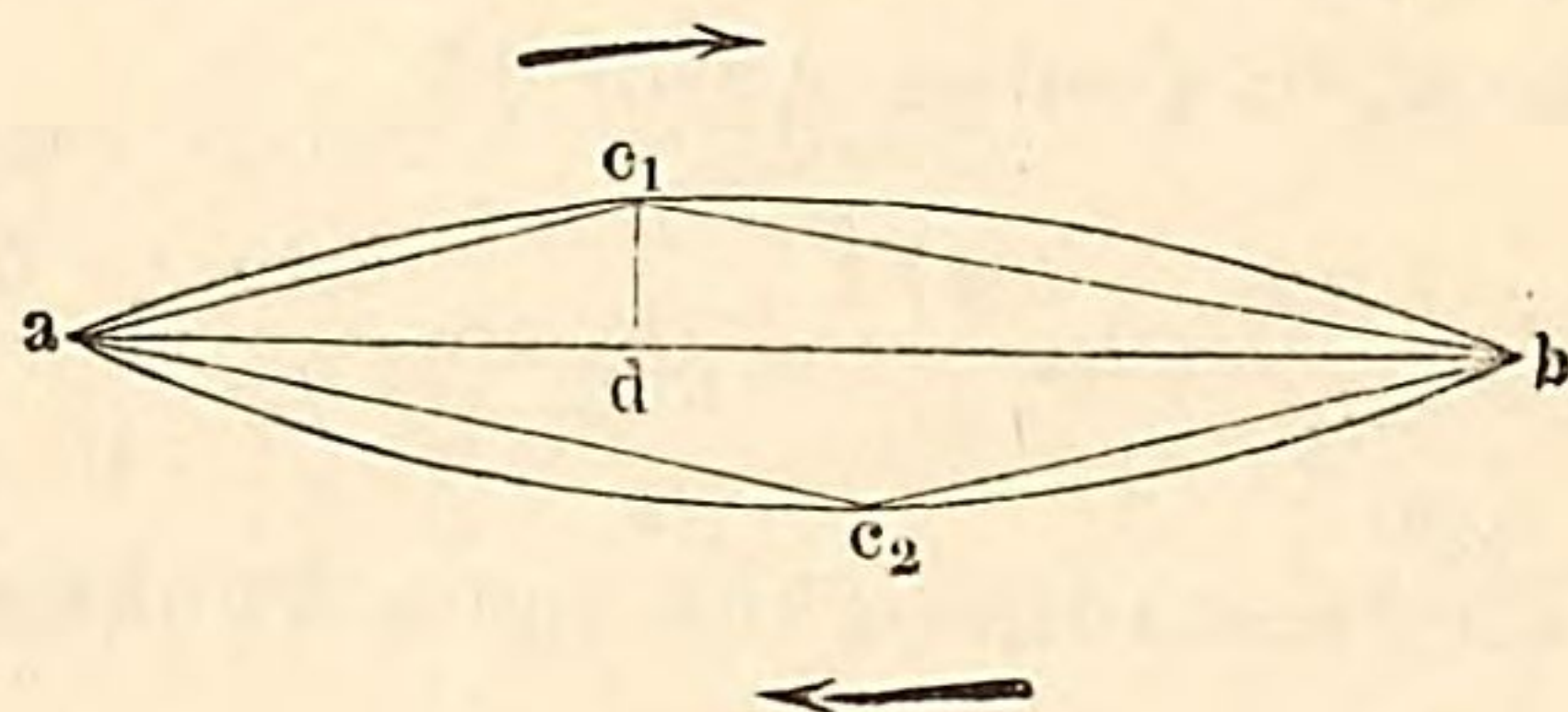


Fig. 100.

Bewegung der Saite anbetrifft, „so besteht sie, kurz gesagt, darin, dass sich der Fusspunkt d der Abscisse des Gipfels auf der Linie ab mit constanter Geschwindigkeit hin und her bewegt, während der Gipfel nach einander die beiden parabolischen Bögen ac_1b und bc_2a durchläuft, wenn die Saite längs der Geraden ac_1 und bc_1 (oder ac_2 und bc_2) gespannt ist.“

Melde'scher Versuch. — Bei dem Melde'schen Versuch muss die Saite, die einerseits an einen festen Punkt, andererseits an eine schwingende Stimmgabel befestigt ist, in Bezug auf ihre Endpunkte folgende Bedingungen erfüllen:

$$\text{für } x=0, \quad y=0,$$

$$\text{für } x=L, \quad y=a \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Geräth die Saite also in Schwingungen, die denen der Stimmgabel synchron sind, so hat man, da immer die Amplitude

$$a = A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} + B \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} \text{ ist,}$$

$$B=0,$$

$$A \sin 2\pi \frac{L}{\lambda} = a, \quad \text{wo } \lambda = V\tau;$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$y = a \frac{\sin 2\pi \frac{x}{\lambda}}{\sin 2\pi \frac{L}{\lambda}} \cos 2\pi \frac{t}{\tau}.$$

Die Punkte $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{2}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, ... sind also Knoten.

Wenn L gerade ein Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ ist oder, anders ausgedrückt, wenn eine der Perioden der Saite mit derjenigen der Stimmgabel zusammenfällt, so wird der Nenner Null. Die Amplitude ist alsdann freilich nicht unendlich gross, sie ist aber ein Maximum: denn da die Energie, die nöthig ist, um die Saite in Schwingungen zu versetzen, von der Stimmgabel herrührt, so hört die Amplitude auf zu wachsen, wenn die verlorene Energie (Dämpfung der Bewegung in der Luft und an den festen Enden der Saite, Erzeugung von Wärme in Folge der Reibung) der zugeführten gleich wird; hierdurch würde übrigens die Stimmgabel bald zum Stillstand gebracht, wenn ihre Bewegung nicht auf elektrischem Wege unterhalten würde.

373. Steifigkeit der Saiten. — Die theoretischen Gesetze für die schwingende Saite lassen sich leicht mit langen, biegsamen und stark gespannten Saiten beweisen; sind die Saiten aber kurz, dick und nur wenig gespannt, so ist die Schwingungszahl in der Wirklichkeit stets grösser als die Theorie es verlangt, und zwar um so grösser, je steifer die Saite ist.

Die Steifigkeit wirkt nämlich gerade so wie eine gewisse constante Spannung T_0 , die zu dem spannenden Gewicht hinzukommt, so dass die wirkliche Schwingungszahl N durch die Formel

$$N^2 = \frac{g}{2Lp} (T + T_0)$$

oder

$$N^2 = n^2 + n_0^2$$

gegeben ist, wo n die theoretische Schwingungszahl bedeutet, die sich auf eine vollkommen biegsame Saite bezieht, wenn sie von dem angehängten Gewicht gespannt wird, und n_0 die Schwingungszahl, die dieselbe Saite besitzt, wenn sie durch ein Gewicht gespannt ist, das dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die Steifigkeit der natürlichen Saite.

Diese Formel ist empirisch von N. Savart mit Hülfe des verticalen Monochords (369) abgeleitet worden. Theoretisch hat

sie Duhamel bewiesen. Jedoch lässt sich die Steifigkeit nicht vollkommen durch eine constante Spannung ersetzen, und die Formel darf deshalb nur als eine angenäherte Lösung angesehen werden.

A. Seebeck zieht den Ausdruck

$$N = n \left(1 + \frac{R^2}{L} \sqrt{\frac{\pi E}{Tg}} \right)$$

vor, worin der Elasticitäts-Coefficient E der Substanz der Saite vorkommt.

Die Correction ist um so grösser, je dicker, kürzer und elastischer die Saite ist.

Siebentes Capitel.

Schwingende Stäbe.

374. Unterschied zwischen Stäben und Saiten. — Im akustischen Sinne bezeichnet man starre Körper als Stäbe im Gegensatz zu den Saiten, die man als vollkommen biegsam betrachtet. Die absolute Starrheit tritt in der Natur eben so wenig auf wie die vollkommene Biegsamkeit; trotzdem muss man diese beiden extremen Fälle wegen ihres theoretischen Interesses und ihrer praktischen Bedeutung besonders untersuchen.

Die Stäbe können in longitudinale, transversale und drehende Schwingungen gerathen. Die letzten sind von Chladni so genannt worden, weil sie dann auftreten, wenn der Stab um seine Achse tordirt wird.

I. Longitudinale Schwingungen.

375. Longitudinale Schwingungen der Stäbe. — *Gesetze.* Da sich in einer elastischen Säule eine zur Achse parallele Erschütterung unabhängig von der Substanz der Säule fortpflanzt, so gehorchen die Stäbe, wenn sie in longitudinale Schwingungen gerathen, denselben Gesetzen, wie die Pfeifen; dies hat schon Chladni¹⁾ gezeigt.

Es kommt nicht auf den Querschnitt an, so lange die Quersdimensionen im Verhältniss zur Länge klein sind.

Ein an beiden Enden freier Stab²⁾ verhält sich wie eine an beiden Enden offene Pfeife.

Ein Stab, der an dem einen Ende fest, an dem anderen frei ist, bildet das Analogon zu der gedeckten Pfeife.

¹⁾ Chladni, Acta Academiae Moguntiacae, Erfurt 1796, und Entdeckungen zur Theorie des Kluges, Leipzig 1787.

²⁾ Oder ein an beiden Enden fester Stab.

Versuche von Chladni, Savart und Biot. — Um einen Stab in longitudinale Schwingungen zu versetzen, reibt man ihn seiner Längsrichtung nach mit den Fingern oder besser mit einem Tuchlappen, der mit Kolophonium bestreut oder mit angesäuertem Wasser angefeuchtet ist, je nachdem der Stab aus Metall oder aus Glas besteht.

Soll der Stab an beiden Enden frei sein, so unterstützt man ihn in einem Punkte, wo ein Knoten entstehen soll, folglich in der

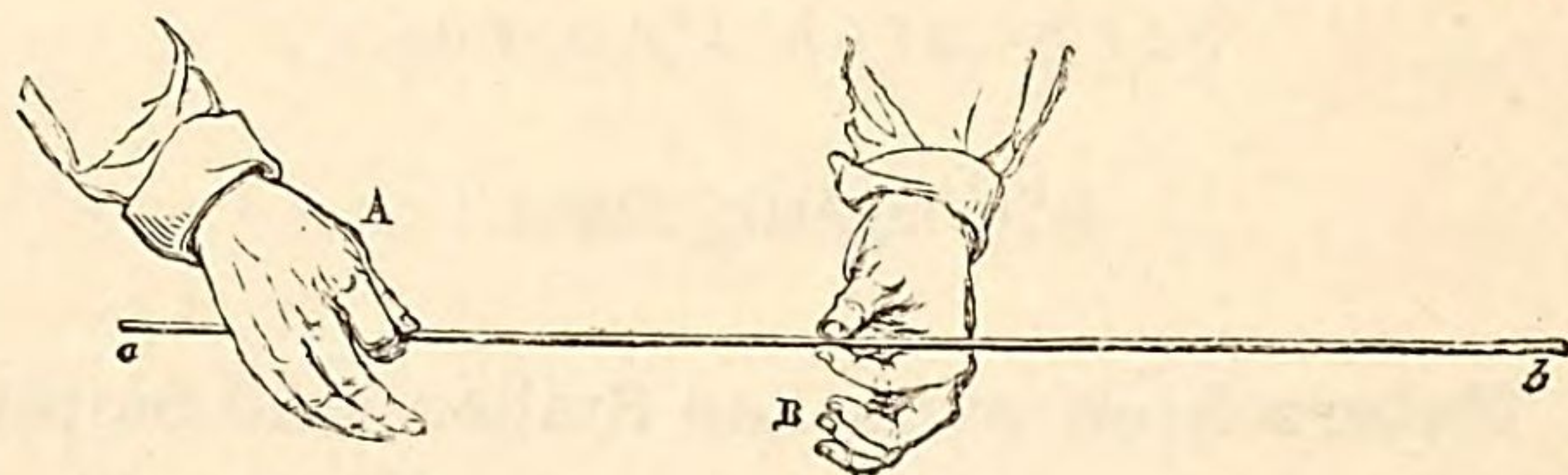


Fig. 101.

Mitte, wenn man den Grundton, und in einem Viertel der Länge, wenn man die Octave hören will.

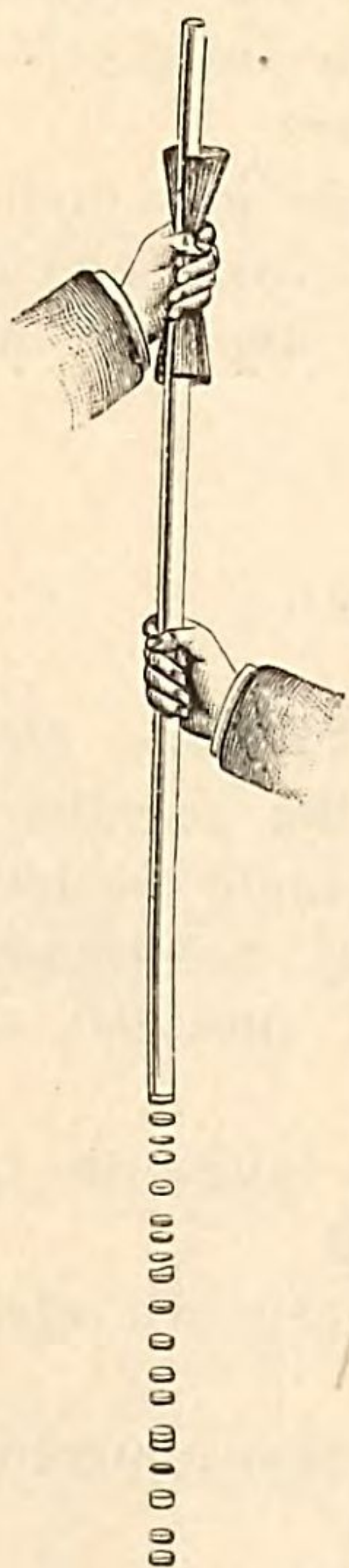


Fig. 102.

An jedem Ende liegt alsdann ein Bauch, wo die Verschiebung der Molecüle parallel zur y -Achse ein Maximum ist. Wir haben schon gesehen, wie man die Schwingungen der Endfläche sichtbar machen kann (324). Savart¹⁾ hat die Amplitude dieser Bewegung mit dem Sphärometer gemessen und gefunden, dass der schwingende Stab sich um eben so viel verlängert, als wenn eine Zugkraft von mehreren Tausend Kilogramm wirkte. Die Verlängerung kann sogar so gross werden, dass der Stab zerreisst. Diesen Umstand darf man bei der Berechnung der Festigkeit von Materialien nicht unberücksichtigt lassen: es ist niemals zu vergessen, dass ein schwacher, aber oft wiederkehrender Anstoss Deformationen hervorrufen kann, wie sie eine unverhältnissmässig stärkere Kraft, die nur ein einziges Mal wirkt, nicht zu Stande brächte.²⁾ Versetzt man z. B. einen

¹⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), 25, 12, 138 u. 225; 1824.

²⁾ Das Unglück auf der Brücke von Angers, deren Eisenketten rissen, als ein Regiment im Tritt hinüber marschirte, hat eine traurige Berühmtheit erlangt.

Glasstab in starke Schwingungen, so zerspringt er in viele Stücke, und zwar verlaufen die Sprünge senkrecht zur Achse (Fig. 102).

An den Knoten ist die Bewegung Null, aber die Verdichtung ein Maximum. Biot¹⁾ hat die Veränderung der Dichte an den Knoten durch einen classischen Versuch bewiesen; er beruht auf einer Erscheinung, die wir später betrachten werden: Bringt man nämlich zwischen zwei gekreuzte Nicol, die alles Licht auslöschen, eine gewöhnliche Glasplatte, so bleibt das Gesichtsfeld dunkel. Wenn man aber durch irgend ein Verfahren in dem Glase die gleichmässige Vertheilung der Molecüle zerstört, wenn man also z. B. die Platte zwischen den Fingern biegt, so erscheint das Gesichtsfeld wieder hell. Biot stellte nun zwischen die gekreuzten Nicol eine lange Glasplatte derartig auf, dass das durch eine Linse vereinigte Strahlenbündel die Platte unmittelbar neben derjenigen

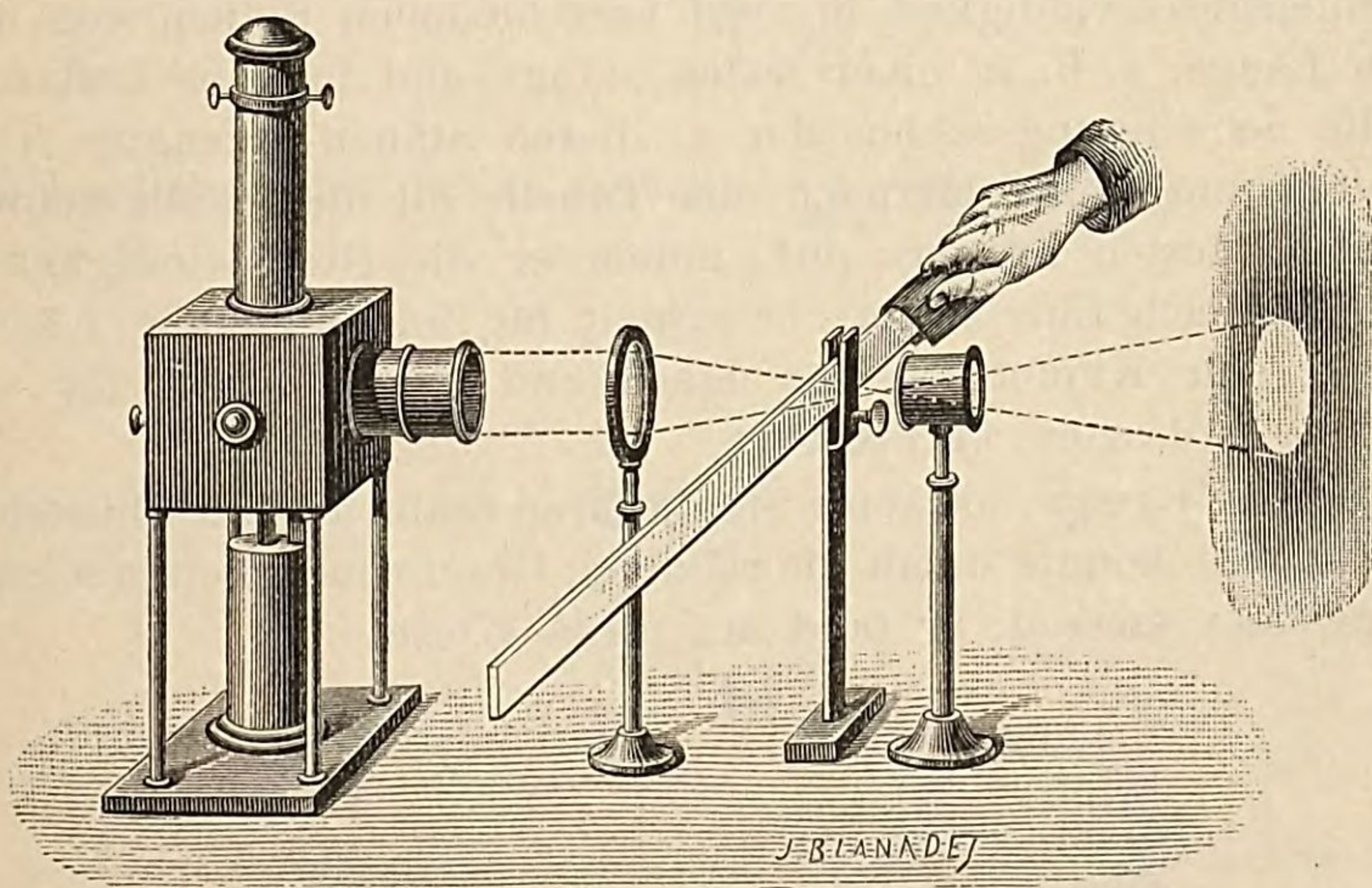


Fig. 103.

Stelle durchsetzte, wo das Glas von dem Halter eines Stativs geklemmt wurde; das Licht blieb dabei ausgelöscht. Versetzte er dagegen die Platte in Schwingungen, so hörte er einen Ton und sah gleichzeitig einen hellen Fleck auf dem Schirm. Obwohl dieser Fleck so lange bestehen bleibt, als der Ton erklingt, so ist er doch in Wirklichkeit intermittirend. Denn das Licht, dessen Intensität ein Maximum ist, wenn die Verdichtung oder die Dilatation selbst ein Maximum aufweist, erlischt jedesmal, wenn die Änderung der Dichte das Zeichen wechselt und durch Null hindurchgeht.

¹⁾ Biot, Ann. de chim. et de phys. (2), 13, 386; 1820.

Die Erscheinung tritt ausserdem um so weniger hervor, je mehr man sich von einem Knoten entfernt; sie verschwindet vollständig an einem Bauch, wo die Verdichtung Null ist.

Anwendung auf die Musik und auf die Messung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern. — Die Töne, die bei den longitudinalen Schwingungen der Stäbe hervorgerufen werden, entbehren nicht des Wohllauts, und Marloye hat aus Holzstäben, die an dem einen Ende fest und an dem anderen frei sind, eine Art Harfe construirt, deren sich ein geschickter Spieler mit Vorthail bedienen kann.

Die wichtigste Anwendung macht man jedoch von dieser Art Schwingungen, um die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern zu messen.

Chladni¹⁾ geht von der Thatsache aus, dass sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Stäben von derselben Länge, z. B. in einer festen Stange und in einer Luftsäule, wie die Schwingungszahlen der in diesen Stäben erzeugten Töne verhalten und stellte hiernach eine Tabelle für die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern auf, indem er die Geschwindigkeit in der Luft gleich Eins setzte: er erhielt für Zinn ungefähr 7,5, für Silber 9, für Kupfer 12, für Eisen und Glas 17 und für verschiedene Holzarten 11 bis 18.

Kundt²⁾ setzte an seine Staubröhren Stäbe aus verschiedenem Material und konnte damit die relativen Geschwindigkeiten leichter und genauer messen; er fand auf diese Weise

Messing	10,87
Kupfer	11,96
Stahl	15,34
Glas	15,25

Diese Zahlen stimmen vollständig mit denen überein, die Wertheim aus den Messungen des Elasticitäts-Coefficienten abgeleitet hatte (348).³⁾

376. Longitudinale Schwingungen der Saiten. — Man kann eine Saite in derselben Weise wie einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzen. Es kommt alsdann die Elasticität und

¹⁾ Chladni, Akustik.

²⁾ Kundt, Pogg. Ann. 127, 497; 1866.

³⁾ Es ist klar, wie umgekehrt mit Hülfe der longitudinalen Schwingungen die Elasticitäts-Coefficienten bestimmt werden können (152).

nicht die Spannung der Saite in Frage. Der Grundton ist, wie bei einem an beiden Enden festen Stabe, durch die Formeln

$$N_l = \frac{V}{2L},$$

gegeben, oder, wenn man V durch seinen bekannten Werth ersetzt (348),

$$N_l = \frac{1}{2L} V \sqrt{\frac{gE}{p}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem, der die Schwingungszahl des Grundtons einer transversal schwingenden Saite darstellt,

$$N_t = \frac{1}{2} V \sqrt{\frac{gT}{PL}},$$

und berücksichtigt dabei, dass $p = \frac{P}{LS}$, so hat man

$$\frac{N_l}{N_t} = \frac{V \sqrt{\frac{gES}{PL}}}{V \sqrt{\frac{gT}{PL}}} = V \sqrt{\frac{ES}{T}}$$

oder

$$\frac{N_l}{N_t} = V \sqrt{\frac{E}{\tau}},$$

wo $\tau = \frac{T}{S}$ die Spannung bedeutet, die auf die Einheit des Querschnitts kommt, oder auch

$$\frac{N_l}{N_t} = V \sqrt{\frac{L}{\lambda}};$$

λ bezeichnet hier die Verlängerung, die die Saite von der Länge L unter der Spannung T erfährt. Diese Verlängerung ist nach der Gleichung (9) des Paragraphen 142 durch die Formel

$$\lambda = \frac{TL}{ES}$$

bestimmt. Aus beiden Formeln geht hervor, dass der longitudinale Ton viel höher ist als der transversale.

Die Töne, welche man auf longitudinal erregten Saiten hervorruft, fallen in der That durch ihre Schärfe auf.¹⁾

II. Transversale Schwingungen.

377. Theorie.—Das Problem der transversalen Schwingungen, das schon von D. Bernoulli²⁾ in Angriff genommen und das zuerst von Euler³⁾ gelöst wurde, ist darauf von Riccati,⁴⁾ Cauchy,⁵⁾ Poisson,⁶⁾ und neuerdings von Strehlke,⁷⁾ Lissajous⁸⁾ und Seebeck⁹⁾ wieder aufgenommen und weiter entwickelt worden.

Wird ein elastischer Stab rechtwinklig zu seiner Längsrichtung gebogen, so halten die longitudinalen elastischen Kräfte, die in jedem Querschnitt des Stabes entstehen, den transversalen Kräften das Gleichgewicht und bestimmen mit diesen zusammen die Bewegung des Stabes.

Wir wählen die Mittellinie des ruhenden Stabes zur x -Achse und eine Linie, die auf dieser in einem beliebigen Punkte senkrecht steht und in die Biegungsebene fällt, zur y -Achse. Die Dicke des Stabes nehmen wir im Verhältniss zu seiner Länge als gering an und beschränken uns auf kleine Deformationen: die Bewegung ist alsdann für alle Punkte ein und desselben geraden Querschnitts gleich, und man braucht nur die mittlere Faser zu betrachten; jeder Punkt x dieser Faser schwingt längs einer kleinen geraden Strecke, die auf der natürlichen Richtung der mittleren Faser senkrecht steht, seine Entfernung von der Ruhelage zur Zeit t sei y . Wir betrachten nun das elementare Prisma, das durch die

¹⁾ Will man die longitudinalen Schwingungen einer Seite studiren, so empfiehlt es sich, die Stege des Monochords durch mit Blei beschwerte Backen zu ersetzen, um die Lage des bewegten Stückes genauer zu begrenzen.

²⁾ D. Bernoulli, Comment. Acad. Petrop. **13**, 186; 1741.

³⁾ Euler, Act. Acad. Petrop. pro anno 1779, **1**, 103.

⁴⁾ Riccati, Memorie di mat. e fis. della Societa Italiana **1**, 484; Verona 1782.

⁵⁾ Cauchy, Exercices de mathématiques; 1827.

⁶⁾ Poisson, Mémoires de l'Institut; 1828, und Traité de mécanique, 2. Ausg., **2**, 368; 1833.

⁷⁾ Strehlke, Pogg. Ann. **27**, 505 u. **28**, 512; 1833.

⁸⁾ Lissajous, Ann. de chim. et de phys. (3), **30**, 385; 1833.

⁹⁾ A. Seebeck, Abhandl. d. math.-phys. Classe der k. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften 133; Leipzig 1849.

beiden geraden Querschnitte x und $x + dx$ begrenzt ist; seine transversale Bewegung wird durch die Gleichung

$$P - \left(P + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) = SD dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

oder

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{1}{SD} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

bestimmt; hier bedeutet P die tangential elastische Kraft im Querschnitt x , S den Flächeninhalt dieses Querschnitts, den wir längs des ganzen Stabes als gleichförmig voraussetzen, und D die Dichte des Stabes.

Um die Kraft P zu bestimmen, wenden wir den Lehrsatz von den Momenten der Bewegungsgrößen (58) in Bezug auf eine zur Biegungsebene senkrechte Achse an, die durch den Schwerpunkt des elementaren Prismas geht. Die Summe der Momente der Kräfte P ist gleich $-Pdx$. Das Moment der longitudinalen elastischen Kräfte für den Querschnitt x ist $\frac{EI}{R}$,¹⁾ wo E den Elasticitäts-Coefficienten des Materials bedeutet, I das Trägheitsmoment des Querschnitts $\int r^2 dS$ und R den Krümmungsradius des Stabes im Punkte x , dessen reciproker Werth gleich $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ gesetzt werden kann; für den benachbarten Querschnitt erhält man

$$EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} dx \right)$$

und für beide zusammen $EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} dx$. Man hat also

$$-P + EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0, \quad ^2)$$

¹⁾ Für das Moment dieser Kräfte fanden wir nämlich im Falle eines prismatischen Stabes (151)

$$\int_{-\frac{1}{2}e}^{+\frac{1}{2}e} Eh \frac{d\Theta}{dx} y^2 dy = E \int_{-\frac{1}{2}e}^{+\frac{1}{2}e} h y^2 dy \frac{d\Theta}{dx} = \frac{EI}{R}.$$

²⁾ Bei dem zweiten Glied vernachlässigen wir hier den Term $ID \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t^2}$; er geht aus dem Trägheitsmoment hervor, das von den kleinen

oder

$$P = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot ^1) \quad (2)$$

Führen wir diesen Werth in Gleichung (1) ein und setzen wir

$$a^2 = \frac{E}{D}$$

und

$$b^2 = \frac{I}{S},$$

wo a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen bedeutet und b den Gyrationradius des Querschnitts in Bezug auf eine Achse, die durch seinen Schwerpunkt geht und auf der Biegungsebene senkrecht steht, so erhalten wir als Gleichung für den schwingenden Stab

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (3)$$

Wir wollen nun untersuchen, ob eine Wellenbewegung mit der veränderlichen Amplitude u dieser Differentialgleichung genügt; wir setzen deshalb

$$y = u \cos \left(\frac{ab}{L^2} m^2 t + \varepsilon \right), \quad (4)$$

wo L die Länge des Stabes und m eine Constante bedeutet, deren Werth noch zu bestimmen ist. Setzen wir diesen Werth für y in Gleichung (3) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{m^4}{L^4} u. \quad (5)$$

Drehungen der Querschnitte des Stabes gegen einander herrührt. Diese werden nämlich in Folge der Krümmung der Achse abwechselnd im entgegengesetzten Sinn geneigt. Dieses Trägheitsmoment ist von derselben Ordnung, wie die oben vernachlässigten Grössen.

¹⁾ Dies ist der Fundamentalsatz für die Festigkeitslehre der Körper: die totale tangentiale Kraft in einer beliebigen transversalen Richtung ist gleich der nach der longitudinalen Coordinate gebildeten Derivirten des Biegemoments um eine Gerade, die senkrecht zu dieser Richtung in dem Querschnitt verläuft.

Wenn $u = e^{p \frac{mx}{L}}$ eine partikuläre Lösung ist, so stellt p eine der vier Wurzeln $+1, -1, +i$ und $-i$ der Gleichung $p^4 = 1$ dar; die vollständige Lösung lautet also

$$u = a \cos m \frac{x}{L} + \beta \sin m \frac{x}{L} + \gamma e^{\frac{mx}{L}} + \delta e^{-\frac{mx}{L}} \quad (6)$$

oder, wenn man die hyperbolischen Sinus und Cosinus¹⁾ einführt und der Abkürzung halber $x' = m \frac{x}{L}$ setzt,

$$u = A(\cos x' + \mathfrak{Cof} x') + B(\cos x' - \mathfrak{Cof} x') + C(\sin x' + \mathfrak{Sin} x') + D(\sin x' - \mathfrak{Sin} x'). \quad (7)$$

Der Ausdruck für u enthält vier Constanten, nämlich die drei Verhältnisse $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$ und m , die durch die vier Anfangsbedingungen (zwei an jedem Ende des Stabes) bestimmt werden.

Wir wollen nach einander die sechs Fälle untersuchen, die sich darbieten, je nachdem jedes Ende frei, befestigt (eingeklemmt in eine unerschütterliche Wand, die stets rechtwinklig zum Stabe bleibt) oder gestützt ist (gegen ein Hinderniss gelehnt, das die Biegung nicht stört).

1. *Beide Enden sind frei.* — Für einen freien Querschnitt ist das Elasticitätsmoment $\frac{EI}{B}$ constant gleich Null und ebenso die tangentielle Kraft P ; man hat also jederzeit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \text{ und } \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0.$$

Folglich ist Anfangs für $x = 0$ auch $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ und $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$; dies bedingt, dass $B = 0$ und $D = 0$, so dass Gleichung (7) sich reducirt auf

$$u = A(\cos x' + \mathfrak{Cof} x') + C(\sin x' + \mathfrak{Sin} x').$$

¹⁾ Diese Functionen sind bekanntlich durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\mathfrak{Sin} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definirt, woraus die fundamentale Beziehung

$$\mathfrak{Cof}^2 x - \mathfrak{Sin}^2 x = 1$$

folgt.

Ausserdem müssen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ für $x=l$ oder für $x'=m$ verschwinden, so dass¹⁾

$$\left. \begin{aligned} A(-\cos m + \text{Cof } m) + C(-\sin m + \text{Sin } m) &= 0, \\ A(\sin m + \text{Sin } m) + C(-\cos m + \text{Cof } m) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Damit beide Gleichungen gleichzeitig gelten, muss

$$(\text{Cof } m - \cos m)^2 = \text{Sin}^2 m - \sin^2 m$$

oder

$$\cos m \text{Cof } m = 1 \quad (8)$$

sein. Gleichung (8) bestimmt die Werthe von m , die für die Aufgabe passen.²⁾

Ist dieser Gleichung Genüge geleistet, so liefern die beiden Bedingungen für das Verhältniss $\frac{C}{A}$ einen einzigen Werth; setzt man diesen in den obigen Ausdruck für u ein, so erhält man (bis auf einen constanten Factor H)

$$u = (\cos m - \text{Cof } m) \left(\cos \frac{mx}{l} + \text{Cof } \frac{mx}{l} \right) + (\sin m + \text{Sin } m) \left(\sin \frac{mx}{l} + \text{Sin } \frac{mx}{l} \right);$$

und die gesuchte einfache Lösung ist bei diesem Werthe von u

$$y = Hu \cos \left(\frac{ab}{L^2} m^2 t + \varepsilon \right). \quad (9)$$

Die Schwingungszahl dieser Bewegung ist

$$N = \frac{ab}{2\pi L^2} m^2. \quad (10)$$

A. Auf diese Weise erzeugt ein an beiden Enden freier Stab eine Reihe von Tönen, deren Schwingungszahlen sich wie die

¹⁾ Wir erinnern daran, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \text{Cof } x &= \text{Sin } x, & \frac{d}{dx} \text{Sin } x &= \text{Cof } x, \\ \frac{d^2}{dx^2} \text{Cof } x &= -\text{Cof } x, & \frac{d^2}{dx^2} \text{Sin } x &= -\text{Sin } x \end{aligned}$$

u. s. w.

²⁾ Poisson, loc. cit.

Quadrate m^2 der durch Gleichung (8) bestimmten Zahlen verhalten. Die Werthe von m , die dieser Gleichung genügen, sind

$$3,011 \frac{\pi}{2}, \quad 5,000 \frac{\pi}{2}, \quad 7,000 \frac{\pi}{2}, \quad \dots \dots \dots (2n+1) \frac{\pi}{2};$$

in Folge dessen variiren die fraglichen Töne sehr nahe wie die Quadrate der ungeraden Zahlen:

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2n+1)^2}{4}, \quad (11)$$

und zwar trifft dies Gesetz um so genauer zu, von je höherer Ordnung n der Ton ist.

B. Ein Ton von gegebener Ordnung ist dem Quadrat L^2 der Länge des Stabes umgekehrt, dem Gyrationradius b und folglich der Dicke (oder dem Durchmesser) des Stabes und ferner der Geschwindigkeit a der longitudinalen Schwingungen in dem betreffenden Material direct proportional; er ist dagegen unabhängig von der Breite.

C. Die Knoten fallen in die Punkte x , für die $u=0$, d. h. auf einen Stab von der Länge 1 in die Punkte

Ton	Knoten			
1	0,224	0,776		
2	0,132	0,500	0,868	
3	0,094	0,357	0,643	0,906
...	...	...	...	...
n	$\frac{1,322}{4n+2}$	$\frac{4,982}{4n+2}$	$\frac{9,001}{4n+2}$	$\frac{4k-3}{4n+2}$
				$\frac{4n-7,001}{4n+2}$
				$\frac{4n-2,982}{4n+2}$
				$\frac{4n+0,678}{4n+2}$

Sobald die Ordnungszahl n des Tones etwas gross und $n-3 > k > 3$ ist, d. h. für die ganze mittlere Region des Stabes, sind die Knoten gleich weit von einander entfernt; die Entfernung zweier Knoten ist alsdann, wenn L die Länge des betreffenden Stabes bezeichnet,

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \quad (12)$$

Ausser an den Endpunkten 0 und 1 liegen die Bäuche an den Punkten, wo u ein Maximum ist:

Ton	Knoten
1	0,500 (hier ist die Amplitude gleich 0,608, wenn sie an den Enden 1 beträgt),
2	0,308 und 0,692 (hier ist die Amplitude 0,664),
3	0,220 0,780 (Amplitude ist 0,935) und 0,500 (Amplitude geringer wie vorher).

2. *Beide Enden sind befestigt.* — Die Bedingungen dafür, dass ein Ende befestigt ist, lauten $y = 0$ und $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Ist das Ende frei, so haben wir $y'' = 0$ und $\frac{\partial y''}{\partial x} = 0$, ausserdem muss y'' der Differentialgleichung (3) genügen. Der vorliegende Fall lässt sich deshalb unmittelbar auf den vorhergehenden zurückführen. Durch dieselbe Gleichung

$$\cos m \mathfrak{Cof} m = 1 \quad (8)$$

ist die Reihe der Zahlen m bedingt, deren Quadrate die Reihenfolge der Töne für den Stab bestimmen. Sieht man von dem Grundton ab, so hat man also mit ziemlicher Annäherung

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2n+1)^2}{4}. \quad (11)$$

Die Knoten treten, abgesehen von den beiden äussersten, die mit den Enden selbst zusammenfallen, in folgenden Punkten auf:

Ton	Knoten					
1	—					
2	0,500					
3	0,359	0,641				
...	...	...	...	...	...	...
n	$\frac{5,018}{4n+2}$	$\frac{8,999}{4n+2}$	$\dots\dots\dots$	$\frac{4k+1}{4n+2}$	$\dots\dots\dots$	$\frac{4n-6,999}{4n+2} \quad \frac{4n-3,018}{4n+2}$

Die Entfernung zweier auf einander folgenden Knoten beträgt in der Nähe von der Mitte eines Stabes, der einen Ton von etwas höherer Ordnung giebt,

$$D = \frac{2L}{2n+1}. \quad (12)$$

3. *Das eine Ende ist frei, das andere befestigt.* — Alsdann verschwinden die Coefficienten A und C ; u erhält die Form

$$u = (\cos m + \mathfrak{Cof} m) \left(\cos \frac{mx}{l} - \mathfrak{Cof} \frac{mx}{l} \right) + (\sin m - \mathfrak{Sin} m) \left(\sin \frac{mx}{l} - \mathfrak{Sin} \frac{mx}{l} \right),$$

und y kann durch eine einfache harmonische Bewegung (9) dargestellt werden, wobei m durch die Gleichung

$$\cos m \mathfrak{Cof} m = -1$$

bestimmt wird. Die Wurzeln dieser Gleichung lauten

$$1,194 \frac{\pi}{2}, \quad 2,989 \frac{\pi}{2}, \quad 5,000 \frac{\pi}{2}, \quad 7,000 \frac{\pi}{2}, \quad \dots, \quad (2n+1) \frac{\pi}{2};$$

in Folge dessen verhalten sich die verschiedenen Töne, die der Stab giebt, mit Ausnahme der beiden ersten, annähernd wie die Quadrate der ungeraden Zahlen,

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{ab}{L^2} \frac{(2n-1)^2}{4} \quad (11a)$$

Der Grundton des Stabes, dessen eines Ende frei ist, während das andere fest eingeklemmt liegt, verhält sich zum Grundton des beiderseits freien oder beiderseits befestigten Stabes wie $(1,194)^2 : (3,011)^2 = 1 : 6,36$; der erstere ist also mehr als $2^{1/2}$ Octaven tiefer.

Abgesehen vom festen Ende fallen die Knoten in Punkte, die vom freien Ende folgende Entfernungen haben:

Ton	Knoten			
1	—			
2	0,226			
3	0,132	0,500		
4	0,094	0,356	0,644	
...	...	...	...	...
n	$\frac{1,322}{4n-2}$	$\frac{4,982}{4n-2}$	$\frac{9,001}{4n-2}$	$\frac{4k-3}{4n-2} \dots \frac{4n-10,999}{4n-2} \frac{4n-7,018}{4n-2}$

Für höhere Töne haben die Knoten in der Nähe der Stabmitte von einander die gleiche Entfernung

$$D = \frac{2L}{2n+1} \quad (12a)$$

4. *Ein Ende ist frei, das andere gestützt.* — Unter diesen Bedingungen verhält sich der Stab wie ein an beiden Enden freier von der halben Länge, der in einer geraden Anzahl von Theilen schwingt, also in der Mitte einen Knoten hat.

5. *Ein Ende ist befestigt, das andere ist gestützt.* — Die Schwingungen des Stabes sind in diesem Fall dieselben wie die eines Stabes

¹⁾ Wenn der Stab nicht dünn genug ist, so kann in Folge des Trägheitsmoments, das durch die Drehung der Querschnitte hervorgerufen wird, die Schwingungszahl der höheren Töne merklich kleiner werden; denn der genaue Werth der Schwingungszahl ist

$N' = N \left\{ 1 - \left(m + \frac{m^2}{2} \right) \frac{b^2}{L^2} \right\}$, wo das Glied mit $\frac{b^2}{L^2}$ für grosse Werthe von m nicht mehr zu vernachlässigen ist (Lord Rayleigh, loc. cit. 1, 239).

von halber Länge, der an beiden Enden befestigt ist und in der Mitte einen Knoten hat.

6. *Beide Enden sind gestützt.* — Die analytischen Bedingungen dafür, dass der Stab gestützt ist, sind $y=0$ und $\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}=0$; ferner ist das Drehungsmoment für die Endfläche Null. Daraus folgt zuerst $A=0$ und $B=0$; sodann $C-D=0$ und $\sin m=0$; die Lösung, die einzige, die Euler vollständig ableitete, lautet also

$$y = H \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \left(\frac{n^2 \pi^2 a b}{L^2} t - \varepsilon \right),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Der Stab zeigt in diesem Fall die Formen einer schwingenden Saite; er zerfällt in n Theile, die im Gleichklang schwingen:

$$D = \frac{L}{n}. \quad (12b)$$

Aber das Gesetz für die Reihenfolge der Töne ist anders, denn die Schwingungszahlen verhalten sich wie die Quadrate der auf einander folgenden ganzen Zahlen,

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{a b}{L^2} n^2.$$

Gesetz von Lissajous. — Wie die Bedingungen für die Enden auch immer beschaffen sein mögen, die Schwingungszahl N ist für die Töne von etwas höherer Ordnung, deren Knoten in der Mitte die Entfernung D von einander haben, gegeben durch

$$N = \frac{\pi}{2} \frac{a b}{D^2}.$$

Jedes Stück zwischen zwei Knoten schwingt wie ein Stab von gleicher Länge, dessen beide Enden gestützt sind; unter sonst gleichen Bedingungen ist die Schwingungszahl dem Quadrat der Entfernung D zweier auf einander folgender Knoten umgekehrt proportional.¹⁾

Die Enden üben also keinen merklichen Einfluss auf die Mitte des Stabes aus, die sich in allen Fällen gleich verhält.

Fortpflanzung der transversalen Bewegung in einem Stabe. — Obwohl wir die unwichtigen Grössen vernachlässigt haben, war die

¹⁾ Lissajous, loc. cit. 408.

Theorie der transversalen Schwingungen von Stäben trotzdem viel complicirter als die Theorie der transversalen Schwingungen von Saiten. Der Grund für diese grosse Einfachheit der letzteren liegt, wie Lord Rayleigh bemerkt,¹⁾ darin, dass sich die Wellen der harmonischen Töne in der Saite mit einer von der Wellenlänge unabhängigen Geschwindigkeit fortpflanzen, so dass sich jede Welle ausbreitet, ohne eine Änderung zu erleiden. Bei den Stäben stellt die Constante der Differentialgleichung keine Geschwindigkeit mehr dar.

Gegeben sei eine Wellenbewegung

$$y = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

oder, da für die Geschwindigkeit die fundamentale Beziehung $\lambda = V\tau$ besteht,²⁾

$$y = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x);$$

diese transversale Bewegung werde im Coordinatenanfangspunkt unterhalten und pflanze sich in einer Reihe von gleichen Wellen über den Stab hin fort. Damit Gleichung (3) befriedigt wird, muss die Welle mit der Geschwindigkeit

$$V = \frac{2\pi ab}{\lambda},$$

also umgekehrt proportional der Grösse λ , fortschreiten.

Eine zusammengesetzte Welle, die durch die Superposition mehrerer einfacher Bewegungen entstanden ist, erfährt also während ihrer Fortpflanzung eine Änderung. Es mögen sich z. B. zwei Schwingungen von derselben Amplitude und sehr wenig verschiedenen Wellenlängen zusammen in demselben Mittel ausbreiten

$$y = \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau'} - \frac{x}{\lambda'} \right)$$

oder

$$y = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (Vt - x) + \cos \frac{2\pi}{\lambda'} (V't - x).$$

¹⁾ Lord Rayleigh, loc. cit. 1, 246.

²⁾ In dieser Gleichung, durch die eigentlich λ definirt wird, muss man die Periode τ als gegeben betrachten (denn sie charakterisirt den betreffenden Ton); die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V ist also als Function von τ und folglich auch von $\lambda = V\tau$ aufzufassen.

Diese Gleichung lässt sich auch in folgender Form schreiben

$$y = 2 \cos \pi \left\{ t \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \right\} \cos \pi \left\{ t \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau'} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right) \right\};$$

man sieht also, dass die gleichzeitige Fortpflanzung zweier harmonischer Bewegungen einem Wellenzuge von der Periode $\tau_1 = 2 \frac{\tau \tau'}{\tau + \tau'}$ und der Wellenlänge $\lambda_1 = \frac{2 \lambda \lambda'}{\lambda + \lambda'}$ entspricht, deren Amplituden aber langsam zwischen 0 und 2 schwanken, so dass der ganze Zug eine Reihe von Gruppen bildet, die durch verhältnismässig leere Zwischenräume getrennt sind (Schwebungen). Bei der transversal schwingenden Saite und dem longitudinal schwingenden elastischen Stabe ändert sich λ proportional mit τ , die verschiedenen Gruppen pflanzen sich also mit derselben Geschwindigkeit wie die ganze Welle selbst fort. Dies ist nicht mehr bei dem transversal schwingenden Stab der Fall, wo die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine Function der Wellenlänge ist. Zur Zeit t befindet sich die Mitte der Gruppe, die Anfangs im Coordinatenanfangspunkt war, in einer Lage, die durch die Gleichung

$$t \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'} \right) - x \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) = 0$$

bestimmt ist; die Geschwindigkeit der Gruppe ist also

$$U = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}} = \frac{d \frac{1}{\tau}}{d \frac{1}{\lambda}}$$

oder, da $\tau = \frac{\lambda}{V}$,

$$U = \frac{d \frac{V}{\lambda}}{d \frac{1}{\lambda}}.$$

Ist also $V = K \lambda^{-1}$, so haben wir

$$U = 2 V. ^1)$$

¹⁾ Wenn sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Welle wie λ^n ändert, so ist allgemein die Geschwindigkeit der Gruppe

$$U = (1 - n) V.$$

Für die Oberfläche eines tiefen Gewässers, wo $V = K \lambda^{\frac{1}{2}}$, ist $U = \frac{1}{2} V$. Man hat in der That schon lange bemerkt, dass die Geschwindigkeit

378. Versuche. — Die transversalen Schwingungen der Stäbe sind experimentell in jedem der oben unterschiedenen Fällen untersucht.

1. *Beide Enden sind frei.* — Poisson behandelte speciell diesen Fall und bestimmte theoretisch das Verhältniss der Grundtöne eines an beiden Enden freien Stabes, der transversal und longitudinal schwingt; er bat Savart, diese Beziehung experimentell zu prüfen.

Poisson führte folgende einfache Rechnung durch.

Der Grundton eines transversal schwingenden Stabes ist

$$N = \frac{3,011 \pi^2}{8} \frac{ab}{L^2}.$$

Für einen rechteckigen Stab von der Dicke e und der Breite h ist b^2 oder $\frac{I}{S}$ gleich $\frac{1}{12} h e^3 : h e = \frac{1}{12} e^2$; also $b = \frac{e}{2\sqrt{3}}$. Für einen kreisrunden Stab vom Durchmesser e ist $b^2 = \frac{\pi e^4}{64} : \frac{\pi e^2}{4} = \frac{1}{16} e^2$; also $b = \frac{1}{4} e$.

Ein transversal schwingender rechteckiger Stab liefert also den Grundton

$$N_T = 1,028 \frac{ae}{L^2},$$

und ein kreisrunder Stab

$$N'_T = 0,890 \frac{ae}{L^2}.$$

einer Wellengruppe auf dem Wasser geringer ist als die der Einzelwellen: diese scheinen sich quer durch die Gruppen hindurch zu bewegen und zu verschwinden, wenn sie sich dem Rande der Gruppe nähern. Die folgende Tabelle, die von Lord Rayleigh entlehnt ist, enthält die interessantesten besonderen Fälle.

$V = K\lambda$ $U = 0$ Pendelartige Bewegungen (Reynold, Nature, 23. Aug. 1877).

$V = K\lambda^{\frac{1}{2}}$ $U = \frac{1}{2}V$ Wellen in schweren Flüssigkeiten.

$V = K\lambda^0$ $U = V$ Luftwellen.

$V = K\lambda^{-\frac{1}{2}}$ $U = \frac{3}{2}V$ Capillare Flüssigkeitswellen (W. Thomson, Phil. Mag., Nov. 1871).

$V = K\lambda^{-1}$ $U = 2V$ Wellen in Folge von Biegung.

Für jeden Stab ist ausserdem der Grundton bei longitudinalen Schwingungen

$$N_L = \frac{a}{2L}.$$

Man hat demnach

$$\frac{N_T}{N_L} = 2,056 \frac{e}{L},$$

und

$$\frac{N'_T}{N_L} = 1,780 \frac{e}{L}.$$

Savart hat die Anzahl der longitudinalen Schwingungen bei Stäben von ungefähr 1 Meter Länge bestimmt und daraus die Zahl der longitudinalen und transversalen Schwingungen berechnet, die dieselben Stäbe ausführten, wenn ihre Länge auf den achten Theil reducirt wäre. Er hat alsdann auch die Zahl der transversalen Schwingungen gemessen, die die auf den achten Theil ihrer Länge verkürzten Stäbe wirklich ausführen. Wir wollen von den auf diese Weise erhaltenen sieben Resultaten nur zwei erwähnen.

a. Parallelepipedischer Messingstab.

$$L = \frac{0,825}{8} \text{ m}; e = 3,92 \text{ mm}; N_L = 34\,133$$

N_T berechnet 2 668, beobachtet 2 667.

b. Cylinderförmiger Messingstab

$$L = \frac{0,825}{8} \text{ m}; e = 4,8 \text{ mm}; N_L = 34\,133$$

N'_T berechnet 2 829, beobachtet 2 844.

Schon früher hatte Chladni experimentell die verschiedenen Töne ein und desselben Stabes bestimmt, der an dem einen Ende fest und an dem anderen frei war und als Grundton den Ton C_1 gab; er fand folgende Töne, deren Schwingungszahlen sich wie die nebenstehenden Zahlen verhalten

gis	d_2	d_3	b_3	f_4	h_4	...
3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	13^2	...

Das Intervall $gis : C_1 = 6,25$ weicht wenig von dem durch die Theorie geforderten Verhältniss 6,36 ab. Was die Reihe der von Chladni beobachteten Töne anbelangt, so ist sie von dem zweiten

an genau; nur der erste Werth weicht etwas ab: 3^2 oder 9 an Stelle von $(3,011)^2$ oder 9,066.

Diese Bestimmungen wurden von Mercadier¹⁾ mit Hülfe der graphischen Methode wiederholt; er bewies die in Formel $N = K \frac{e}{L^2}$ enthaltenen Gesetze, wo K eine Constante bezeichnet, deren theoretischer Werth gleich $102,78 V$ ist. Für Stahl beträgt K ungefähr 532000 (wenn das Centimeter als Längeneinheit gilt).

Strehlke und Lissajous haben die Lage der Knoten sorgfältig gemessen. Wir führen beispielsweise die Zahlen an, die Lissajous für einen 500 mm langen Messingstab erhielt, dessen Oberfläche eine sehr genaue Theilung in Millimeter trug. Da man die Entfernung D zweier auf einander folgenden Knoten erhält, wenn man den Zwischenraum zwischen zwei entfernten Knoten durch die Anzahl der Internodien dividirt, so wird die Entfernung um so genauer bestimmt, je grösser die Zahl der Knoten ist. Die Entfernung d_1 des äussersten Knotens vom Stabende wurde direct auf beiden Seiten gemessen, eben so die Entfernung des folgenden Knotens vom Stabende: daraus ergab sich durch Subtraction die Entfernung d_2 zwischen dem ersten und zweiten Knoten. Die erste Columne enthält die Anzahl der Knoten, die gleich $n + 1$ ist, wenn n die Reihenfolge des Tones bezeichnet.

Anzahl der Knoten	d_1			d_2			D	
	berechnet	beobachtet		berechnet	beobachtet		berechnet	beobachtet
5	36,4	36,8	36,9	102,4	101,3	101,7	111,1	111,6
6	30,0	30,0	30,0	83,6	83,0	83,0	90,9	91,0
7	25,4	25,5	25,5	70,7	70,3	70,3	76,9	76,9
8	22,0	22,2	22,2	61,3	60,8	61,0	66,6	66,6
9	19,4	19,6	19,6	54,1	52,5	53,6	58,8	58,8
10	17,3	17,5	17,6	48,4	47,9	47,9	52,6	52,6
11	15,7	15,8	16,0	43,8	43,4	43,2	47,6	47,7
12	14,3	14,4	14,6	40,0	39,6	39,4	43,5	43,5
13	13,2	13,4	13,4	36,8	36,3	36,5	40,0	40,0
14	12,2	12,3	12,4	34,0	33,8	33,6	37,0	37,0

Um den Stab bei diesen Versuchen zu unterstützen, legte man ihn in zwei Knotenlinien auf zwei Schneiden aus Kork, die von schweren mit Tuch überzogenen Füßen aus Blei getragen wurden und hielt ihn dadurch fest, dass man über einer der Schneiden mit dem Finger darauf drückte. Alsdann strich man den Stab an

¹⁾ Die Schwingungen der Platte wurden ebenso wie die der chronographischen Stimmgabel auf elektrischem Wege unterhalten (Mercadier, Journal de physique (2), 3, 189; 1884.

diesem Ende auf der hohen Kante mit dem Bogen an oder schlug ihn an der Stelle eines Bauches mit einem kleinen Hammer; hatte man vorher nach der Chladni'schen Methode auf die Oberfläche etwas Sand gestreut, so sammelte er sich an den Knotenlinien

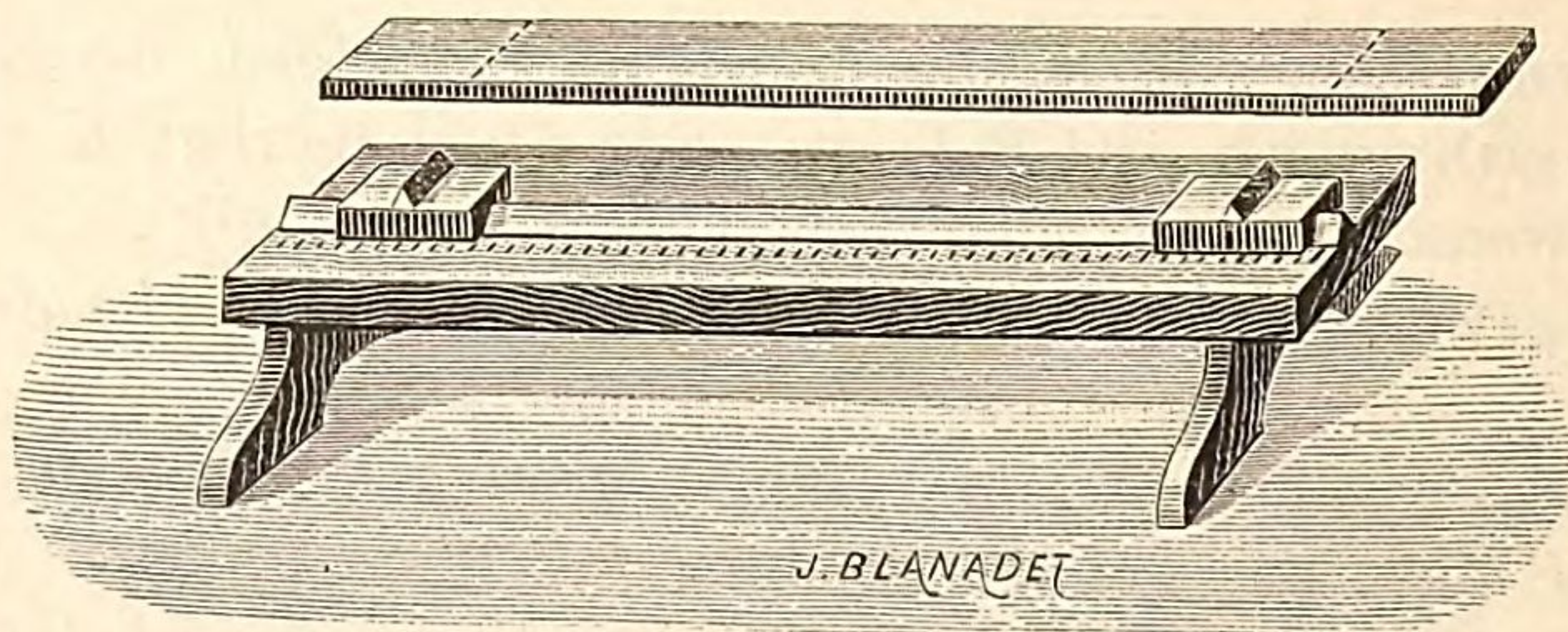


Fig. 104.

an und liess diese deutlich hervortreten. In Folge dessen konnte man alsdann nöthigenfalls die Lage der Unterstützungslinien berichtigen, die mit den Knotenlinien zusammenfallen müssen, damit sie die Bewegung des Stabes nicht stören. Dann liessen sich die gewünschten Messungen leicht anstellen.

2. *Beide Enden sind frei.* — Chladni hatte erkannt, dass ein an beiden Enden befestigter Stab genau dieselben Töne giebt wie ein beiderseits freier Stab, trotzdem die Biegung in beiden Fällen sehr verschieden ist. Lissajous maass die Entfernung der Knoten für die 17 ersten Töne und fand sie ganz der Theorie entsprechend, wenn er jedes Ende fest in einen Metallklotz eingespannt hatte, der von einer zum Stabe senkrechten Ebene begrenzt war.¹⁾

3. *Ein Ende ist frei, das andere fest.* — Chladni giebt für diesen Fall folgende Tonreihe

	C_1	gis	d_2	d_3 —	b_3	f_4 +	...
oder	1	$6\frac{1}{4}$	$17\frac{1}{2}$	$34\frac{1}{4}$	$56\frac{1}{2}$	84	...
oder	$(1,2)^2$	3^2	5^2	7^2	9^2	11^2	...

Nach der Theorie folgen in der That die Töne vom dritten an wie die Quadrate der ungeraden Zahlen auf einander, wobei der Grundton $(1,194)^2$ und die Octave $(2,989)^2$ beträgt.

¹⁾ Man kann den Stab alsdann mit dem Bogen nur an der Seitenfläche anstreichen, wodurch leicht Torsionsschwingungen entstehen. Dies schadet namentlich, wenn zufällig die Knotenlinien des Tones, den man erzeugen will, mit den transversalen Knotenlinien einer Art von Torsionsschwingungen zusammenfallen.

Um die Knoten zu bestimmen, legte Lissajous den Stab in horizontaler Lage hin, befestigte wie vorher das eine Ende, und unterstützte ihn durch einen Steg aus Kork in einer Knotenlinie: er konnte alsdann das freie Ende mit dem Bogen anstreichen und fand, dass die Knoten an denselben Stellen liegen wie in den beiden vorhergehenden Fällen. Von den beiden äussersten Knoten befindet sich der eine am festen Ende, während der andere vom freien eben so weit entfernt ist, als bei einem ganz freien Stab von derselben Länge; die darauf folgenden Knoten haben dieselbe Entfernung von den benachbarten Stabenden; die übrigen Knoten haben die gleiche Entfernung von einander.

4. *Ein Ende ist frei, das andere gestützt.* — Ein Stab, bei dem ein Ende frei und das andere gestützt ist, gleicht der Hälfte eines an beiden Enden freien Stabes, in dessen Mitte sich ein Knoten befindet.

Chladni fand in der That

$$\begin{array}{cccccc} d & b_1 & h_2 - & gis_3 & dis_4 + & a_4 \dots, \\ 5^2 & 9^2 & 13^2 & 17^2 & 21^2 & 25^2 \dots, \end{array}$$

wobei sich der Grundton zu dem eines an beiden Enden freien Stabes wie $5^2:6^2$ verhält; das genaue Verhältniss ist $5^2:2^2 (3,011)^2$.

Lissajous hat seinerseits nachgewiesen, dass die Lage der Knoten dieselbe ist, wie bei einem beiderseits freien Stabe von doppelter Länge. Die Bedingung des Stützens lässt sich praktisch ziemlich schwer ausführen: er drückte den Stab gegen eine Wand, indem er einen Kork von 1 cm Dicke dazwischen legte.

5. *Ein Ende ist befestigt, das andere ist gestützt.* — Der Versuch hat ebenfalls bewiesen, dass ein Stab, von dessen Enden das eine befestigt und das andere gestützt ist, sich genau eben so verhält wie jede Hälfte eines an beiden Enden befestigten Stabes von doppelter Länge, der einen Knoten in der Mitte hat; folglich erhalten wir dieselben Töne und dieselben Knoten wie bei dem Stabe, von dessen Ende das eine frei und das andere gestützt ist.

6. *Beide Enden sind gestützt.* — Chladni hat in diesem Falle die Resultate der Euler'schen Rechnung bestätigt, sowohl in Betreff der gleichen Entfernung der Knoten von einander als auch in Bezug auf die Höhe der Töne, für die er folgende Reihe erhielt

$$\begin{array}{cccccc} Fis & fis_1 & gis_2 & fis_3 & d_4 & g_4 \dots \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \dots, \end{array}$$

indem er bemerkte, dass sich der Grundton zu dem des ersten Falles wie $2^2:3^2$ verhält.

379. Zusammengesetzte Schwingungen; Kaleidophon.

Die Schwingungen eines Stabes vollziehen sich im Allgemeinen nicht in einer Ebene; die Bewegung kann man sich aber durch die Superposition zweier zu einander rechtwinkligen Wellen entstanden denken, die den oben erläuterten Gesetzen gehorchen. Wheatstone,¹⁾ dem man die Entdeckung dieser Thatsache verdankt, benutzte hierbei einen einfachen und sinnreichen Apparat, das *Kaleidophon* (*καλός* schön, *εἶδος* Form und *φωνή* Stimme). Es besteht dieser aus einer Reihe von Stäben, die in verticaler Stellung in ein festes Brett eingelassen sind; ferner tragen sie an ihrem oberen Ende eine kleine Kugel (verzinnte Perle oder polirte Stahlkugel), auf welcher das Licht einen glänzenden Punkt hervorruft. Erschüttert man nun einen der Stäbe, so beschreibt sein leuchtender Punkt eine Curve, die zusammenhängend erscheint und sich im Allgemeinen allmählich nach einem bestimmten Gesetz ändert. Bei langen und dünnen Stäben, die für die höheren Töne günstig sind, kommen verschiedenartige Sinuswellen zu der Hauptcurve hinzu, so dass eigenthümliche Erscheinungen entstehen. Besonderes Interesse bietet aber nur die Hauptcurve, die wir im nächsten Capitel näher betrachten wollen.

380. Instrumente mit schwingenden Stäben. —

Stäbe, die an beiden Enden frei sind, kommen bei einem sehr einfachen Instrumente, der Strohfidel, vor. Sie besteht aus einer Reihe von Brettchen *ab*, *a'b'* von passender Länge und Dicke, die in den Knoten des Grundtons durch Fäden *cd*, *c'd'* oder durch Strohhalme (daher der Name) unterstützt und mit einem hölzernen Hammer angeschlagen werden. Eine Zeit lang erfreuten sich auch Glockenspiele und Harmonika-Arten einer grossen Beliebtheit, die aus Metall- oder Glasstäben bestehen; Mozart hat eine solche in der Zauberflöte verwandt,

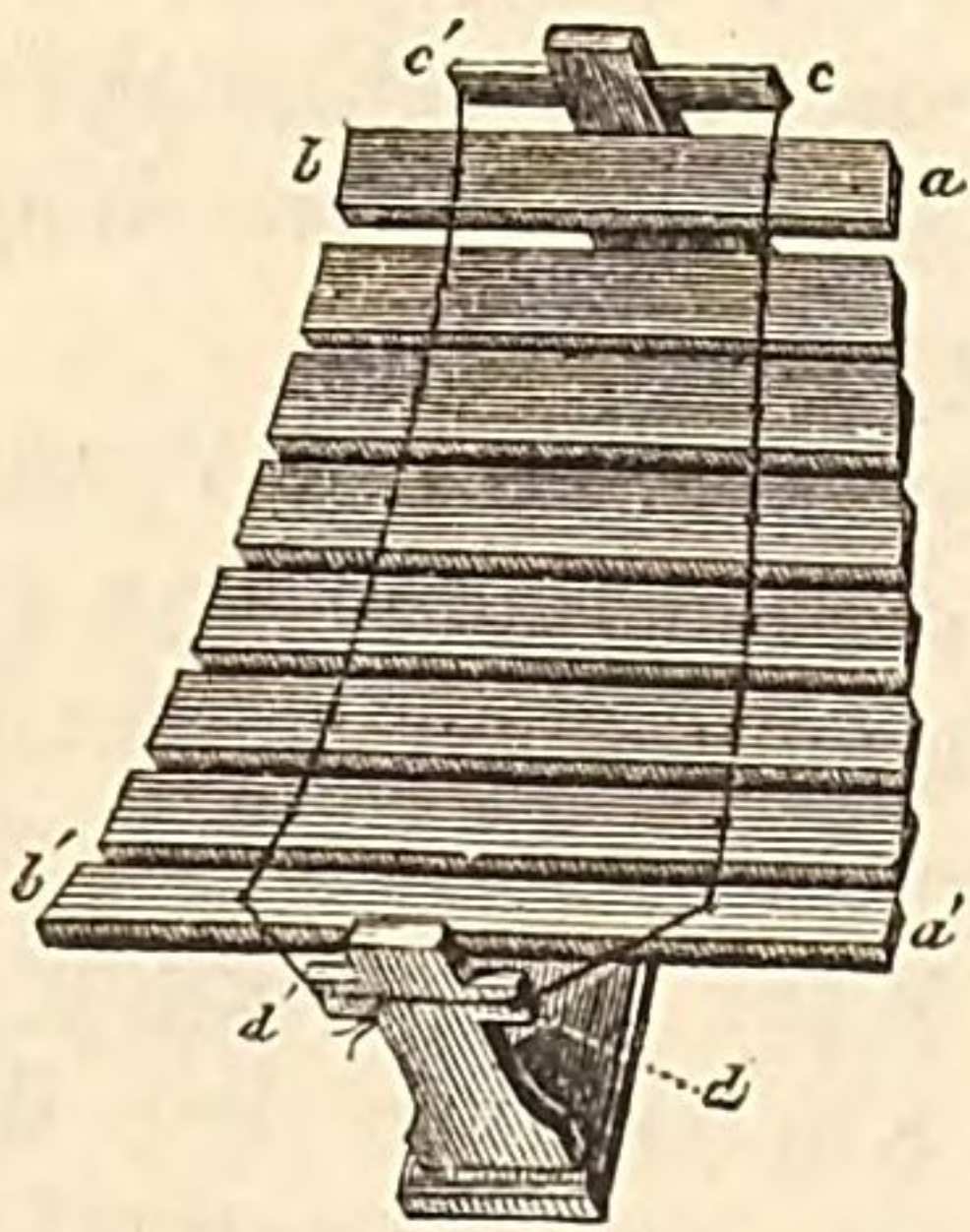


Fig. 105.

um den Ton der Glöckchen nachzuahmen. Unsere Musikkapellen verwenden heute noch als Triangel einen langen Stab, der beim Anschlagen eine Fülle von hohen Tönen liefert.

Die eiserne Geige besteht aus Eisenstäben, die an ihrem unteren Ende auf einem Resonanzkasten befestigt sind, während die oberen Enden frei bleiben; ein geschickt geführter Bogen kann annehmbare Töne darauf hervorrufen. Auch die Zungen,

¹⁾ Wheatstone, Quaterly Journal of science 1; 1827.

die man überall in den Spieldosen findet, gehören zu dieser Art von schwingenden Stäben.

Die wichtigste Anwendung finden die schwingenden Stäbe aber als Stimmgabel.

381. Stimmgabel. — Die Stimmgabel ist eine Gabel aus Metall, bei der Griff und Zinken aus einem Stück bestehen. Die beiden Zinken sind gleich und führen gleiche Schwingungen aus;

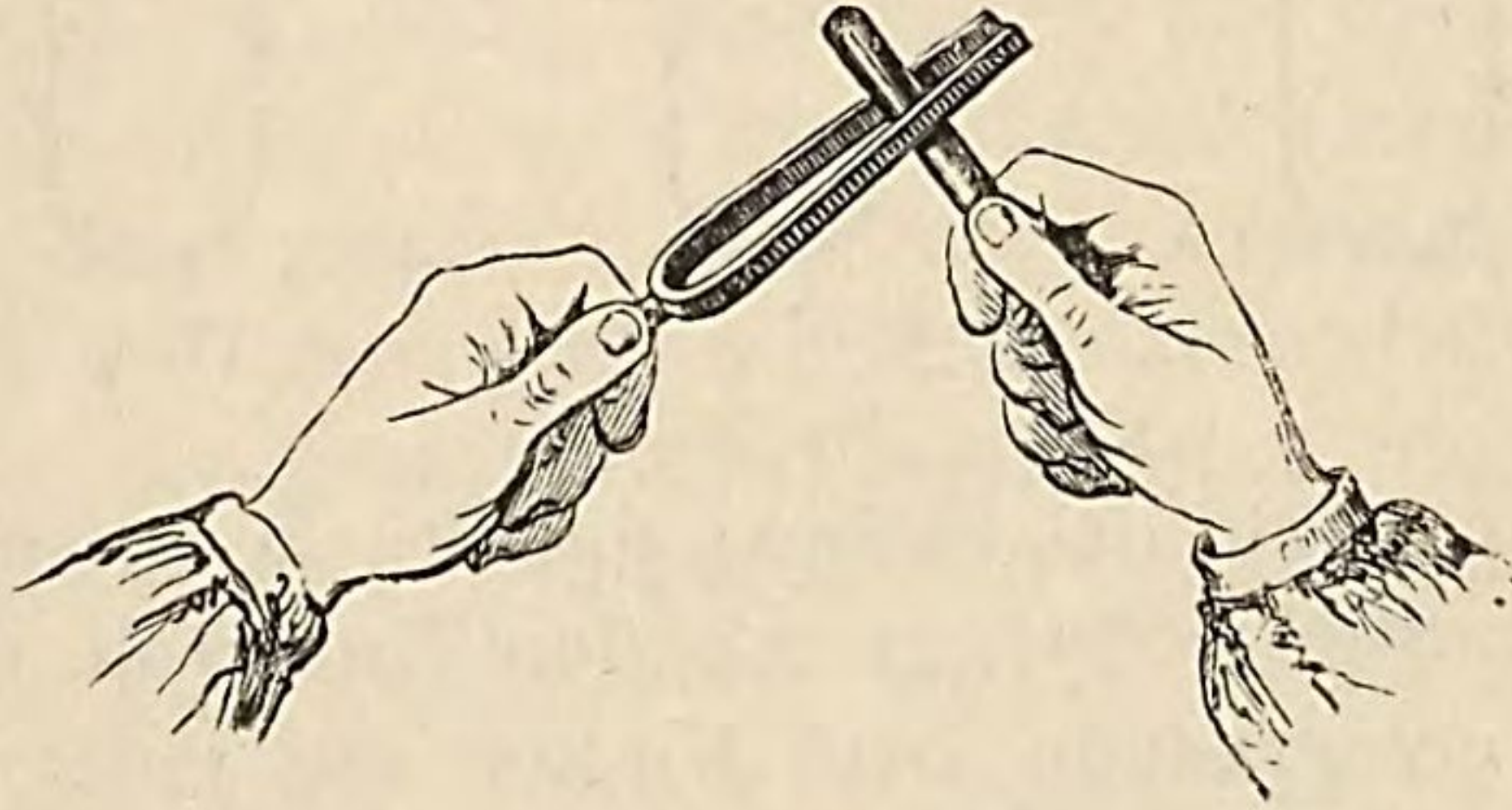


Fig. 106.

jede von ihnen verhält sich wie ein schwingender Stab, der an dem einen Ende frei und am anderen fest ist. Das feste Ende liegt da, wo sich die Zinken in dem bogenförmigen Mittelstück vereinigen.¹⁾

Die Höhe des Grundtons ist also von der Breite (wir bezeichnen immer die zur Schwingungsebene senkrechte Richtung in dieser Weise) unabhängig, der Dicke e direct und dem Quadrat der Länge L umgekehrt proportional,

$$N = K \frac{e}{L^2} \text{ } ^2)$$

K bezeichnet hier eine Constante,³⁾ die für Stahl ungefähr gleich 82000 ist, wenn als Einheit der Länge das Centimeter gewählt wird.

Die Obertöne folgen nach dem vorher angegebenen Gesetz

$$1 \quad 6\frac{1}{4} \quad 17\frac{1}{2} \quad 34\frac{1}{4} \quad 56\frac{1}{2} \quad \dots$$

auf einander.

¹⁾ Diese Anschauungsweise hatte Chladni nicht. Er betrachtete die Stimmgabel vielmehr als einen an beiden Enden freien Stab, der einfach gekrümmt ist. Aber das Gesetz für die Reihenfolge der Obertöne (v. Helmholtz) und die absolute Schwingungszahl des Grundtones (Mercadier) zeigen, dass die Vorstellung von Chladni nicht richtig ist.

²⁾ In dieser Formel muss man nach Mercadier L durch $1,012 l$ ersetzen, wo l die Projection der Medianlinie einer Zinke auf die Symmetrieebene der Gabel bezeichnet (Mercadier, C. R. 79, 1001 und 1069; 1874).

³⁾ Im Allgemeinen ist $K = 0,164 V$.

Die Stimmgabel zeigt die Systeme von Knoten und Bäuchen, wie sie die nebenstehenden Figuren darstellen. Giebt die Gabel den Grundton an, so entsteht ein Knoten an der Wurzel jeder

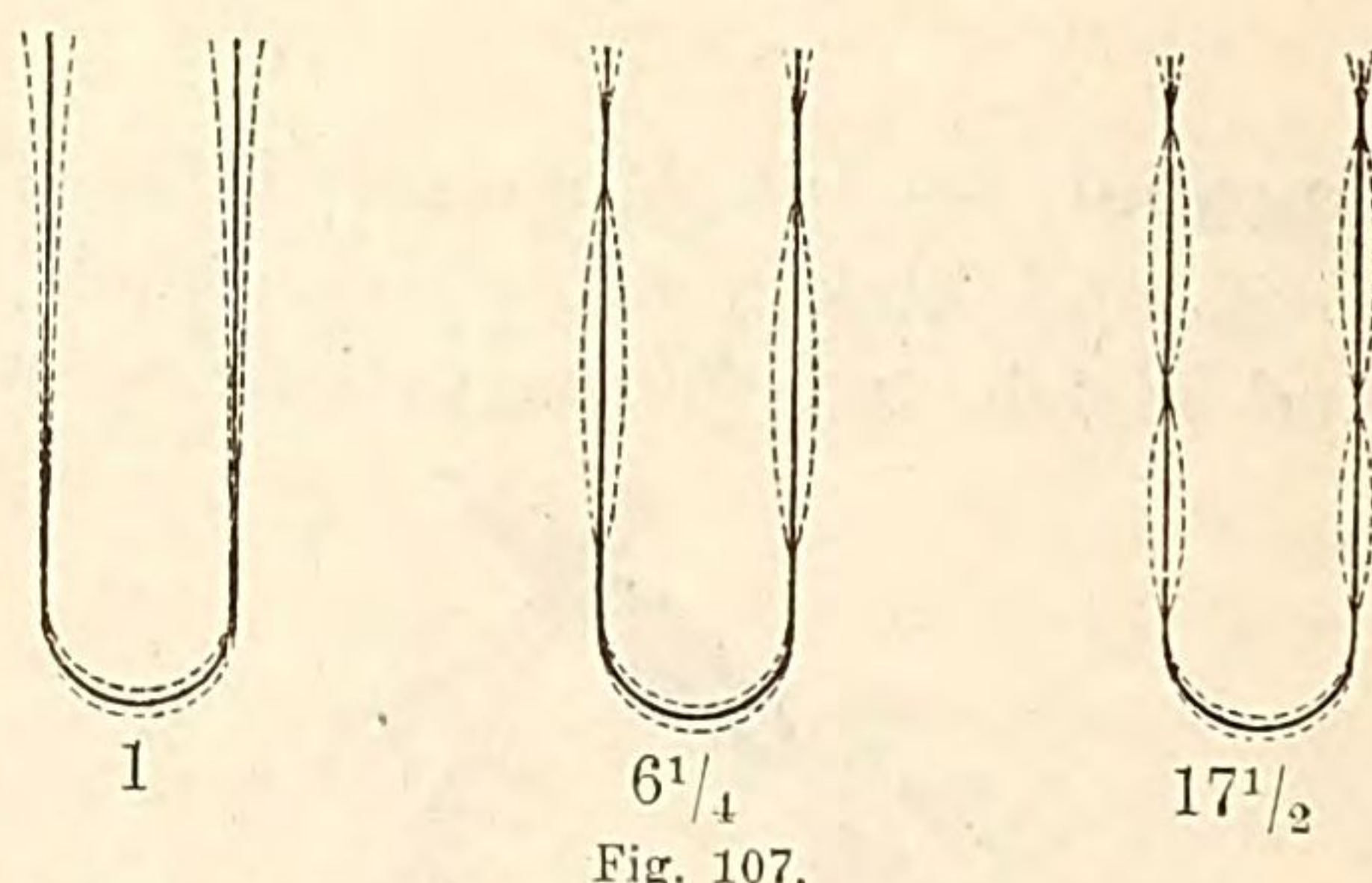


Fig. 107.

Zinke, am festen Ende des Stabes; das Stück zwischen den beiden Knoten und der Stiel schwingt mit den Zinken im Einklang. Dem ersten Oberton entsprechen zwei Knoten auf jeder Zinke¹⁾ u. s. w.

Die Obertöne sind nicht vollständig constant. Sie wechseln etwas je nach der Form der Gabel. Tyndall fand bei verschiedenen Gabeln für den ersten Oberton Werthe, die zwischen 5,8 und 6,6 liegen. Zwei scheinbar ganz gleiche Stimmgabeln, die genau denselben Grundton geben, liefern im Allgemeinen Schwebungen (386) für den ersten Oberton. Diese Schwebungen lassen sich sehr gut beobachten, wenn man jede Gabel derartig in Schwingungen versetzt, dass beide Töne gleichzeitig entstehen²⁾

¹⁾ Chladni hatte schon bemerkt, dass dem ersten Oberton, dessen Höhe er bestimmt hatte, im Ganzen 4 Knoten entsprachen und dass das System von 3 Knoten fehlt.

²⁾ Zu diesem Zweck streicht man die Stimmgabel abwechselnd am Ende und in der Mitte der Zinken an. Der Versuch gelingt besonders

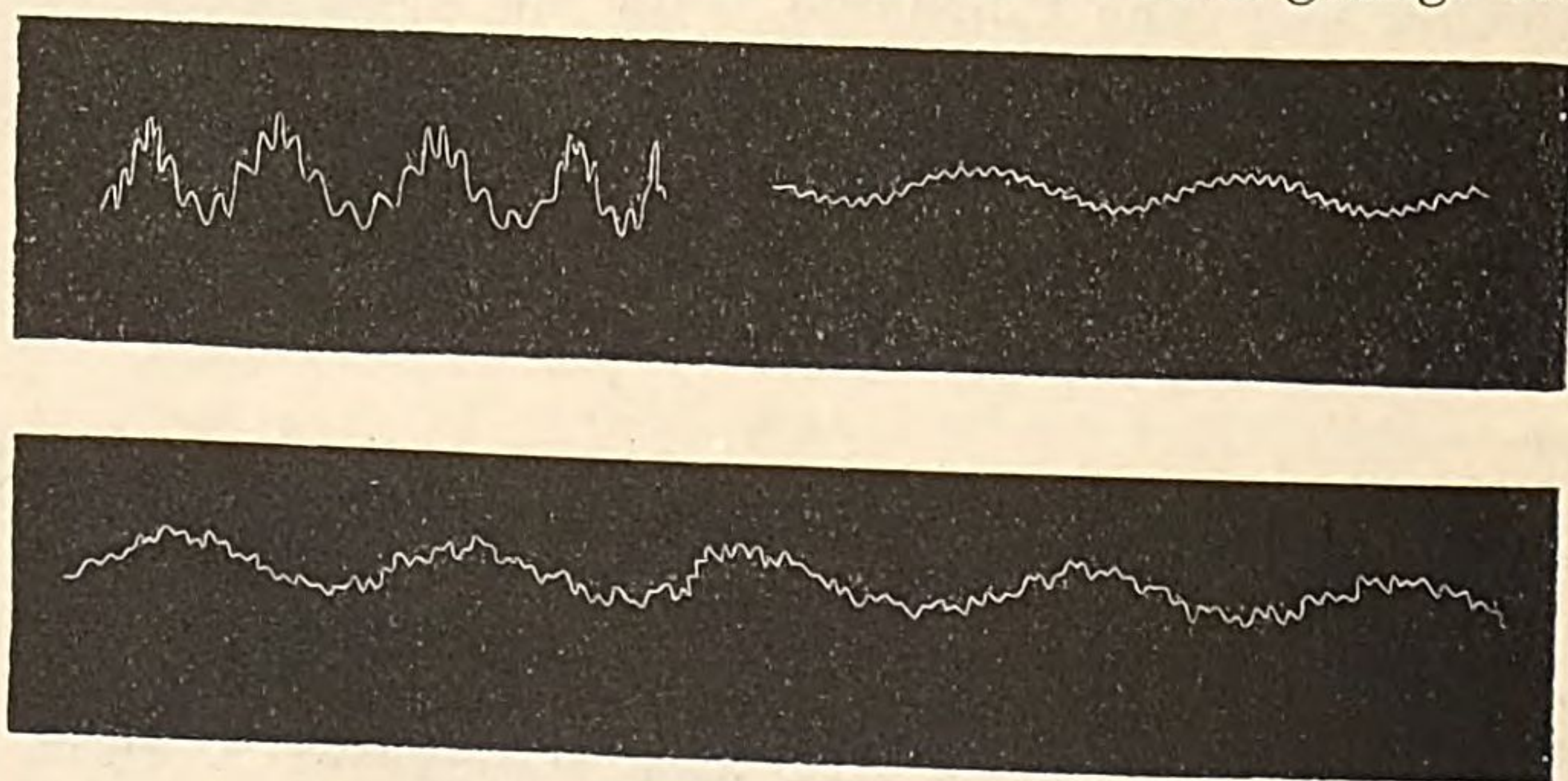


Fig. 108.

leicht bei einer Gabel mit dünnen Zinken, die ohne Schwierigkeit den Grundton und den zweiten Oberton oder selbst den Grundton und die beiden ersten Obertöne liefert, wie die obenstehenden Curven zeigen.

und sie darauf in einem Knoten des ersten Obertons berührt, der dann allein nachklingt. Wie auch die kleinen Unterschiede der Stimmgabeln beschaffen sein mögen, die Obertöne schwellen immer sehr schnell an, und das Ohr unterscheidet sie leicht von dem Grundton, der viel stärker ist.¹⁾ Sie verschwinden alsdann rasch, und es klingt bald nur noch ein einfacher Ton, nämlich der Grundton.

Die Stimmgabel bildet auf diese Weise einen wirklichen Maassstab für die Tonhöhe (327). Soll die Höhe des Stimmgabeltons vollständig bestimmt sein, so müssen die Schwingungen sehr klein bleiben (die Amplitude darf nie $\frac{1}{1000}$ der Zinkenlänge überschreiten); ferner darf sich die Temperatur nicht ändern. Meist werden die Stimmgabeln für die gewöhnliche Temperatur abgeglichen:²⁾ die Schwingungszahl einer Stimmgabel aus Stahl nimmt nämlich um $\frac{1}{8943}$ ab, wenn die Temperatur um 1° steigt (König).³⁾ Die Wirkung der Temperatur besteht hauptsächlich in einer Änderung der Elasticität, da der Einfluss der Ausdehnung verhältnissmässig gering ist.

Wird die Stimmgabel auf einen Resonanzkasten gesetzt, so kann dieser den Isochronismus und die Zahl der Schwingungen beeinflussen. Es ist dies der Fall, wenn der Eigenton des verstärkenden Systems dem Tone der Gabel sehr nahe liegt. Alsdann liefert die Stimmgabel, wenn sie mit dem Bogen angestrichen wird, einen sehr starken und schrillen Ton, der sehr schnell aufhört. Liegt der Eigenton des Resonanzkastens dagegen von dem der Gabel möglichst entfernt, ohne dass die Wirkung der Resonanz aufhört, so wird der Ton der Stimmgabel einfach verstärkt, erfährt aber keine Änderung in der Höhe und hält dabei lange Zeit an.⁴⁾

¹⁾ Man vermeidet vollständig den ersten Oberton, den einzigen, den man gewöhnlich hört, wenn man die Stimmgabel an dem Punkt anschlägt, wo dieser Ton einen Knoten hat.

²⁾ In Übereinstimmung mit den Beschlüssen der Wiener internationalen Stimmton-Conferenz wird die normale Stimmgabel für Deutschland von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt auf 435 Schwingungen bei 15 Grad abgestimmt. (Vgl. Bestimmungen über die Prüfung und Beglaubigung von Stimmgabeln, Z. f. Instrumentenkunde 9, 1—3; 1889.) Über die Methoden der Abstimmung siehe Leman, Über die Normalstimmgabeln der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und die absolute Zählung ihrer Schwingungen (Z. f. Instrumentenkunde 10, 77—87, 170—183, 107—202; 1890). — H.

³⁾ Also für $C = 64$ Schwingungen beträgt die Änderung für 1 Grad — 0,00715, für $c_1 = 256$ Schwingungen — 0,02860 Schwingungen.

⁴⁾ König, loc. cit. 180.

Der Isochronismus kleiner Stimmgabelschwingungen bei constanter Temperatur liefert einen werthvollen Zeitmesser (331). Für diese Anwendung ist es oft nützlich, die schwingende Bewegung, die von selbst ziemlich schnell aufhört, künstlich zu unterhalten. Zu diesem Zweck bedient man sich der Elektrizität: Lissajous,²⁾

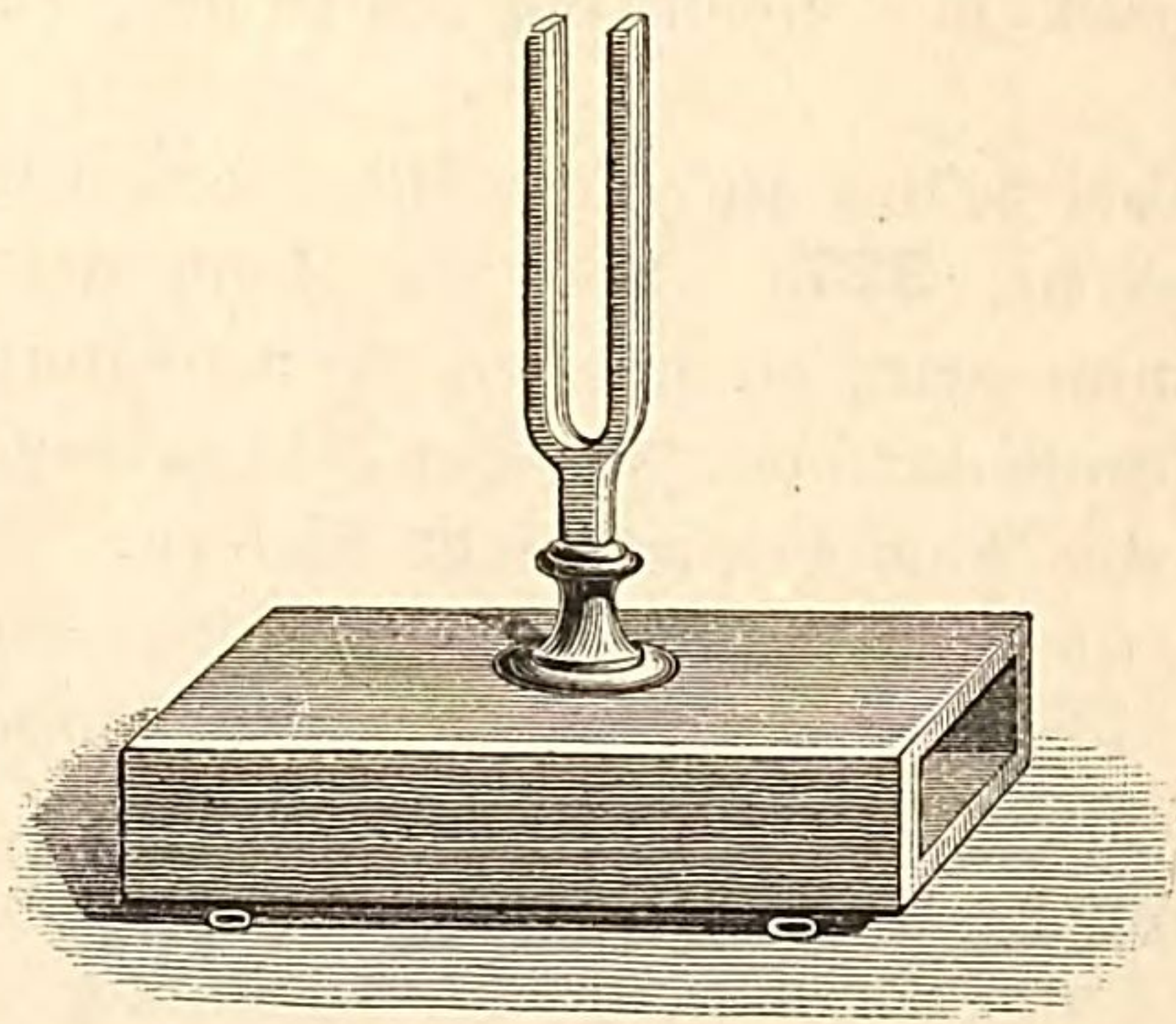


Fig. 109.

der zuerst dies Verfahren anwandte, brachte gegenüber der Stirnfläche jeder Zinke, die mit einem Contact versehen war, einen Elektromagneten an, dessen Strom periodisch von einer schwingenden Feder unterbrochen wurde. Die Schwingungsperiode des Unterbrechers war ein aliquoter Theil von der Periode der Stimm-

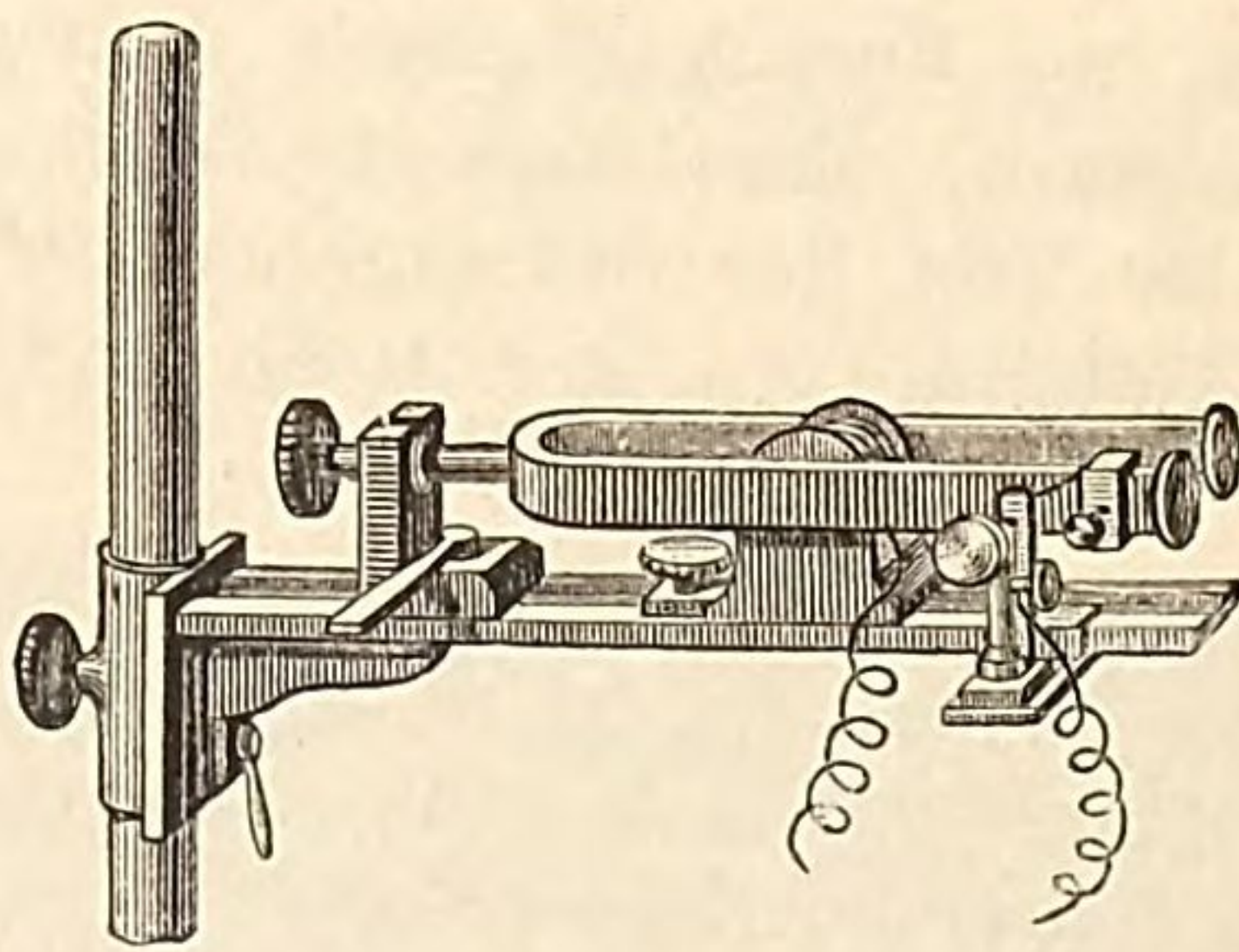


Fig. 110.

gabel. v. Helmholtz verwandte als Unterbrecher eine andere Stimmgabel von passender Tonhöhe. Gegenwärtig benutzt man zu diesem Zweck die Stimmgabel selbst und bringt nur einen einzigen Elektromagneten zwischen den Zinken an: die nebenstehende Figur stellt die elektrische Stimmgabel von Mercadier dar. Wenn man die Schwingungen einer Stimmgabel durch den

²⁾ Lissajous, Ann. de chim. et de phys. (3), 51, 147; 1857.

elektrischen Strom unterhält,¹⁾ ist es wesentlich, dass die Amplitude der schwingenden Bewegung, die gewöhnlich ziemlich gross ist, constant bleibt, damit der Isochronismus gewahrt wird. Jedenfalls ist es rathsam, gleichzeitig mit den Schwingungen der Stimmgabel die Secundenschläge einer astronomischen Uhr zu registriren, wie es Regnault that (346): man hat alsdann stets eine Controle über den Gang der Stimmgabel.

Man kann das Pendel einer Uhr auch durch eine Stimmgabel ersetzen. Diese Einrichtung wurde zuerst von Niaudet²⁾ getroffen und später von König³⁾ wieder aufgenommen, um eine normale Stimmgabel zu erhalten, deren Tonhöhe jederzeit genau bekannt ist. Um diese Tonhöhe zu bestimmen, braucht man nur die *Stimmgabeluhr* mit einem gewöhnlichen Chronometer zu vergleichen. Wir wollen annehmen, dass, wie es bei dem König'schen Apparat der Fall ist, die Stimmgabel, die auf das Hemmwerk der Uhr wirkt und bei jeder Schwingung einen leichten Anstoss empfängt, den Ton C mit 64 Schwingungen angiebt; wenn die Uhr alsdann in einer Stunde um 1 Secunde nachgeht, so macht die Stimmgabel $\frac{3599}{3600} \cdot 64 = 63,928$ Schwingungen in der

Secunde. Der Apparat ist ausserdem so eingerichtet, dass man jede Stimmgabel nach der Lissajous'schen Methode (347) mit ihm vergleichen kann.

382. Gleichzeitiges Auftreten von longitudinalen und transversalen Schwingungen in Stäben. — Wenn ein horizontaler Stab in longitudinale Schwingungen geräth, so bildet der auf seine obere Seite gestreute Sand Knoten, die nach Savart⁴⁾ folgende charakteristische Merkmale aufweisen: 1. die Knoten treten viel zahlreicher auf als es der longitudinalen Bewegung entspricht; 2. der Sand gleitet auf der Oberfläche des Stabes fort und springt nicht; 3. die Knoten wechseln auf den beiden entgegengesetzten Seiten ab, so dass sich der Sand, wenn man den Stab dreht und die unterste Seite nach oben kehrt, in der Mitte der Theile anhäuft, die vorher davon frei blieben.

¹⁾ Es ist bemerkenswerth, dass die elektromagnetische Einrichtung ihre ganze Wirkung dem Extrastrome verdankt, so dass der Strom nur während der Zeit geschlossen ist, wo sich die Stimmgabelzinke dem Elektromagnet nähert. (Lippmann, Bulletin des séances de la Société française de physique; 1885; S. 25).

²⁾ Niaudet, C. R. **63**, 991; 1866.

³⁾ König, Wied. Ann. **9**, 394; 1880; und Quelques expériences, 173.

⁴⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (3), **65**, 337; 1837.

Indem Savart die Entfernungen dieser Knotenlinien bestimmte, bewies er, dass der Zwischenraum zwischen zwei auf einander folgenden Knoten (die auf den beiden gegenüber liegenden Flächen liegen) in der Mitte des Stabes von dessen Breite unabhängig, aber den Quadratwurzeln aus der Dicke und Länge proportional ist.

Er schloss daraus, dass diese Knoten von einer transversalen Bewegung herrühren, diemit der longitudinalen Schwingung synchron verläuft. Die oben entwickelten Gesetze sind mit dieser Annahme in der That in Übereinstimmung. Betrachten wir z. B. das zweite Gesetz: die longitudinale Bewegung ist unabhängig von der Dicke, während die Schwingungszahl der transversalen Wellen ihr proportional ist: damit also beide Bewegungen synchron verlaufen, muss das Quadrat aus der Länge des Internodiums der Dicke proportional sein, da es der Schwingungszahl der transversalen Wellen umgekehrt proportional ist.

Um seine Hypothese zu stützen, stellte Savart folgenden Versuch an. Ruft man transversale Wellen in solcher Weise im Stabe hervor, dass man auf seiner oberen Seite das vollständige System der Knoten erhält, die bei der longitudinalen Bewegung auf beiden Seiten auftreten, so entsteht genau derselbe Ton wie im ersten Falle.

Tauchte ein rechteckiger Stab zur Hälfte seiner Länge in Quecksilber und wurde die andere Hälfte in longitudinale Schwingungen versetzt, so bemerkte Savart auf der Oberfläche des Quecksilbers eine Menge von transversalen Kräuselungen; diese waren durch ruhige Stellen unterbrochen, die mit den Knoten beider Seitenflächen zusammen fielen. Die Länge der transversal schwingenden Segmente ist also genau gleich der halben Entfernung zwischen zwei Knotenlinien auf einer der Seitenflächen.

Nachdem Savart auf diese Weise die Bedingungen der Erscheinung untersucht hatte, versuchte er es, sie zu erklären; aber hierbei war er weniger glücklich. Die ersten richtigen Vorstellungen hierüber hatte A. Seebeck;¹⁾ Terquem²⁾ nahm sie wieder auf und entwickelte sie weiter.

Entstehen die Knotenlinien Savart's nicht von selbst auf einem longitudinal schwingenden Stabe, so braucht man nach Terquem diesen Stab nur allmählich und sehr wenig zu verkürzen, wenn die Knoten erscheinen sollen. Diese Verkürzung

¹⁾ A. Seebeck, Dove's Repertorium, 8, 53; 1849.

²⁾ Terquem, Vibrations longitudinales des verges prismatiques (Diss.) Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

ändert nämlich kaum den longitudinalen Ton,¹⁾ erhöht dagegen schnell die transversalen Töne, so dass bald einer von ihnen mit dem longitudinalen Ton merklich in Einklang ist. Dies ist aber eben die Bedingung dafür, dass die Erscheinung auftritt.

Wir wollen annehmen, dass alsdann die longitudinalen und transversalen Schwingungen gleichzeitig stattfinden und untersuchen, was aus der Coexistenz dieser beiden synchron verlaufenden Bewegungen folgt. Es sei $ABA'B'$ (Fig. 111) ein longitudinaler Schnitt des Stabes, AB die obere Fläche und $A'B'$ die untere. Die longitudinale Schwingung des Stabes erzeuge den Grundton, und es sei NN' irgend ein transversaler Knoten, der nicht mit der Mitte des Stabes zusammenfällt. Alsdann erfahren zwei beliebige Moleküle m und m_1 , die auf verschiedenen Seiten von NN' liegen,

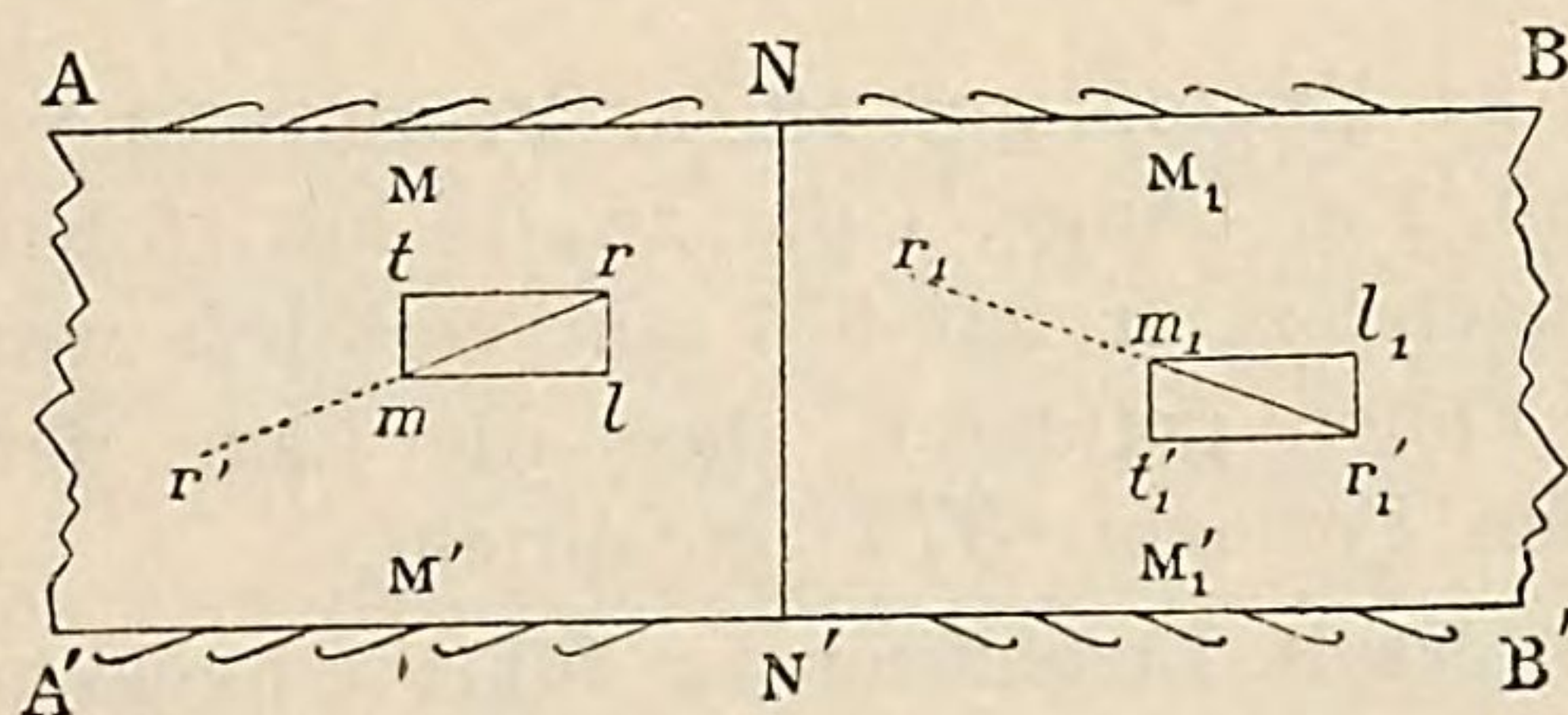


Fig. 111

durch die longitudinale Welle die Verschiebungen ml und m_1l_1 in demselben Sinne, durch die transversale Welle aber die Verschiebungen mt und m_1t_1' von entgegengesetzter Richtung; als Resultante entstehen die Verschiebungen mr und m_1r_1' , die eine halbe Periode später nach mr' und m_1r_1 fallen. Die beiden Moleküle schwingen also längs der Geraden rr' und $r_1'r_1$. Ebenso verhalten sich die Moleküle M, M_1 an der Oberfläche; Sand (oder besser durch Seide gesiebtes Bariumsulfat), der auf diese Punkte gestreut ist, wird nach N zu geschoben, wenn sich die Moleküle M, M_1 nach N hin bewegen, indem sie sich heben; er bleibt dagegen in Ruhe, wenn sich die Moleküle nach unten bewegen. Da die Bahnen der Moleküle sehr wenig gegen den Horizont geneigt sind und die Bewegung im horizontalen Sinne viel stärker ist als im verticalen, so gleitet der Sand nach N hin. Eine ähnliche Bewegung in entgegengesetzter Richtung entfernt den Sand von N' . Die Hälfte der Knoten wird auf die Weise auf einer Fläche aufgezeichnet, die andere Hälfte entsteht auf der entgegengesetzten Fläche in den Zwischenräumen der ersteren.

¹⁾ Es handelt sich hier nur um den Grundton; aber alles Gesagte passt auch auf einen beliebigen longitudinalen harmonischen Oberton.

Die Knoten können sich ausserdem noch auf zwei verschiedene Arten bilden, je nachdem der transversale Ton, der mit dem longitudinalen im Einklang ist, einer geraden oder ungeraden Anzahl von Knoten entspricht. Die beiden nebenstehenden Figuren zeigen diese zwei verschiedenen Arten, wie sie Terquem erhielt;

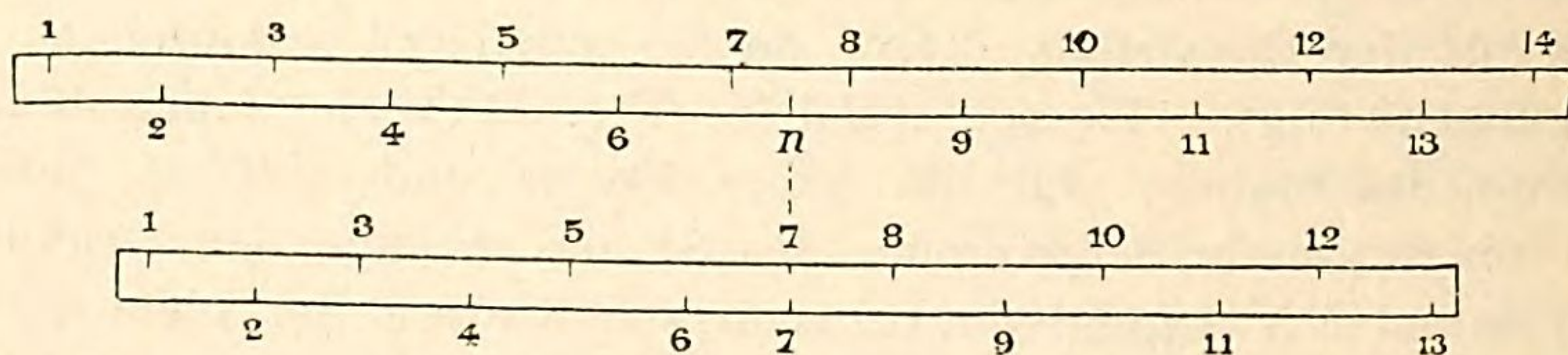


Fig. 112.

die erste mit 14 Knoten auf einem Messingstabe von ungefähr 6 mm Dicke und 1 m Länge,¹⁾ die zweite mit 13 Knoten auf demselben Stabe, nachdem er auf 857 mm verkürzt war. Terquem hat in beiden Fällen gefunden, dass die Lage der Knoten den Lissajous'schen Formeln (377) entspricht.

Eine transversale Erschütterung führt umgekehrt eine longitudinale Bewegung herbei, wenn die Perioden nahezu gleich sind: die Knoten wechseln alsdann in derselben Weise auf den beiden Flächen ab, aber in umgekehrter Richtung.

Bemerkenswerth ist es, dass die Bewegung nur andauert, wenn die Perioden der beiden zu einander rechtwinkligen Wellen annäherungsweise gleich sind und dass jede Erschütterung unmöglich wird, wenn der longitudinale Ton mit einem transversalen harmonischen Oberton genau im Einklang ist.

Das gleichzeitige Auftreten der beiden Bewegungsarten erklärt ferner den „heiseren Ton“, den Savart beobachtete, wenn ein langer und dünner Stab heftig im longitudinalen Sinne erschüttert wird; er hörte alsdann die tiefere Octave des longitudinalen Tons. Es ist dies ein transversaler Ton, der nur entsteht, wenn die transversale Bewegung einen Ton hervorrufen kann, der der tieferen Octave des longitudinalen Tons merklich nahe kommt. Der Sand vollführt alsdann eine ziemlich verwickelte Bewegung, da jedes Molecül eine Lissajous'sche lemniskatenartige Curve beschreibt.

¹⁾ In diesem Falle kann man auch an Stelle des mittleren Knotens n die beiden Knoten 7 und 8 erhalten, was alsdann auf derselben Fläche die vier auf einander folgenden Knoten 6, 7, 8, 9 bedingt.

III. Drehende Schwingungen.

383. Drehende Schwingungen. — Bei dieser Art von Schwingungen beschreibt jedes Molecül einen kleinen Kreisbogen um die Achse des Stabes. Man kann sie dadurch hervorrufen, dass man mit dem Bogen senkrecht zur Achse des Stabes streicht. Sand, den man auf die Oberfläche des Stabes streut, zeichnet eine Knotenlinie auf der ganzen Länge, die von einer gewissen Anzahl transversaler Knotenlinien geschnitten wird. Die letzteren werden durch die Änderungen des Drehungssinnes hervorgerufen: der Sand bleibt an diesen Stellen in Ruhe, geht aber von den benachbarten Punkten nicht dorthin. Dagegen häuft er sich auf der longitudinalen Knotenlinie, wohin er durch die Bewegung der Ränder getrieben wird.

Der Stab kann hierbei an beiden Enden frei oder fest sein, oder an dem einen Ende fest und an dem andern frei. Chladni¹⁾ hat gefunden, dass in allen diesen Fällen die Lage der transversalen Knoten und die Reihenfolge der Obertöne dieselben waren wie bei den longitudinalen Schwingungen, nur dass der Ton um eine Quinte tiefer war als bei der entsprechenden longitudinalen Bewegung. Wertheim²⁾ bestimmte das Intervall zu 1,63 für einen quadratischen oder cylinderförmigen Stab; ist der Stab rechteckig, so verändert sich der Werth mit der Dicke und Breite.

Terquem³⁾ fand, dass in dem letzteren Falle die drehenden Schwingungen in Verbindung mit longitudinalen auftreten können; die Bedingung hierfür besteht immer darin, dass die beiden verschiedenen Arten von Schwingungen merklich denselben Ton erzeugen. Man beobachtet alsdann eine abwechselnde Lage der Knoten, die sich wie oben erklärt,

Endlich können die drehenden Schwingungen oft mit den transversalen zusammenfallen: die Knotenlinien werden alsdann geneigt und können sogar stetige Curven bilden, die sich über die ganze Länge des Stabes erstrecken.

In den Pfeifen lagern sich diese verschiedenen Arten von Schwingungen leicht über einander und erzeugen Spiralen, die schon viel früher von Savart⁴⁾ beschrieben worden sind.

¹⁾ Chladni, Neue Schriften der Berliner Gesellschaft naturforschender Freunde, 1799; und *Traité d'acoustique*, S. 110.

²⁾ Wertheim, *Ann. de chim. et de phys.*, (3), 50, 258; 1857.

³⁾ Terquem, *loc. cit.*

⁴⁾ Savart, *Ann. de chim. et de phys.*, (2), 65, 337; 1837.

Achtes Capitel.

Membranen und Platten.

I. Membranen.

384. Membranen. — *Definition.* — In der Akustik macht man zwischen Membranen und Platten denselben Unterschied wie zwischen Saiten und Stäben.

Theoretisch betrachtet ist die Membran eine *feste, unendlich dünne und vollkommen biegsame Lamelle*, deren Spannung nach allen Richtungen hin so stark ist, dass sie bei kleinen Deformationen merklich constant bleibt.

Die transversalen Schwingungen einer an ihrem Umfang befestigten Membran sind theoretisch und experimentell sorgfältig untersucht.

Theorie. — In seiner Abhandlung über die schwingende Bewegung der Trommeln stellte Euler¹⁾ zuerst die Gleichung der schwingenden Membran auf, die er als ein Gewebe aus rechtwinklig sich kreuzenden elastischen Fäden auffasste. Später leitete Poisson²⁾ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

mit grösserer Strenge ab; w bezeichnet hier die unendlich kleine Verschiebung eines Punktes $(x, y, 0)$, die rechtwinklig zu der ursprünglich eben gedachten Fläche erfolgt, T bedeutet die Spannung für die Längeneinheit (**219**) und μ die Masse der Membran, die auf die Einheit der Oberfläche kommt. Weil wir die normale

¹⁾ Euler, *Novi commentarii Academiae Petropolitanae*, **10**, 343; 1797. Siehe auch Riccati, *Saggi scient. e litter. dell' Accademia di Padova*, **1**, 414; 1786.

²⁾ Poisson, *Mémoires de l'Académie des sciences*, **8**; 1829.

Componente der Spannung kennen (220), so lässt sich durch eine ähnliche Schlussfolgerung, wie wir sie für die schwingende Saite angestellt haben (372), diese Formel leicht ableiten.

Poisson hatte die Untersuchung für den Fall einer rechtwinkligen Membran fast vollständig durchgeführt,¹⁾ für eine kreisförmige Membran beschränkte er sich dagegen auf Schwingungen, die für sämtliche Radien gleich verlaufen. Die grosse Abhandlung von Kirchhoff²⁾ über schwingende Platten lieferte thatsächlich die Lösung für das Problem der kreisförmigen Membran, das von Clebsch³⁾ vollständig behandelt wurde.⁴⁾ Mathieu⁵⁾ hat die Theorie der elliptischen Membran entwickelt.

Versuche. — Seit 1826 untersuchte Savart⁶⁾ die Erscheinung experimentell mittelst der Klangfiguren, die Chladni mit so grossem Erfolg bei den Platten angewandt hatte. Die Membran, die auf einen festen Rahmen gespannt ist, wird neben einer Pfeife aufgestellt, deren Ton zwei oder drei Octaven tiefer ist als der Grundton der Membran. Savart fand sofort die Ähnlichkeit zwischen den Klangfiguren einer Membran und denen einer Platte von derselben Form; aber er glaubte zu bemerken, dass die Figuren der Membran im Gegensatz zu denen der Platten stetig in einander übergehen, wenn er die Höhe des Pfeifentons, dem die Membran immer entsprach, mittelst eines Kolbens allmählich änderte.

Quadratische Membranen.

Bourget und Bernard⁷⁾ haben die Untersuchung Savart's für die quadratischen Membranen wieder aufgenommen. Sie suchten die Spannung nach allen Richtungen gleich zu machen und erregten jede Membran mittelst einer Orgelpfeife, die wenigstens eine Octave höher abgestimmt war als der Grundton der Membran.

¹⁾ Lamé vereinfachte in seinen „Leçons sur la théorie de l'élasticité“ die Methode und dehnte sie auf die quadratische und auf die gleichseitige dreieckige Membran aus.

²⁾ Kirchhoff, Crelle's Journal, **40**, 51; 1850.

³⁾ Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Karlsruhe; 1862.

⁴⁾ Bourget hat in den Annales de l'École normale (1), **3**, 55; 1866 die Theorie kreisförmiger Membranen mit eingehenden numerischen Tabellen veröffentlicht.

⁵⁾ Mathieu, Journal de Liouville (2), **13**; 1868 und Cours de physique mathématique, S. 122.

⁶⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), **32**, 384; 1826.

⁷⁾ Bourget und Bernard, Ann. de chim. et de phys. (3), **60**, 449; 1860.

Papier lieferte die besten Ergebnisse; man brauchte es nur vor dem Aufkleben auf die Ränder des Rahmens mehr oder weniger anzufeuchten, um eine grössere oder geringere Spannung zu erhalten. Ausserdem lässt sich leicht erkennen, ob diese Spannung gleichmässig ist: wir wollen annehmen, dass auf der Membran unter der Einwirkung einer passenden Pfeife das System von Knotenlinien entsteht, das aus fünf dem einen Seitenpaar parallelen

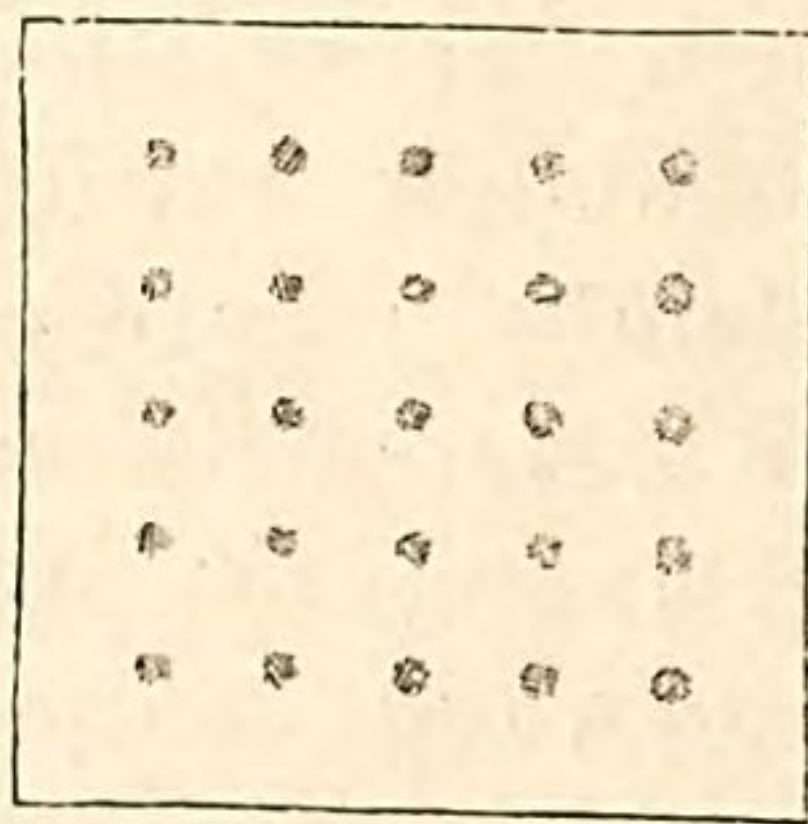


Fig. 113.

Linien besteht; ist die Spannung nun nach allen Richtungen dieselbe, so erhält man bei der geringsten Änderung in der Lage der Membran über der Pfeife das System, das dem anderen Seitenpaar parallel ist; beide Systeme sind sehr wenig stabil, und da die Membran abwechselnd auf die eine oder andere Art schwingt, so sammelt sich der Sand in kleinen Häufchen in den Punkten an, die in beiden Fällen in Ruhe bleiben: diese Anordnung der Sandhügeln in Vierecken ist also ein Beweis für eine gleichmässige Spannung.

Nach der Theorie entspricht jedem der möglichen Töne eine unendliche Mannigfaltigkeit von Systemen der Knotenlinien, die man durch stetige Änderungen in einander überführen kann, wenn man die Art der Erschütterung variirt, ohne den Ton zu ändern. Der einfachste Typus eines jeden Systems wird von Parallelen zu den Seiten gebildet: man bezeichnet ihn mit dem Zeichen $\frac{h}{k}$, wo h und k die Anzahl der Geraden bedeuten, die beziehungsweise den beiden Seitenpaaren parallel sind.¹⁾ Bourget und Bernard haben gefunden, dass die Klangfiguren der rechteckigen Membranen in Typen zerfallen, die von den zu den Seiten parallelen Geraden gebildet werden, wie Chladni es schon für die Platten bewiesen hatte. Fig. 114 zeigt einige Formen des Typus 1/0.

¹⁾ Die Systeme (1/1), (2/2), (3/3), ... (h/h) können nur eine einzige Form haben.

In Übereinstimmung mit den Vorstellungen von Chladni und im Gegensatz zu der Auffassung von Savart haben sie gefunden, dass die Typen vollständig von einander getrennt sind. Diese Trennung ist bei den ersten Tönen sehr auffällig. Nimmt man eine Pfeife, die den Grundton der Membran angiebt (diesen Ton erhält man leicht, wenn man sie mit einem kleinen Hammer anschlägt) und verlängert die Pfeife mit Hülfe eines beweglichen Ansatzes, so dass die Tonhöhe sinkt, so bleibt der Sand auf der Membran unbeweglich; verkürzt man dagegen die Pfeife allmählich, so geräth der Sand in lebhafte Bewegung, sobald der Ton der Pfeife mit dem der Membran übereinstimmt; in diesem Falle

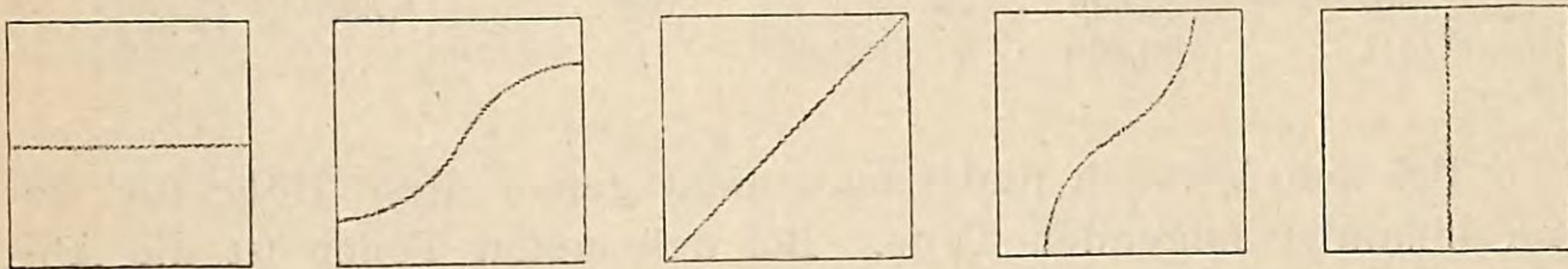


Fig. 114.

wird auch der Pfeifenton durch die Membran verstärkt. Wenn man die Pfeife noch weiter verkürzt, so dass der Ton allmählich höher wird, so gelangt der Sand wieder zur Ruhe.¹⁾ Es erscheint alsdann die Knotenlinie $1/0$, die dem ersten Oberton entspricht u. s. w. Es ist jedoch zu bemerken, dass es für jede Figur ein gewisses Intervall giebt (das für den Grundton zwei ganze Töne betragen kann), in dem die Membran mehr oder weniger gut schwingt, so dass man praktisch von der dritten Octave an, wo die Eigentöne der Membran einander schon sehr nahe liegen (vergl. die Tabelle unten) mit Savart sagen kann, dass die Membran auf alle Töne anspricht; der Übergang von der einen Figur zur anderen bewirkt eine leichte Störung, die das einzige Anzeichen für die Unstetigkeit bildet.

Wenn man die Schwingungszahl des Grundtons als Einheit nimmt, so bedeuten die Zahlen in der folgenden Tabelle nach Poisson alle Töne, die die Membran liefert: daneben steht auf der einen Seite die Anzahl der Knotenlinien, auf der anderen die

¹⁾ Man kann den Versuch auch umkehren: Man wählt zu diesem Zwecke eine Pfeife, deren Ton höher als der der Membran ist und erwärmt die letztere, so dass sie momentan einen höheren Ton giebt als die Pfeife. Bringt man alsdann die Membran an die Mündung der Pfeife, so bleibt der Sand unbeweglich. Kommen aber in Folge der Abkühlung beide in Gleichklang, so bewegt sich der Sand lebhaft; darauf kommt er wieder zur Ruhe, da die Membran jetzt einen tieferen Ton hat als die Pfeife.

musikalische Bezeichnung für den betreffenden Ton, wenn *C* als Grundton angenommen wird.

Knotenlinien	Entsprechende Töne		Knotenlinien	Entsprechende Töne	
0/0	1	<i>C</i>	3/3	4	<i>c</i> ₁
1/0	1,581	<i>Gis</i>	4/2	4,123	<i>c</i> ₁ +
1/1	2	<i>c</i>	5/0	4,301	<i>cis</i> ₁ +
2/0	2,236	<i>d</i> —	5/1	4,472	<i>d</i> ₁ —
2/1	2,550	<i>e</i> +	4/3	4,528	<i>d</i> ₁ +
3/0	2,915	<i>g</i> —	5/2	4,743	<i>dis</i> ₁ —
2/2	3	<i>g</i>	6/0=4/4	5	<i>e</i> ₁
3/1	3,161	<i>gis</i>	5/3	5,099	<i>e</i> ₁ +
3/2	3,536	<i>ais</i>	6/1	5,147	<i>e</i> ₁ +
4/0	3,606	<i>ais</i> +	6/2	5,385	<i>f</i> ₁ +
4/1	3,808	<i>h</i>	.	.	.

Bei dem Versuch findet man nicht genau diese Höhe für die auf einander folgenden Töne. Bei den ersten Tönen ist die Abweichung bedeutender, tritt aber bei starkem Papier weniger hervor. Es liegt dies ohne Zweifel daran, dass, wie Lord Rayleigh meint, die hauptsächlichste Störung durch den Widerstand der Luft verursacht wird.

Kreisförmige Membranen.

Bourget¹⁾ hat ferner die kreisförmigen Membranen untersucht und ist hier zu ähnlichen Schlussfolgerungen gekommen, wie wir sie soeben für die quadratischen Membranen besprochen haben.

In Übereinstimmung mit der Theorie sind die Knotenlinien entweder Kreise oder Durchmesser, die gleiche Winkel mit einander einschliessen, oder Combinationen beider. Sie sind vollständig regelmässig, wenn die Membran gut aufgespannt ist und zeigen genau die von der Theorie geforderten Dimensionen, wenigstens soweit man diese bei der Dicke der Linien messen kann.

Die folgende Tabelle, die der Abhandlung von Bourget entlehnt ist, enthält die einfachsten Knotenlinien und die entsprechenden theoretischen Töne (die beobachteten Töne weichen davon um Grössen von derselben Ordnung ab, wie es bei den quadratischen Membranen der Fall war).

¹⁾ Bourget, loc. cit.

	0 Durchmesser		1 Durchmesser		2 Durchmesser		3 Durchmesser		4 Durchmesser	
	Radien der Knoten- kreise	Ent- sprechende Töne	Radien der Knoten- kreise	Ent- sprechende Töne	Radien der Knoten- kreise	Ent- sprechende Töne	Radien der Knoten- kreise	Ent- sprechende Töne	Radien der Knoten- kreise	Ent- sprechende Töne
0 Kreis		1,000 <i>C</i>		1,594 <i>Gis</i> —		2,136 <i>cis</i>		2,653 <i>f</i> —		3,156 <i>gis</i> +
1 Kreis	0,436	2,296 <i>d</i> +	0,546	2,918 <i>g</i> —	0,610	3,501 <i>ais</i> —	0,654	4,060 <i>c</i> ₁ +	0,686	4,602 <i>d</i> ₁ +
2 Kreise	{0,278} {0,638}	3,600 <i>ais</i> +	{0,377} {0,690}	4,231 <i>cis</i> ₁	{0,442} {0,724}	4,833 <i>dis</i> ₁ +	{0,490} {0,750}	5,414 <i>f</i> ₁ +	{0,528} {0,770}	5,979 <i>g</i> ₁
3 Kreise	{0,204} {0,468} {0,734}	4,905 <i>e</i> ₁ +	{0,288} {0,527} {0,764}	5,542 <i>fis</i> ₁ —	{0,348} {0,569} {0,785}	6,155 <i>gis</i> ₁ —	{0,393} {0,602} {0,802}	6,748 <i>a</i> ₁ +	{0,431} {0,627} {0,816}	7,328 <i>ais</i> ₁ —
4 Kreise	{0,161} {0,370} {0,580} {0,790}	6,211 <i>gis</i> ₁ —	{0,233} {0,426} {0,618} {0,809}	6,851 <i>a</i> ₁ +	{0,287} {0,469} {0,647} {0,824}	7,471 <i>h</i> ₁ —	{0,329} {0,503} {0,671} {0,836}	8,074 <i>c</i> ₂ +	{0,364} {0,531} {0,691} {0,846}	8,663 <i>cis</i> ₂ +

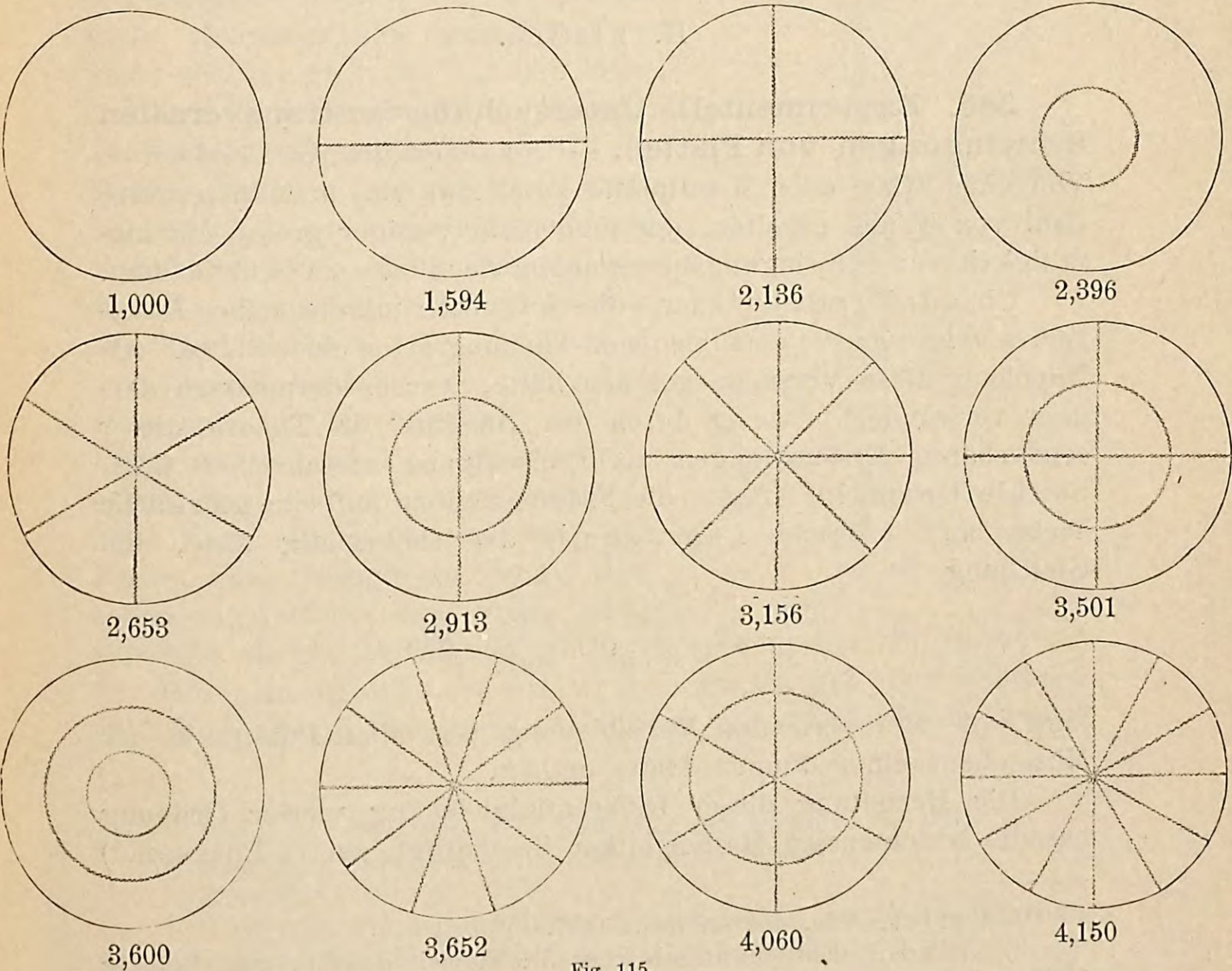


Fig. 115.

Anwendungen. — Die Membranen werden in der Musik verwendet (als *Trommeln*, *Pauken* und ähnliche Schlaginstrumente). Das musikalische Organ der Cikade ist eigentlich eine Trommel

mit zwei trocknen convexen Häuten, die das Insekt ertönen lässt, indem es plötzlich und gleichzeitig zwei grosse Muskeln zusammenzieht, die sich vom Mittelpunkt dieses Instrumentes bis zu jeder der Membranen erstrecken.¹⁾ Im menschlichen Ohr werden die äusseren Schwingungen zuerst von einer Membran (Trommelfell) aufgenommen, die mit jedem beliebigen Ton im Gleichklang schwingen zu können scheint; es ist jedoch zu bemerken, dass sich die Spannung des Trommelfells mit Hülfe einer Reihe von Knochen in weiten Grenzen ändern lässt. Der Physiker benutzt fortwährend die Membranen, um die Töne aufzufangen; wir begnügen uns damit, hier auf das Phonautoskop von Scott (331) und die Empfangsapparate von Regnault (346) zu verweisen.

II. Platten.

385. Experimentelle Untersuchung der transversalen Schwingungen von Platten. — *Schwierigkeiten des Problems.* — Von einer Glas- oder Metallplatte kann man eine unendlich grosse Zahl von Tönen erhalten, der eine nicht weniger grosse Mannigfaltigkeit von Schwingungsbewegungen der Platte zu Grunde liegt.

Chladni²⁾ erhellte zuerst dieses Dunkel; mittelst seiner *Klangfiguren* zeigte er die verschiedenen Theilungsarten einer Platte. Als Napoleon diese Versuche gesehen hatte, war er dermaassen darüber verwundert, dass er durch das „Institut“ die Theorie dieser sonderbaren Erscheinungen als Preisaufgabe ausschreiben liess: Sophie Germain³⁾ fasste die Frage offenbar auf eine glückliche Weise an, während Lagrange,⁴⁾ der sie richtig löste, die Gleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial^4 x} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = F(x, y)$$

fand, die die verticalen Verschiebungen w aller Punkte in der Mittelebene einer dünnen Platte enthält.

Die Herleitung dieser Differentialgleichung vierter Ordnung hat die bedeutensten Mathematiker beschäftigt, zuerst Poisson,⁵⁾

¹⁾ Carlet, Ann. des sc. nat.; 1877.

²⁾ Chladni, Entdeckungen über die Theorie des Klanges; Leipzig 1787 und Traite d'acoustique, 120.

³⁾ Sophie Germain, Mémoires de l'Institut, 1810.

⁴⁾ Lagrange fand diese Gleichung 1811, veröffentlichte sie indessen nicht; man fand sie in seinem Nachlass, aber ohne Beweis, im Jahre 1813.

⁵⁾ Poisson, Mémoires de la 1^{re} classe de l'Institut pour l'année 1812.

darauf Poisson¹⁾ nochmals und gleichzeitig Cauchy,²⁾ ferner Kirchhoff³⁾ und seinen Schüler Gehring,⁴⁾ dann Clebsch⁵⁾ und Boussinesq;⁶⁾ die Richtigkeit der Gleichung ist freilich niemals bestritten worden, aber die Grenzbedingungen haben lebhaft Discussionen hervorgerufen. Nach Poisson müssen drei verschiedene Gleichungen in jedem freien Punkte des Randes erfüllt werden. Kirchhoff hat dagegen gezeigt, dass im Allgemeinen diese drei Gleichungen nicht gleichzeitig befriedigt werden können: in dem Fall jedoch, wo es sich um die symmetrischen Schwingungen einer kreisförmigen Platte handelt, ist eine der Gleichungen identisch erfüllt, so dass die Schlussfolgerungen Poisson's in Bezug auf diese Schwingungen gerechtfertigt sind; aber es giebt in Wahrheit hier nur zwei Gleichungen für den Rand. Diese Anschauungsweise ist auf Widerspruch gestossen: Mathieu⁷⁾ und M. Levy⁸⁾ haben die Gültigkeit der Kirchhoff'schen Folgerungen bestritten; trotzdem haben diese die Oberhand behalten.

Versuchsanordnung. — Um die transversalen Schwingungen einer Platte experimentell zu untersuchen, spannt man sie entweder zwischen zwei Kegel aus Kork, die an den Backen einer besonderen Zange, der sogenannten *Plattenzange*, sitzen, oder man hält die Platte zwischen den Fingern, wenn sie nicht zu schwer ist, oder man befestigt sie, was weniger gut ist, mit einer Schraube auf einem Träger, wie es die Abbildung von verschiedenen Platten

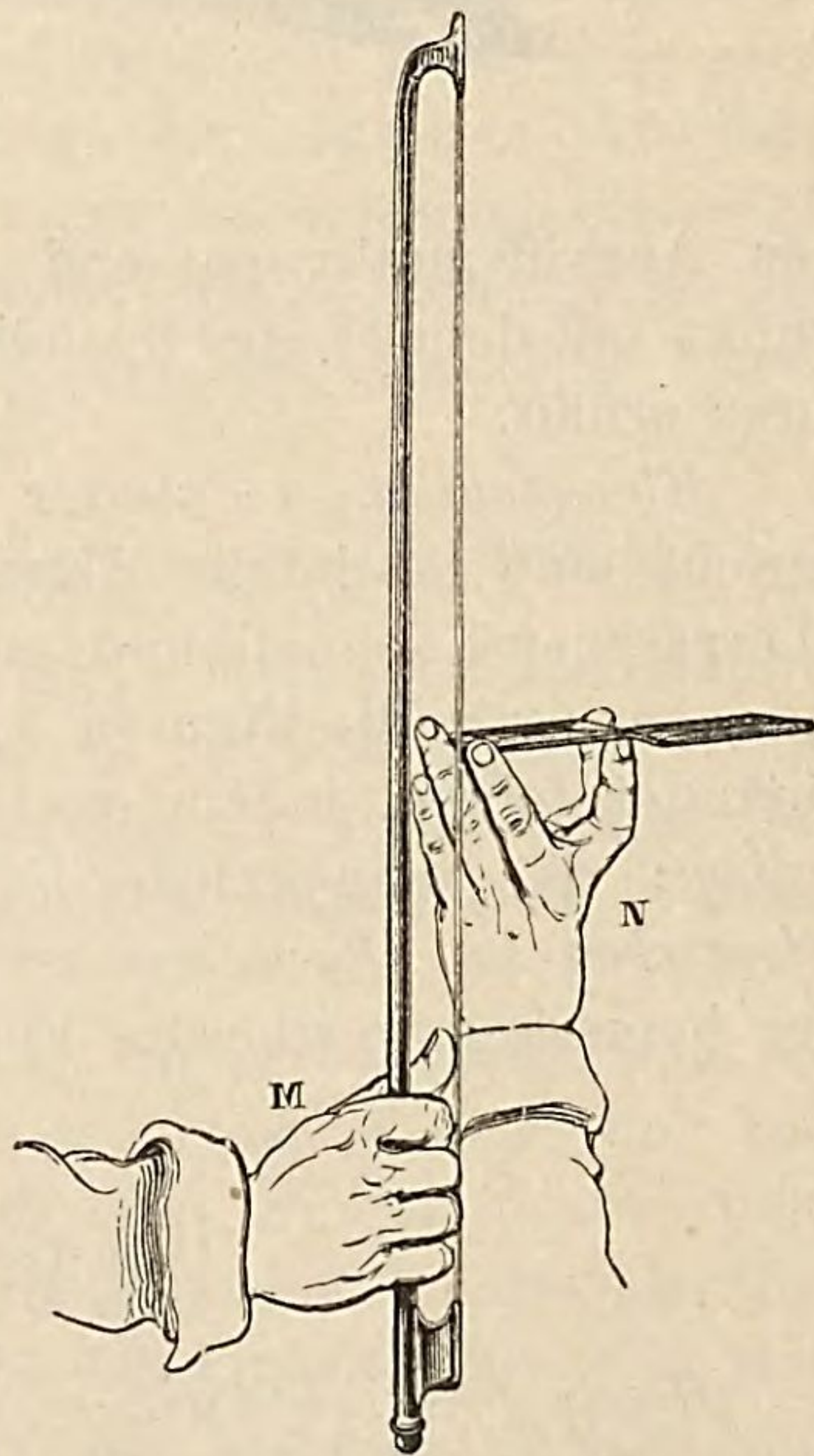


Fig. 116.

¹⁾ Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences, **8**; 1829.

²⁾ Cauchy, Exercices de mathématiques, **3**, 328; 1829.

³⁾ Kirchhof, loc. cit.

⁴⁾ Gehring, De aequationibus differentialibus quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur (Diss.), Berlin; 1852.

⁵⁾ Clebsch, loc. cit.

⁶⁾ Boussinesq, Journal de Liouville (2), **16**, 125 und (3), **5**, 163 und 329; 1871—79.

⁷⁾ Mathieu, Journal de Liouville, (2), **14**, 241; 1869.

⁸⁾ M. Levy, Journal de Liouville (3), **3**, 219; 1877.

auf einer Bank zeigt (Fig. 117). Man streut etwas Sand auf die Oberfläche und streicht den Rand mit dem Bogen an, indem man

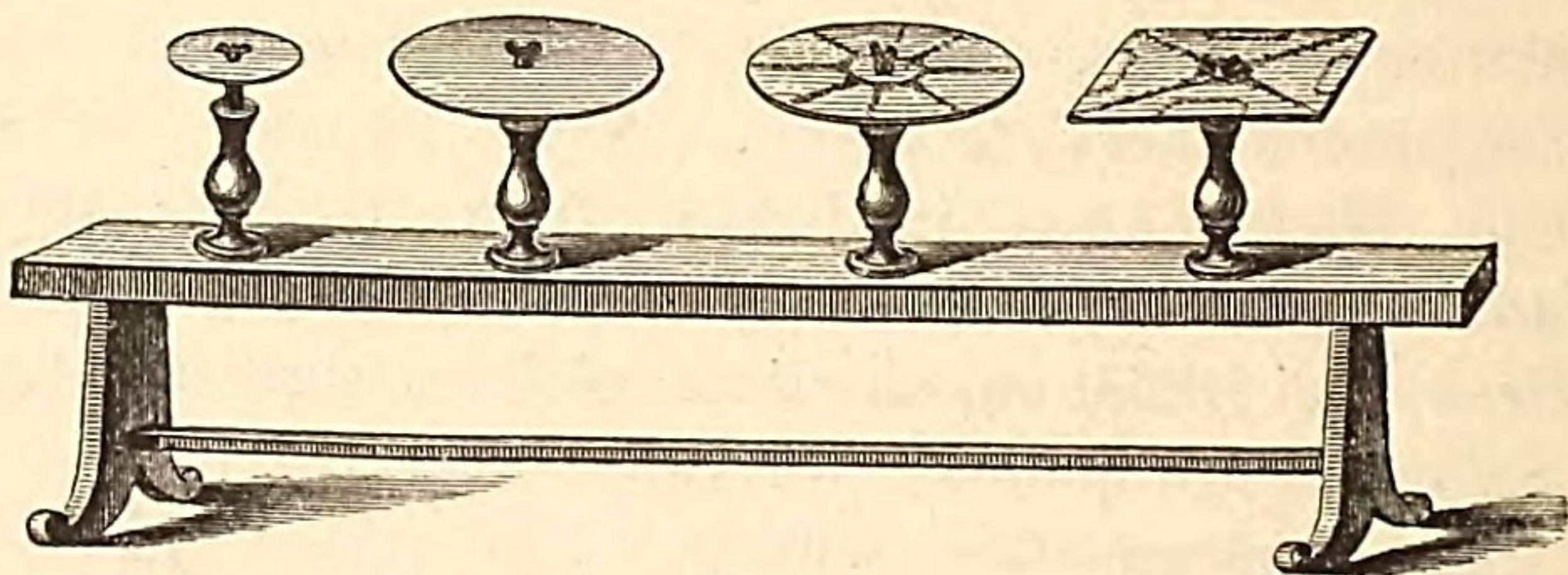


Fig. 117.

den Angriffspunkt passend wählt und einen beliebigen anderen Punkt mit dem Finger festhält, so dass man die gewünschte Klangfigur erhält.

Klangfiguren. — Jeder Schwingungsweise einer Platte entspricht eine bestimmte Figur, die bei geschickt geführtem Bogen überraschend schnell und genau erscheint.¹⁾ Es ist ein Vergnügen zu sehen, wie die Figuren in unerschöpflicher Mannigfaltigkeit auf einander folgen, indem *eine bestimmte Figur immer denselben Ton bedingt*; das umgekehrte ist aber nicht der Fall, *demselben Tone entsprechen im Allgemeinen verschiedene Figuren*. Wir wollen einige der bemerkenswerthesten Formen angeben.

Quadratische Platten.

Regeln von Chladni. — Für eine quadratische oder rechteckige Platte führt Chladni, wie wir schon bemerkt haben, alle Figuren auf Systeme zurück, die aus den zu den Seiten parallelen Linien gebildet werden; dabei können durch die Krümmung der einfachen Linien die mannigfaltigsten Formen entstehen, ohne dass sich der Ton ändert, der für alle Figuren desselben Typus gleich bleibt. Wir wollen die Figuren nach der Anzahl der den Seiten parallelen Geraden benennen, die den Typus bilden.

Von allen Schwingungsarten ist 1/1 diejenige, die den tiefsten Ton (den wir C nennen wollen) erzeugt: man erhält ihn leicht,

¹⁾ Chladni empfahl, den Bogen in seiner ganzen Länge zu gebrauchen, am Ende den Ton etwas zu verstärken und darauf plötzlich den Bogen weg zu ziehen, um die Platte frei schwingen zu lassen. Für die einfachen Figuren, die den tiefen Tönen entsprechen, muss man einen grösseren Druck anwenden und den Bogen langsamer führen als bei den verwickelten Figuren, die zu den hohen Tönen gehören.

wenn man die Platte in der Mitte befestigt und sie in der Nähe einer Ecke anstreicht.

Bleibt die Platte in der Mitte fest, während man eine der Ecken mit dem Finger festhält und die Mitte einer der anliegenden Seiten mit dem Bogen anstreicht, so erhält man den zweiten Ton, die Quinte, $G = \frac{3}{2}$; die entsprechende Figur besteht aus zwei Diagonalen oder vielmehr aus zwei Curven, die zu diesen Diagonalen asymptotisch verlaufen. Chladni betrachtete diese Figur als eine Verzerrung von 2/0. Auf denselben Typus 2/0 lässt sich nach ihm das Quadrat mit abgerundeten Ecken zurückführen, das man erhält, wenn die Platte in der Mitte einer Seite festgehalten und an einer der nächsten Ecken angestrichen wird; indessen ist der Ton *Ais*, den die Platte alsdann liefert, um fast eine kleine Terze höher als der vorhergehende.

Dem dritten Ton, der zweiten Terze $e = \frac{5}{2}$, entspricht das System 2/1, das sehr leicht erscheint, wenn die Platte im Schnittpunkt zweier Linien festgehalten und in der Mitte einer Seite angestrichen wird. Eine kleine Änderung in der Stellung der Finger kann die Verzerrung in drei diagonale Curven herbeiführen.

Nach Chladni ist das System 3/0 am passendsten, um die Verzerrungen zu zeigen, die ohne eine Änderung des Tons entstehen. Indem man fortwährend mit dem Finger *d* und dem Bogen *a* weitergeht, gelangt man von dem System der drei parallelen Geraden (das nichts anderes ist als das eines Stabes, der den ersten transversalen Oberton giebt)¹⁾ zu den Formen von Fig. 118; bewegt man die Finger noch weiter, so kommt man durch dieselben Zwischenfiguren zu dem System der drei Geraden, die der anderen Seite parallel sind. Da jede schwingende Abtheilung bei allen diesen Verzerrungen immer dieselbe Grösse beibehält, so ändert sich der Ton nicht: dieser Ton, der vierte der Reihe, ist ungefähr die doppelte Octave $c_1 = 4$ des Grundtons.

In die Figurentafel 118 sind ferner noch einige Formen aufgenommen, die man sehr leicht erhält, wie 4/2 ($ges_2 = 11,5$ und $g_2 = 12$), oder die besonders merkwürdig sind. Die Figurenreihe ist nicht einfach von Chladni entlehnt, sondern es wurden auch die Beobachtungen von Strehlke²⁾ und besonders von Savart³⁾ dabei

¹⁾ Siehe die Anm. 1 auf Seite 236.

²⁾ Strehlke, Pogg. Ann. 4, 205; 1825.

³⁾ Savart, Ann. de chim. et de phys. (2), 63, 225; 1840.

berücksichtigt. Letzterer ersetzte den Sand durch gummirten Lackmus und konnte in Folge dessen Hunderte von Klangfiguren drucken.

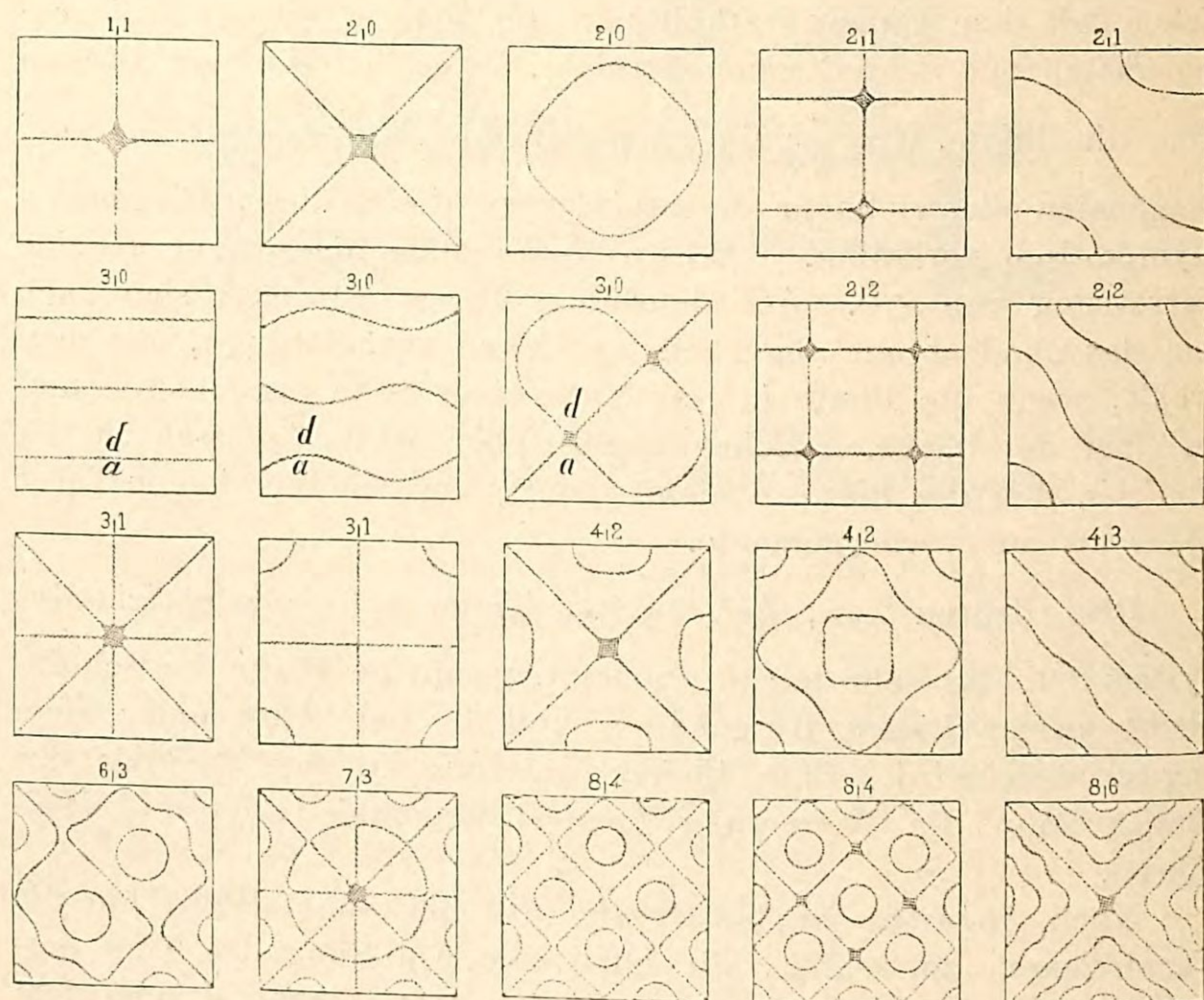


Fig. 118.

Beobachtungen von Strehlke und von Savart. — Nach diesen beiden Physikern bilden die Chladni'schen Typen Grenzfälle, denen sich die Knotenlinien nähern, ohne sie zu erreichen: eine Knotenlinie ist niemals vollständig gerade; zwei Knotenlinien schneiden sich niemals (wenn man nicht zu viel Sand auf die Platte wirft).

Savart bezieht indessen jede Figur auf ein Netz, das von den Parallelen zu den Seiten und von den Diagonalen gebildet wird: er behauptet, dass alle Klangfiguren der quadratischen Platten aus Parallelen zu den Seiten, immer in gleicher Zahl für die beiden Richtungen,¹⁾ und aus Parallelen zu den Diagonalen bestehen; letztere können in gleicher und ungleicher Anzahl für die beiden Richt-

¹⁾ Man findet unter seinen Abbildungen keine solche Figur, wie unsere erste 2/1, die von Chladni stammt und von Strehlke unter den angegebenen Beschränkungen reproducirt ist.

tungen auftreten. Er theilt folglich die Figuren ganz anders ein, wie Chladni.

Diese Eintheilungen haben im Grunde wenig Bedeutung. Messungen, die wir sogleich besprechen werden, sind bisher in zu geringer Zahl angestellt; sie würden von grösserem Nutzen sein, da sie allein eine gewisse Vergleichung mit der Theorie ermöglichen können.

Versuche zu einer Theorie. — Die Theorie ist leider für den Fall einer quadratischen Platte mit freien Rändern wenig vorgeschritten. Lord Rayleigh¹⁾ hat die Rechnung angestellt unter der Voraussetzung, dass der Poisson'sche Coefficient $\sigma = 0$ ist (242). Er findet auf diese Weise das System der beiden Diagonalen, das abgerundete Quadrat $2/0$, das von einer Diagonale $2/0$ geschnittene abgerundete Rechteck u. s. w. Er hat für das abgerundete Quadrat den theoretischen Werth für den Radius Vector, der der Seite parallel ist, zu $r_c = 0,4154$ und den für den diagonalen zu $r_d = 0,3900$ bestimmt, wenn die halbe Seite des Quadrats gleich $0,500$ gesetzt wird. Nun hat aber Strehlke bei drei sorgfältig ausgewählten Glasplatten für r_c die Werthe $0,4198$, $0,4198$, $0,4200$ und für r_d die Werthe $0,3856$, $0,3855$ und $0,3864$ gefunden.²⁾ Die Übereinstimmung ist offenbar grösser als man erwarten konnte, da man von einer Annahme ausging, die den Thatsachen so wenig entspricht (bekanntlich ist für Glas $\sigma = \frac{1}{4}$).

Ausserdem ist es bemerkenswerth, dass die Klangfiguren nothwendigerweise in Folge der unvermeidlichen Unregelmässigkeiten der Platte (die um so merkbarer werden, je dünner die Platte ist), der unvollkommenen Art der Unterstützung und der unvermeidlichen Einwirkung des Bogens Änderungen erleiden, und dass die Schwingungen, die unter diesem Zwange entstehen, von den freien Schwingungen stark abweichen können.

Erklärung von Wheatstone. — Wheatstone³⁾ hat eine Erklärung für die Klangfiguren aufgestellt, die Erwähnung verdient. Denken wir uns einen an beiden Enden freien Stab, der transversal derartig schwingt, dass der Grundton entsteht: er besitzt alsdann zwei Knotenlinien, die von den Enden um $0,224$ entfernt sind. Da es auf die Breite des Stabes innerhalb gewisser Grenzen

¹⁾ Lord Rayleigh, loc. cit. 1, 309.

²⁾ Nach Strehlke wird das abgerundete Quadrat in Polarcoordinaten durch die Gleichung

$$r = 0,4016 + 0,0170 \cos 4\omega + 0,00128 \cos 8\omega \quad \text{dargestellt.}$$

³⁾ Wheatstone, Phil. Trans. 1833; 2, 593.

nicht ankommt, so setzen wir sie der Länge gleich: wir haben alsdann eine quadratische Platte, die zwei zu der einen Seite parallele Knotenlinien besitzt.¹⁾ Nun betrachten wir eine zweite gleiche quadratische Platte, die in der gleichen, aber entgegengesetzten Bewegung begriffen ist. Legen wir die beiden Platten auf einander oder, besser ausgedrückt, denken wir uns beide Bewegungen bei derselben Platte superponirt, indem wir sie rechtwinklig kreuzen, so haben wir eine neue Art der schwingenden Bewegung; diese ist durch ein System von Knotenlinien charakterisirt, die durch alle Punkte gehen, wo die Componenten der

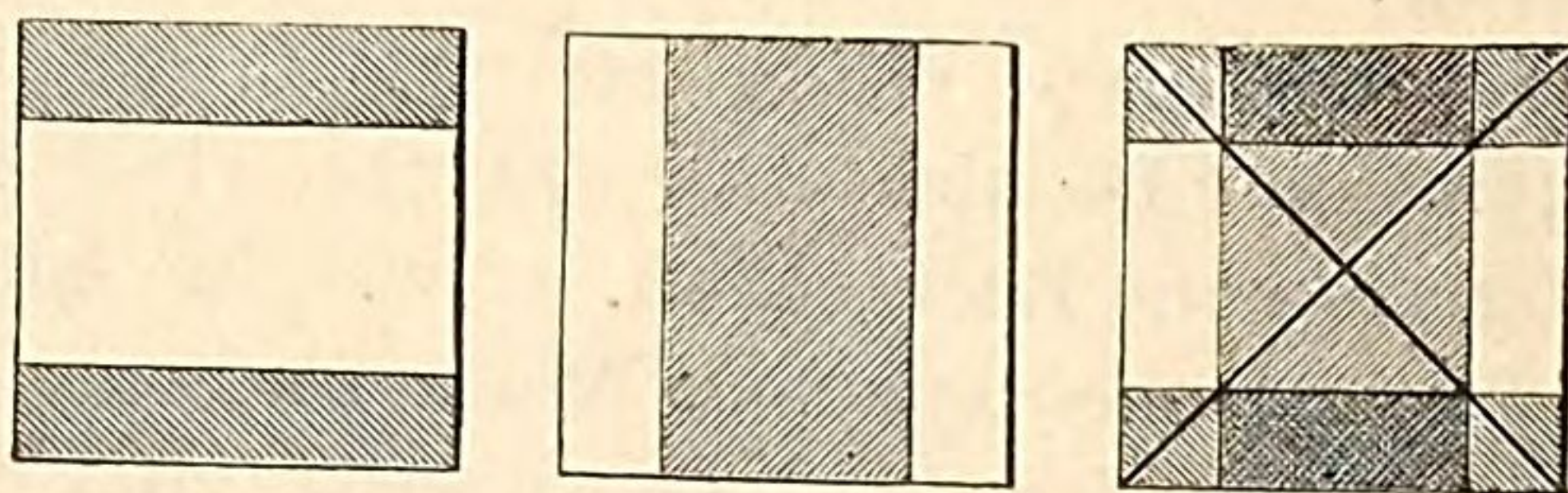


Fig. 119.

Bewegung alle beide Null sind oder sich gegenseitig aufheben. Wir erhalten also in Wirklichkeit das System der beiden Diagonalen. Das Princip der Superposition ist richtig, aber da die Bewegungen, die man zusammensetzt, in Wirklichkeit den quadratischen Platten mit freien Rändern nicht zukommen, so sind die Ergebnisse auch nur näherungsweise richtig. Auf diese Weise fand Wheatstone das eingeschriebene Quadrat, wenn die beiden sich rechtwinklig kreuzenden Platten gleiche Schwingungsrichtung haben, während die wirkliche Form das von Strehlke definirte abgerundete Quadrat ist.

Ohne uns weiter um die Fehler dieser Methode zu kümmern, wollen wir die Vorthelle benutzen, die sie uns für eine angenäherte Darstellung der Erscheinungen bietet. Zuerst soll sie uns den folgenden Versuch erklären, den Wheatstone mit Holzplatten anstellte. Wenn eine quadratische Holzplatte so geschnitten ist, dass ein Seitenpaar den Fasern parallel läuft, so ist der Ton, dem zwei dieser Richtung parallele Knotenlinien entsprechen, tiefer als der Ton, der zu denselben auf den Fasern senkrechten Knotenlinien gehört;²⁾ man kann also auf dieser Platte nicht die beiden gekreuzten Diagonalen beobachten: sie erscheinen aber, wenn die

¹⁾ Dieser Übergang vom Stabe zur Platte ist nicht richtig, da die zur Biegungsebene rechtwinklige Krümmung nicht mehr vernachlässigt werden kann, sobald die Breite der Länge nahe kommt.

²⁾ Das Holz hat bekanntlich gegen Biegung einen grossen Widerstand, wenn es parallel zu den Fasern geschnitten ist.

Platte in der den Fasern parallelen Dimension verkürzt wird, so dass die Platte in beiden Richtungen ungefähr denselben Ton giebt. Eine quadratische Holzplatte giebt dagegen sofort das System der beiden Diagonalen, wenn ihre Fasern diagonal verlaufen oder wenn sie aus zwei gleichen Platten zusammengesetzt ist, von denen beide nach den Fasern geschnitten und nachher rechtwinklig gekreuzt sind, da der Grundton alsdann in beiden Richtungen derselbe ist.

Die Erklärung von Wheatstone erstreckt sich auch auf rechteckige Platten, wie sie die folgende Figurentafel zeigt, in der König¹⁾ rechteckige Platten dargestellt hat, die einmal der

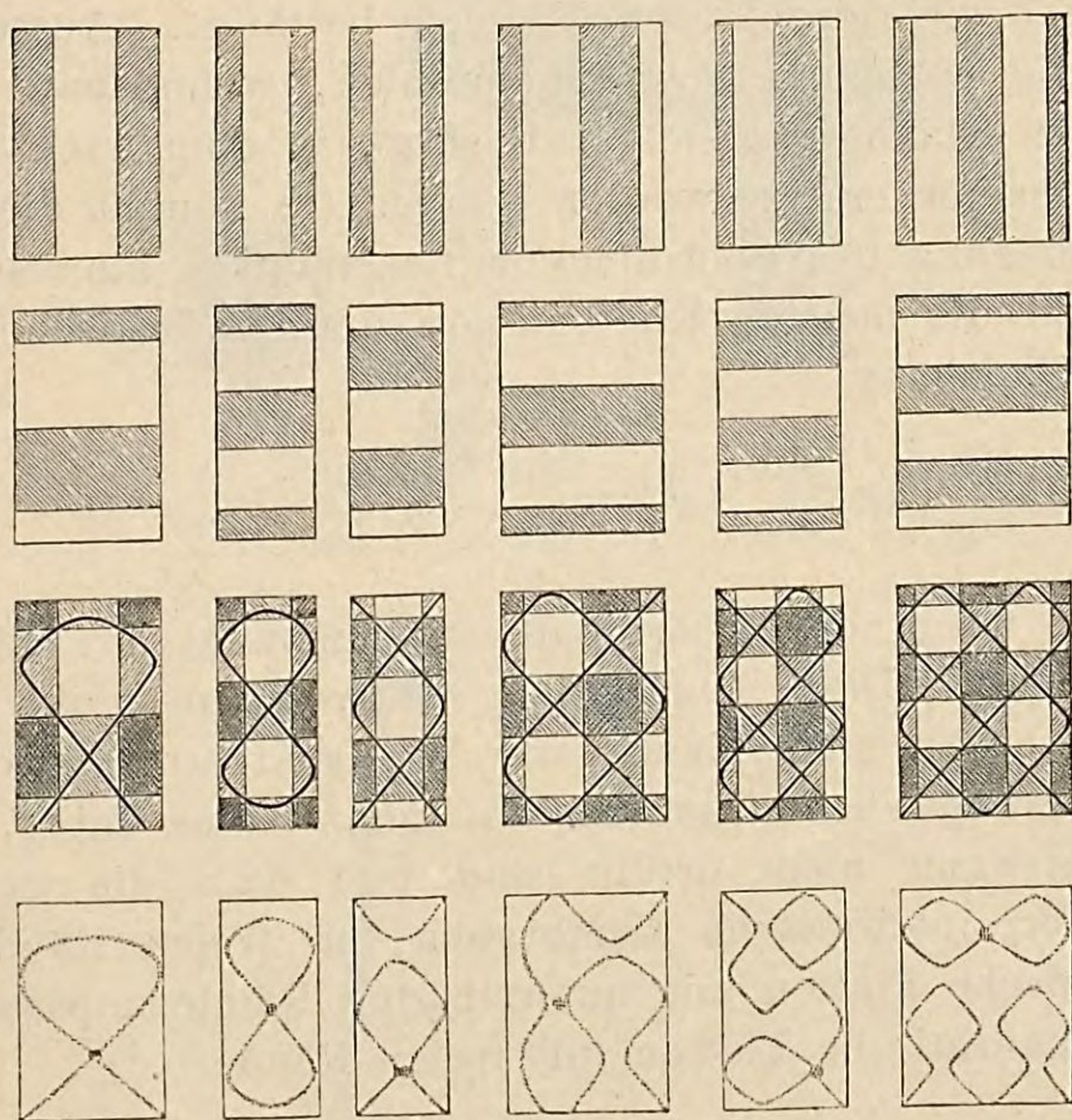


Fig. 120.

Länge, sodann der Breite nach in Stäbe getheilt und darauf zu rechtwinklig sich schneidenden Systemen zusammengesetzt sind; in der untersten Reihe folgen die wirklich beobachteten Klangfiguren.

Bemerkungen von Radau. — Als Radau²⁾ die Wheatstone'sche Erklärung verfolgte, bemerkte er, dass die Lagrange'sche Gleichung folgende singuläre Lösung³⁾ zulässt:

¹⁾ König, Pogg. Ann. **122**, 238; 1865 und Quelques expériences, 32.

²⁾ Radau, Moniteur scientifique de Quesneville, **6**, 468 und 540; 1864.

³⁾ In dieser Formel bedeutet l die Seite und e die Dicke des Quadrats (beide Grössen in Centimeter); h und k sind ganze Zahlen (die die An-

$$w = \left(\sin \frac{h\pi x}{l} \sin \frac{k\pi y}{l} \pm \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{h\pi y}{l} \right) \sin^2 \pi (h^2 + k^2) \frac{e}{l^2} m t.$$

Die Tonhöhe wäre alsdann der Grösse $\frac{e}{l^2} (h^2 + k^2)$ proportional, und da der Proportionalitätsfactor nach den Wertheim'schen Zahlen $\left(\sigma = \frac{1}{3}, V = 3600 \text{ m} \right)$ für Messing ungefähr 173 200 beträgt, so hätte man für Messingplatten

$$N = 173\,200 \frac{e}{l^2} (h^2 + k^2);$$

diese Formel wird durch den Versuch bestätigt. Ausserdem erhält man die Gleichung der Knotenlinien, wenn man den Ausdruck in der Klammer gleich Null setzt, in dem auch die Sinus durch die Cosinus ersetzt werden können (es kommt dies nur auf eine Verschiebung des Coordinatenanfangspunkts hinaus); in der That werden die meisten Knotenlinien der quadratischen Platten durch die Gleichung

$$\frac{\sin(hx)}{\cos(hx)} \pm \frac{\sin(ky)}{\cos(ky)} = 0$$

dargestellt, wenn der Coordinatenanfangspunkt im Mittelpunkt der Figur liegt. Diese Darstellung ist trotzdem nicht ganz zutreffend: so erhält man, ebenso wie Wheatstone, für die Curve 2/0 das eingeschriebene Quadrat. Es kommt dies daher, dass die Grenzbedingungen nicht erfüllt sind und dass die gefundenen Lösungen für quadratische Membranen mit freien Rändern oder für quadratische Platten mit unterstützten Rändern passen, aber nicht für quadratische Platten mit freien Rändern.¹⁾

Kreisförmige Platten.

Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung. — Für die kreisförmigen Platten mit freien Rändern hat man eine vollständige Theorie aufstellen und daraus die Form der Knotenlinien ableiten können, die immer Durchmesser oder concentrische Kreise sind; ferner liess sich die Reihe der möglichen Töne berechnen.

zahl der jedem Seitenpaare parallelen Geraden bezeichnen, auf die man nach Chladni die Klangfigur zurückführen kann); m ist eine Grösse, die von dem Poisson'schen Coefficienten σ und der Schallgeschwindigkeit V in dem betreffenden Körper abhängt.

¹⁾ Siehe Lord Rayleigh, loc. cit., 307 und 314.

Bei dem Versuch ergreift man die Platte mit der Plattenzange oder mit den Fingern, legt sie auf Korkspitzen oder

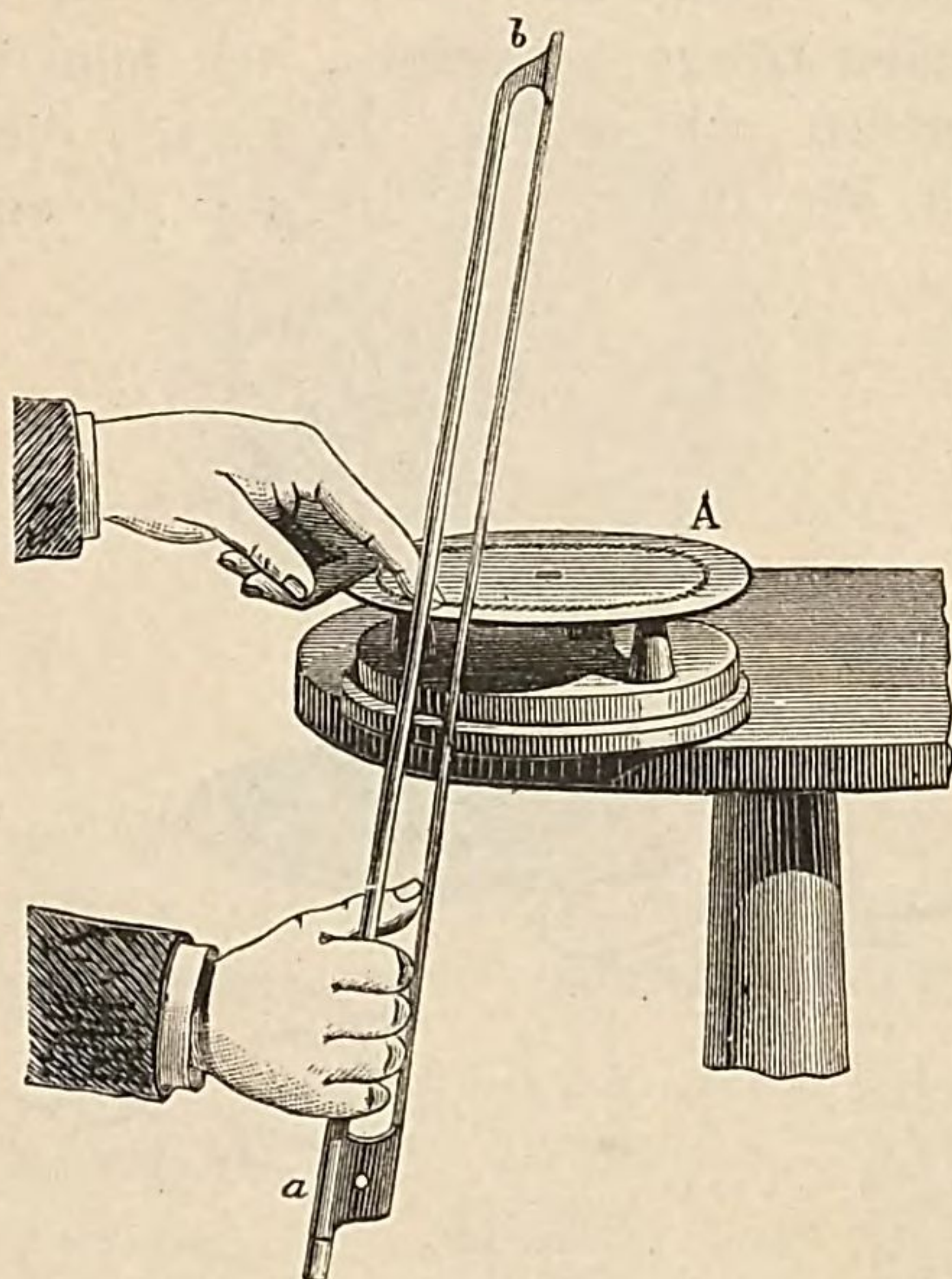


Fig. 121.

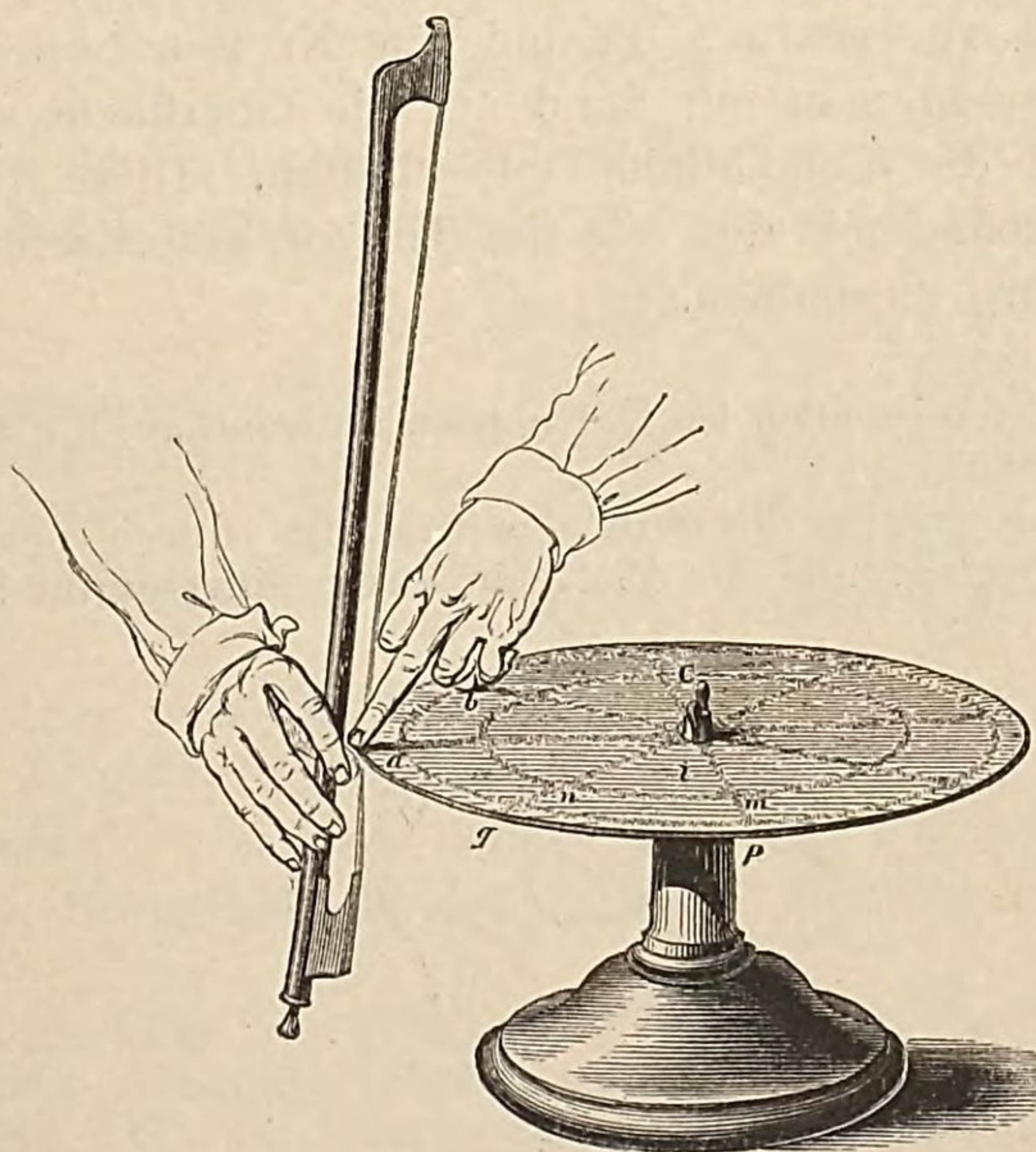


Fig. 122.

befestigt sie in ihrem Mittelpunkt auf einer Stütze (die Klangfigur enthält alsdann nothwendigerweise Durchmesser); man streicht

sie entweder mit dem Bogen in einem Punkte des Umfangs an oder mit Haaren, die durch ein im Mittelpunkt gebohrtes Loch hindurchgehen. Man kann die Platte auch an das Ende eines Stabes von passender Länge befestigen, den man in longitudinale Schwingungen versetzt, wie es Fig. 127 zeigt;¹⁾ die Bewegung des Stabes theilt sich der Platte mit, in der sie eine transversale

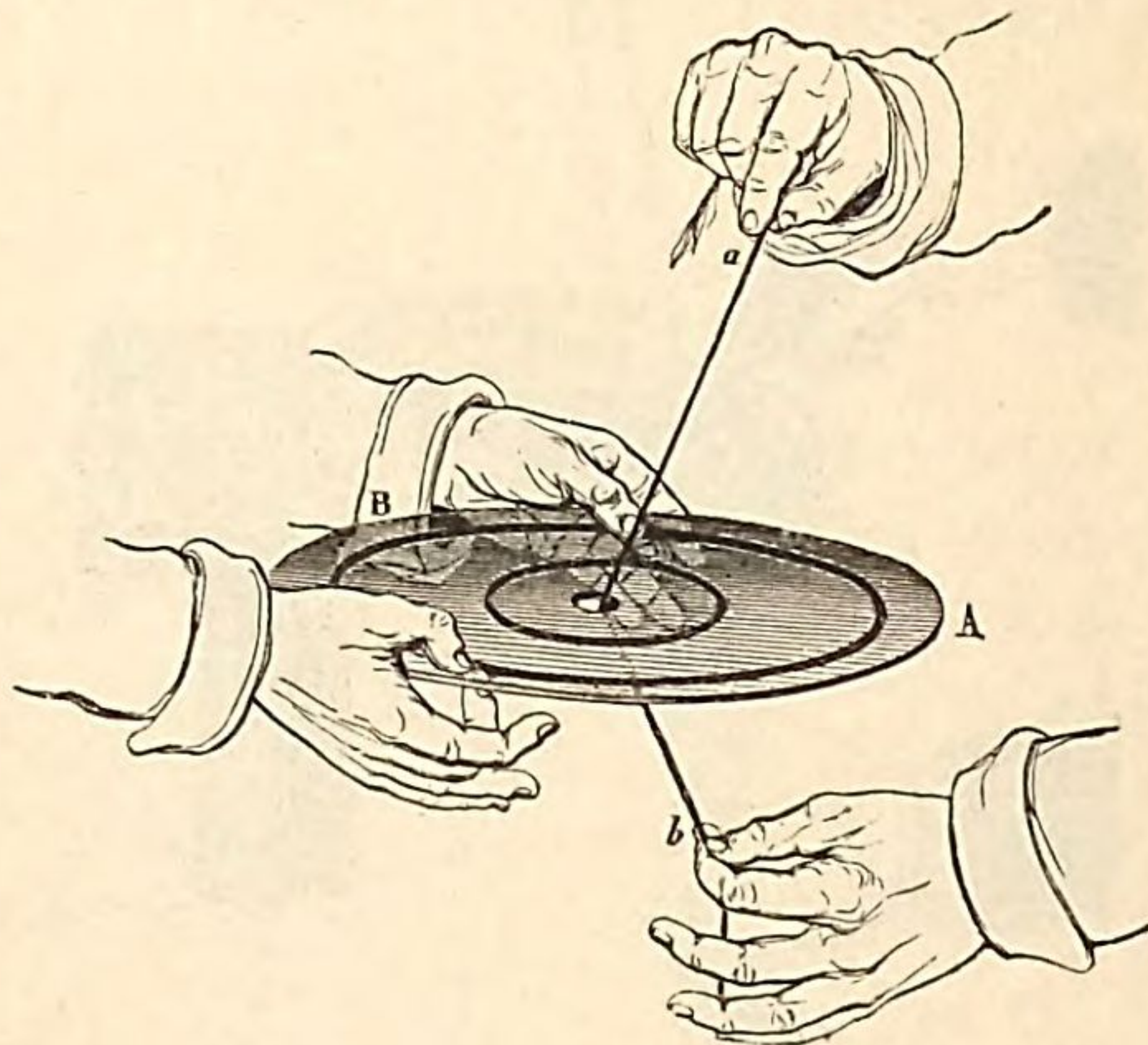


Fig. 123.

Schwingung hervorruft (diese Anordnung ist besonders bequem, um Klangfiguren zu erhalten, die nur aus Kreisen bestehen). In allen Fällen braucht man nur Sand auf die Oberfläche der Platte zu streuen, um die Knotenlinien zu erhalten. Diese fallen gewöhnlich sehr genau mit den von der Theorie geforderten Kreisen und Durchmessern zusammen.²⁾

¹⁾ Das Verfahren ist auch bei Luftplatten anwendbar (Kundt, Pogg. Ann., 137, 456; 1869).

²⁾ Wenn man gewisse Punkte des Umfangs durch passend aufgestellte Körke festlegt und die Platte in ihrem Mittelpunkt in Schwin-

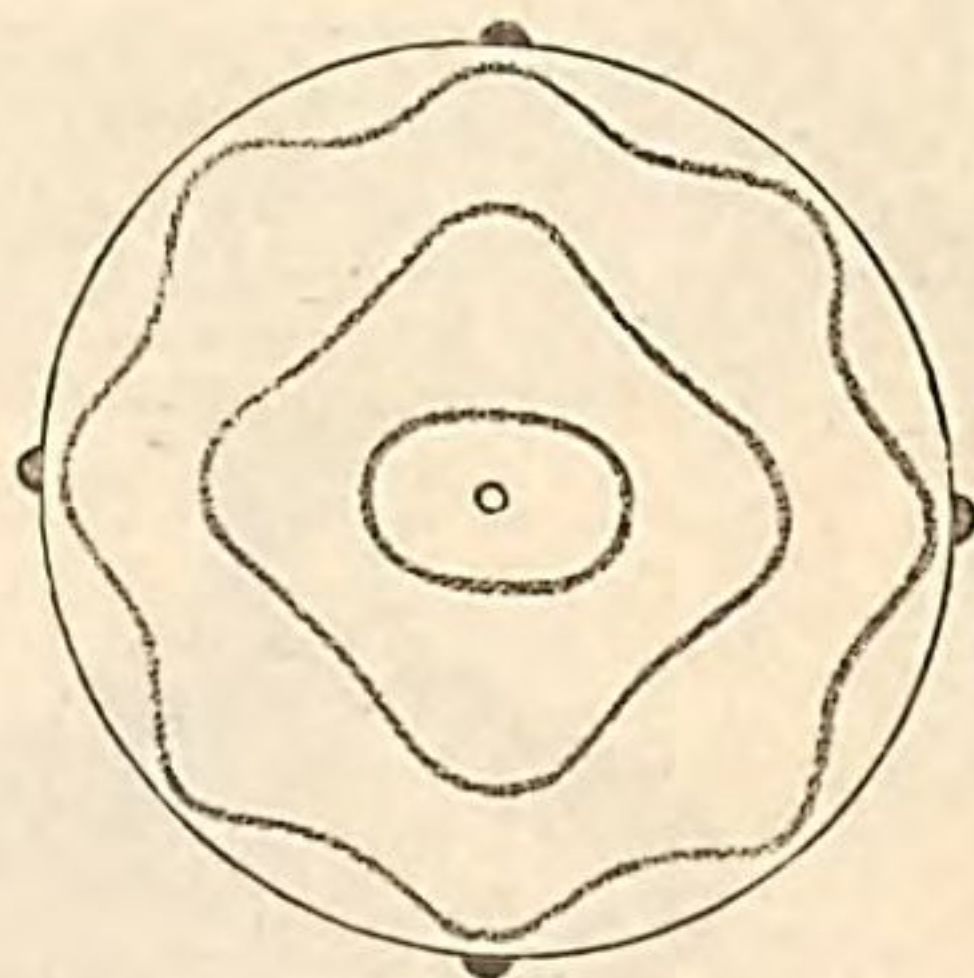


Fig. 125.

gung versetzt, so erhält man guirlandenartige Figuren, die schon seit Chladni's Zeiten bekannt sind, deren Theorie aber bisher noch nicht aufgestellt worden ist: sobald diese Guirlanden erscheinen, steigt die Höhe

Poisson hat die Radien für die Kreise der Klangfiguren bestimmt, die keine Durchmesser besitzen, und Strehlke¹⁾ hat einige

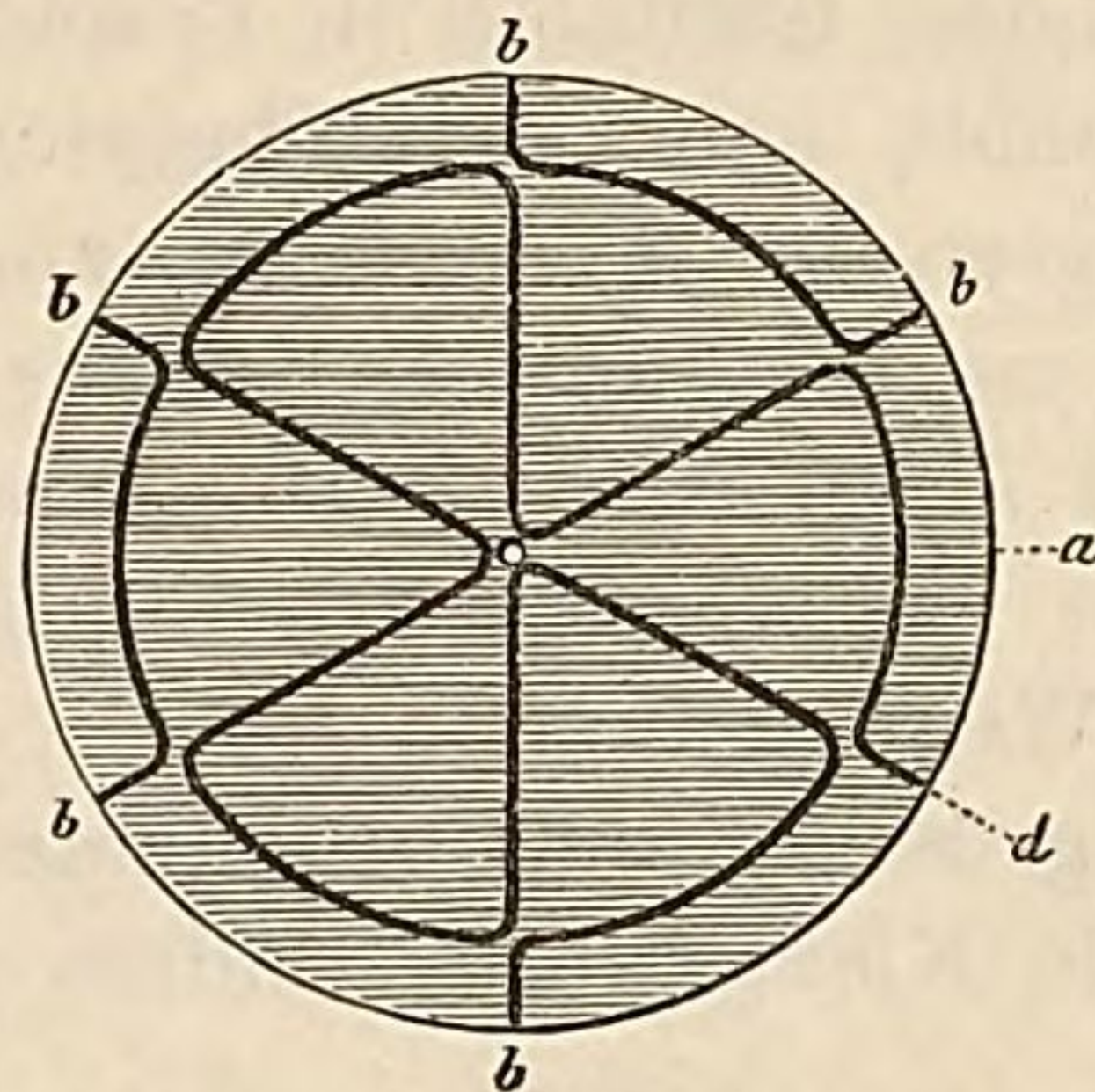


Fig. 124.

dieser Radien bei einer genau gearbeiteten Glasplatte sorgfältig gemessen. Es folgen hier die erhaltenen Zahlen, bei denen der Radius der schwingenden Platte als Einheit angenommen ist.

	Berechnet	Beobachtet
1 Kreis	0,6806	0,6782
2 Kreise	{ 0,3915 0,8420	0,3913 0,8415
3 Kreise	{ 0,2568 0,5915 0,8938	0,2563 0,5911 0,8936

Ferner hat Strehlke an weniger guten Scheiben einige Ergebnisse der Kirchhoff'schen Theorie bewiesen:

	Berechnet	Beobachtet			
1 Durchmesser, 1 Kreis . .	0,7814	0,781	0,783	0,781	0,783
2 Durchmesser, 1 Kreis . .	0,8219	0,790	0,810	0,820	
3 Durchmesser, 1 Kreis . .	0,8452	0,838	0,842		
1 Durchmesser, 2 Kreise . .	{ 0,8706 0,4977	0,869	0,869		
		0,488	0,492		

In Bezug auf die Tonhöhe bestätigt die Theorie das von Chladni aufgestellte Gesetz:

Abgesehen von den Tönen, die den nur aus Durchmessern gebildeten Klangfiguren entsprechen,²⁾ ist die Schwingungszahl

des Tones merklich, wie Wertheim beobachtet hat, der ausserdem bemerkte, dass sich diese Figuren nur auf Messingplatten gut bilden (Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3), 31, 19; 1851.)

¹⁾ Strehlke, Pogg. Ann. 95, 577; 1855.

²⁾ Diese Töne bilden die sehr einfache Reihe 2², 3², 4², ... (wenn die Anzahl der Durchmesser gleich 2, 3, 4 . . . ist), sie unterscheiden sich aber vollständig von den andern.

dem Ausdruck $(d + 2c)^2$ proportional, wo d die Zahl der Durchmesser und c die der Kreise in der betreffenden Klangfigur bedeutet.¹⁾

Wenn man mit C den tiefsten Ton bezeichnet (2 Durchmesser und 0 Kreise), so gehört nach der Theorie zu der Figur mit 1 Kreis und 0 Durchmesser der Ton gis_1+ , zu der mit 1 Kreis und 1 Durchmesser $h-$, zu der mit 1 Kreis und 2 Durchmessern gis_1+ , zu der mit 1 Kreis und 3 Durchmessern $dis_2 \dots$; alle diese Töne sind nicht viel verschieden von denen, die Chladni auf experimentellem Wege gefunden hat.

Auf einer etwas grossen Platte beobachtet man häufig mehrere gleichzeitig auftretende Klangfiguren, indem der Rand der Platte

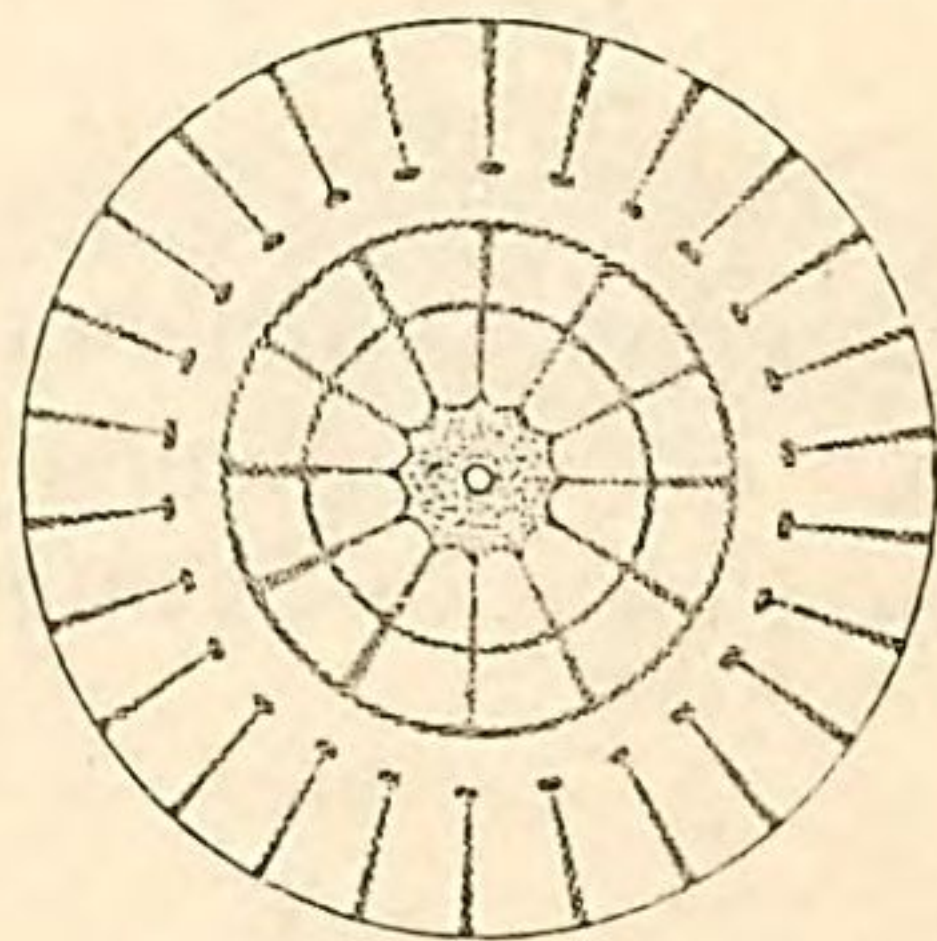


Fig. 126.

in eine grössere Anzahl von Abtheilungen zerfällt als die Mitte; dadurch entstehen gleichzeitig mehrere Töne (die im Einklang sein können).

Mangel an Symmetrie und Belastung der Platte. — Bei einer vollständig homogenen Platte ist die Lage der radialen Knotenlinien ganz willkürlich und hängt nur vom Angriffspunkte ab. Ist die Symmetrie der Platte aber gestört, so ist die Klangfigur nur in zwei Lagen stabil, die in einander übergehen, wenn man die Figur um den halben Winkel zwischen zwei benachbarten Durchmessern dreht. Dabei darf der Fehler in der Symmetrie nicht zu bedeutend sein, wenn die Klangfigur nur Kreise und Durchmesser enthalten soll.

Belastet man die Platte etwas (ausserhalb einer kreisförmigen Knotenlinie), so geht eins der Systeme von Durchmessern durch den Angriffspunkt der Belastung; die Periode dieses Systems wird nicht geändert, während die des andern wächst.

Klangfiguren aus Lycopodiumsamen. — Verwendet man ein sehr leichtes Pulver, z. B. Lycopodiumsamen, so zeigen die Klangfiguren ein ganz anderes Aussehen: es häufen sich an den Bäuchen Pulver-

¹⁾ Was die Änderung der Tonhöhe anbetrifft, die auftritt, wenn die Platte in Unterabtheilungen zerfällt, so ist dabei ein Durchmesser zwei Kreisen gleichwerthig.

mengen an, die in Bewegung sind. Faraday hat gezeigt, dass diese Erscheinung, die schon Chladni bekannt war, von kleinen Luftwirbeln herrührt, welche über den Bäuchen entstehen, und ein Goldblättchen bis zu einer Höhe von mehreren Millimetern heben können. Im Vacuum verschwinden diese Anhäufungen an den Bäuchen, aller Staub sammelt sich hier an den Knotenlinien an (Fig. 127).

Als Savart mit Lycopodiumsamen experimentirte, beobachtete er, wie die Klangfigur, die zwischen ihren beiden Gleichgewichtslagen oscillirte, bei der wiederholten Anwendung des Bogens über die eine Lage hinausging und in eine stetige Drehung gerieth, indem sich eine ringartige Wolke bildete. Es ist zweckmässig, hierbei eine dünne und breite Platte anzuwenden, die einen Ton von hoher Ordnung giebt. Man kann selbst nach dem Vorgang Savart's das Lycopodium ganz weglassen und auf die Platte ein Lichtbündel fallen lassen; es entsteht alsdann ein Lichtpunkt, der sich so schnell dreht, dass er bald als leuchtender Kreis erscheint.

Versuche von Chladni und von Savart. — Chladni und Savart haben auch polygonale und elliptische Platten geprüft: bei den letzteren bestehen die Klangfiguren hauptsächlich aus confocalen Ellipsen und Hyperbeln.

Chladni'sches Gesetz. — In allen Fällen, wo der Stoff, die Form und die Schwingungsart (die durch die Klangfigur charakterisirt ist) dieselben bleiben, ist die Tonhöhe einer homogenen Platte der Dicke direct und der Oberfläche umgekehrt proportional.

Ist der Stoff verschieden, so ist die Tonhöhe der Quadratwurzel aus dem Elasticitätscoefficienten E direct und der Quadratwurzel aus dem specifischen Gewicht umgekehrt proportional.

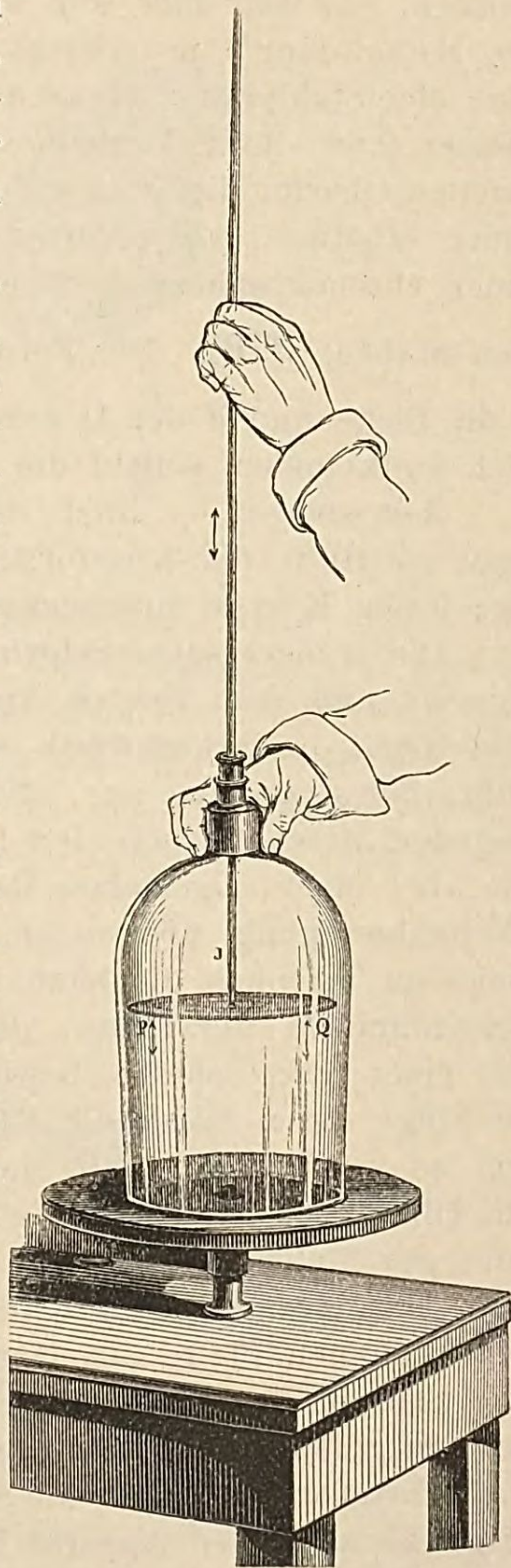


Fig. 127.

Diese Gesetze, die zuerst von Chladni aufgestellt wurden, folgen unmittelbar aus den Principien der Elasticitätstheorie (387) und sind durch alle späteren Untersuchungen bestätigt worden. Es soll hier nur auf die Messungen verwiesen werden, die Mercadier¹⁾ neuerdings an kreisförmigen Platten angestellt hat: eine Stahlplatte, die an drei Punkten eines Kreises vom Durchmesser 0,68 durch Korkstücke unterstützt war und folglich den zweiten Oberton lieferte, wurde auf elektrischem Wege in Schwingung erhalten; die Schwingungen registrierte man nebst denen einer chronographischen Stimmgabel wie bei den Versuchen mit den Stäben (378). Die Formel $N = K \frac{e}{d^2}$, wo K eine Constante, e die Dicke und d den Durchmesser der Platte bedeutet, bestätigte sich vollkommen, sobald die Dicke der Platte über 2 mm betrug.

Anwendungen. — Nach dem Vorgang von Wertheim²⁾ kann man mit Hülfe der kreisförmigen Scheiben sehr gut die Elasticität der festen Körper untersuchen.

Die transversalen Schwingungen der Platten finden bei den *Cymbeln* und dem *Tamtam* Anwendung, die durch ihre Fülle von Obertönen bemerkenswerth sind. Die Metallplatte des *Telephons* führt Schwingungen aus, die offenbar durch die Form und die sonstige Beschaffenheit der Platte bestimmt sind; ausserdem ist sie aber einer allgemeinen Resonanz fähig, vermöge deren sie jede Wellenbewegung übertragen kann. Fast ausschliesslich kommt bei dem Telephon die letzte Eigenschaft zur Geltung;³⁾ die Eigenschwingungen der Platte, die sich freilich nicht so äussern wie bei einer *freien* Scheibe, bewirken die Verstärkung gewisser Töne, in Folge deren leider die Klangfarbe geändert wird. Es ist dies um so weniger der Fall, je geringer die Dicke und je grösser die Oberfläche ist, so dass eine grosse und dünne elastische Platte alle gewöhnlichen Töne gut überträgt. Auf diesem Princip beruht das *Audiphon* von Rhodes⁴⁾ (in Chicago): es besteht aus einer dünnen Platte aus Hartgummi, ähnlich den Lichtschirmen, die man in der Hand hält, und wird an die Zähne des Oberkiefers geführt. Es überträgt alsdann die Töne, die sich in der Luft fortpflanzen, durch die Schädelknochen nach dem Hörnerven. Fig. 128 zeigt den Apparat im Profil und von der Rückseite; er kann auch nur aus einem dünnen und biegsamen Kartonstück be-

¹⁾ Mercadier, Journal de physique (2) 4, 541; 1885.

²⁾ Wertheim, loc. cit.

³⁾ Mercadier, Annales télégraphiques; 1886.

⁴⁾ Rhodes, American patents; 1879.

stehen¹⁾ und scheint tauben Leuten, bei denen die Hörnerven noch nicht vollständig abgestorben sind, grosse Dienste leisten zu können.

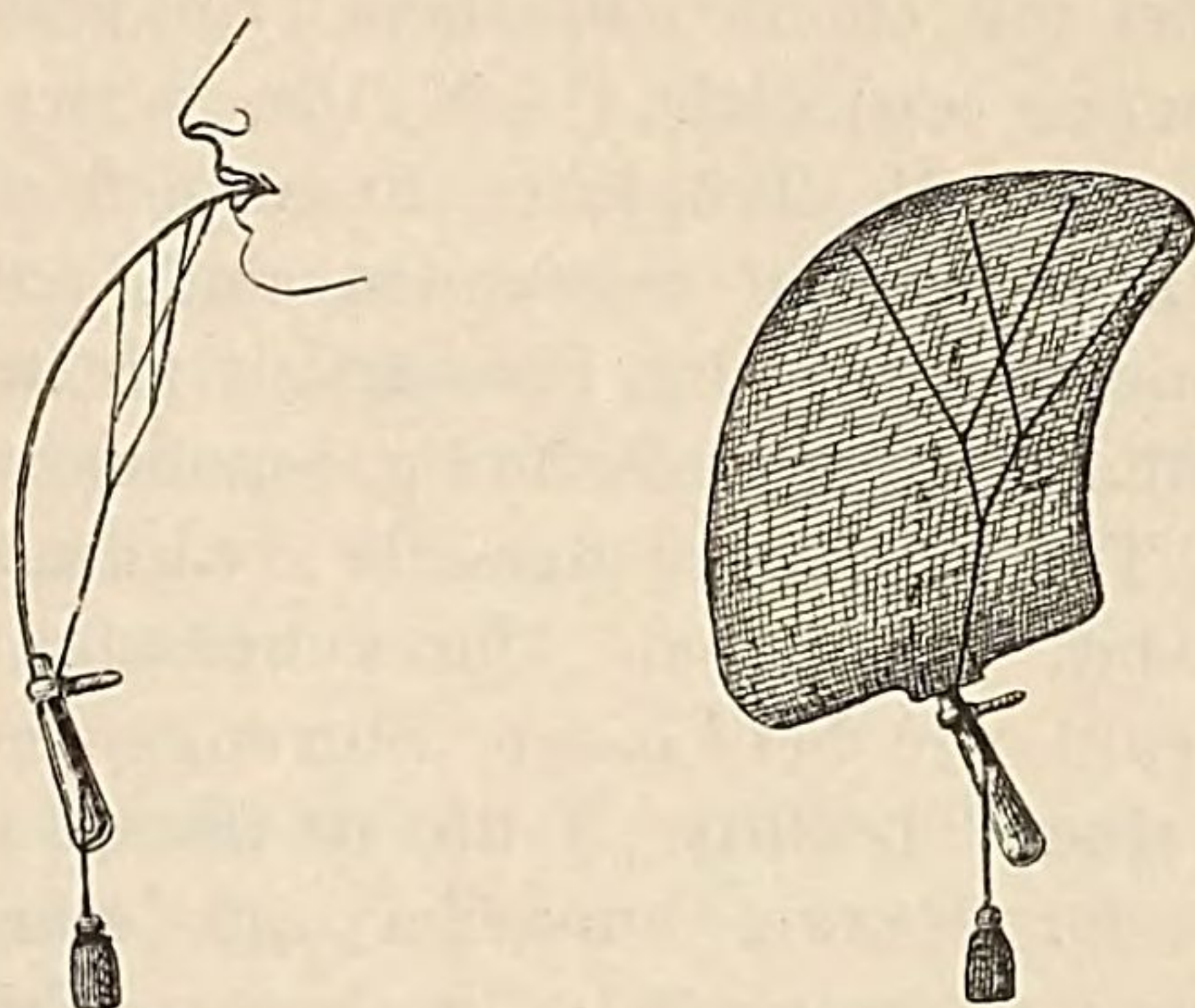


Fig. 128.

386. Glocken. — An die kreisförmigen Platten reihen sich die Glocken; sie theilen sich bei der Schwingung in eine gerade Anzahl von Abtheilungen, deren Knotenlinien in Meridianen verlaufen. Giebt eine Glocke den Grundton an, so entstehen vier gleiche Segmente, die durch zwei zu einander rechtwinkligen Ebenen getrennt sind; der Punkt, wo der Klöppel anschlägt, bildet

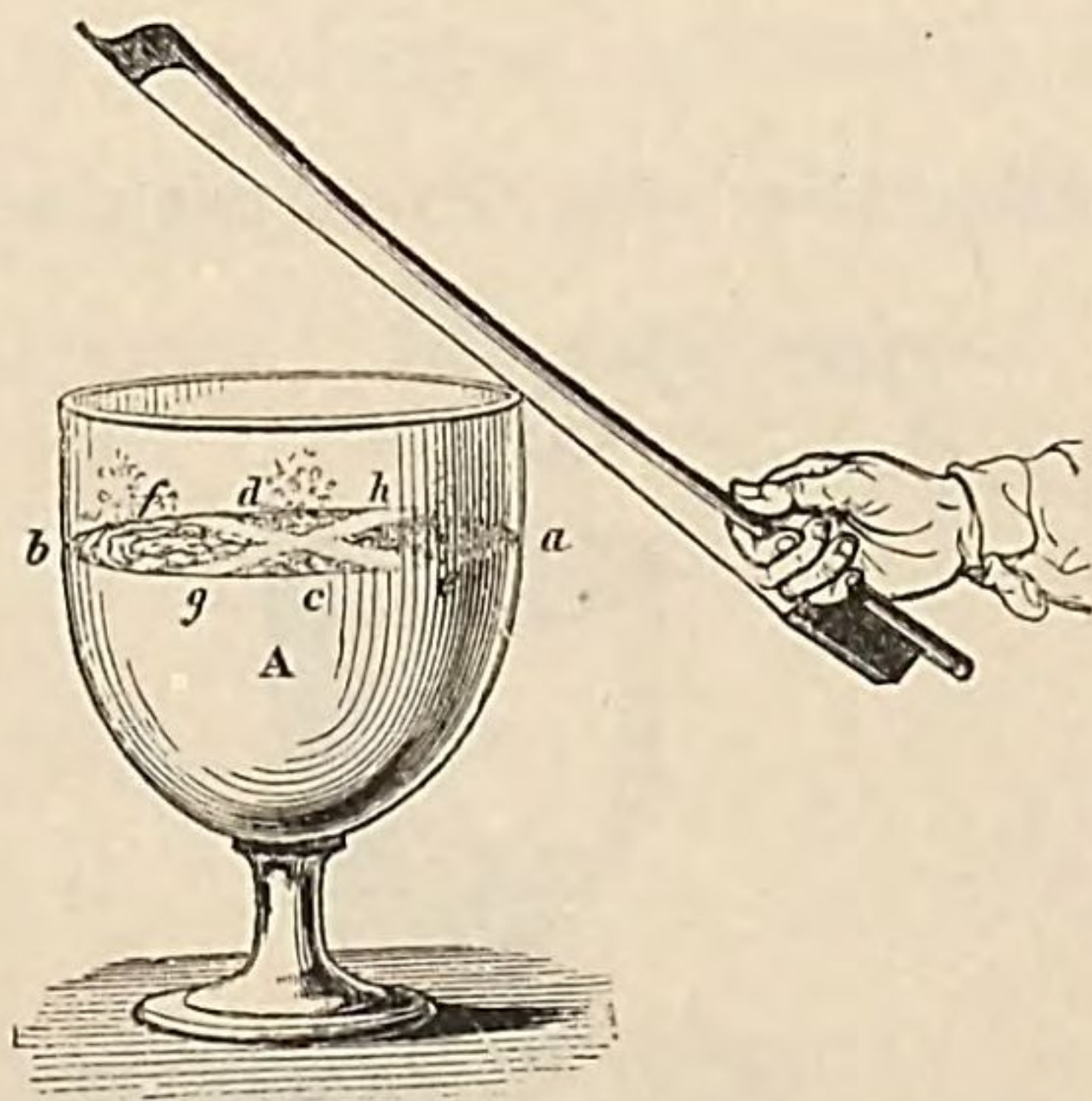


Fig. 129.

immer die Mitte eines solchen Segments. Den Obertönen entsprechen 6, 8, 10, ... Segmente, die durch 3, 4, 5 ... diametrale Ebenen geschieden werden. Um diese Knotenebenen sichtbar zu machen, kann man das akustische Pendel anwenden (324) oder auch die Glocke mit Wasser anfüllen, auf dessen Oberfläche sich

¹⁾ Colladon, La Nature 8, 161; 1880.

die Bäuche durch Kräuselungen und, wenn die Amplitude ausreichend ist, durch nach allen Richtungen emporgeworfene Tröpfchen verrathen. Der Versuch lässt sich auch sehr gut mit einer Glasglocke oder selbst mit einem einfachen Trinkglase anstellen, das man mit dem Bogen anstreicht.¹⁾ Melde verwendet Äther oder Alkohol statt Wasser: die Tröpfchen lösen sich dann leichter und halten sich, wenn sie einmal entstanden sind, auf der Oberfläche längere Zeit, ohne sich mit der Flüssigkeit zu mischen.

Die Knotenlinien einer vollständig regelmässigen Glocke sind stabil, und der Ton ist immer derselbe, wie man auch den Anschlagspunkt wählt. Aber jede Unregelmässigkeit der Structur oder der Form ruft, wie bei Platten, Störungen hervor. Chladni zeigte dies mit einer Theetasse,²⁾ die er derart in Schwingungen versetzte, dass der Henkel entweder mit einem Knoten oder mit einem Bauch zusammenfiel: im ersten Falle hinderte der Henkel die Bewegung nicht und der Ton war höher als im zweiten Falle. Die meisten Glocken liefern in Folge eines Fehlers in ihrer Symmetrie zwei verschiedene Töne; durch ihr Zusammenstöhnen entstehen alsdann Schwebungen (388),³⁾ die man besonders wahrnimmt, wenn der Ton schwach geworden ist.

Wäre eine Glocke regelmässig genug und hätte sie überall dieselbe Dicke, so wäre die Reihe ihrer Töne, denen 2, 3, 4, ... als Meridiane verlaufende Knotenlinien entsprechen, 2^2 , 3^2 , 4^2 , ... ,

¹⁾ Reibt man den Rand des Glases mit einem benetzten Finger, so



Fig. 130.

erhält man auch vier schwingende Abtheilungen, die aber jeden Augenblick ihre Lage wechseln.

²⁾ Der Versuch gelingt ebenso gut mit einem Steinkrug (Tyndall).

³⁾ Nur den beiden Richtungen, in denen einer Deformation der grösste oder geringste Widerstand geleistet wird, entsprechen einfache Schwingungen; in jeder anderen Richtung entstehen zwei Töne.

wie bei einer runden Platte, die sich in derselben Weise theilt. In Wirklichkeit hängen die Höhe und die relative Stärke der verschiedenen Töne von der Form ab, die der Giesser wählt.¹⁾ So giebt nach Helmholtz die grosse Glocke des Erfurter Doms, die im Jahre 1477 gegossen wurde, die Töne $E, e, gis, h, e_1, gis_1, h_1$ und cis_2 , die mit Ausnahme des letzten alle harmonisch sind.

Welche Form man auch immer wählt, man kann nach dem Gesetz, das für ähnliche Systeme gilt (387), leicht eine Reihe von Glocken erhalten, deren Grundtöne das gewünschte Verhältniss zu einander haben und sich in Folge dessen zu harmonischen *Glockenspielen* eignen.

387. Ähnliche Systeme.²⁾ — Wir wollen zwei Systeme von ähnlicher Form und Structur betrachten; das Verhältniss ihrer Dichten sei γ . Wir nehmen an, dass in diesen Systemen zwei homologe Punkte x, y, z und sx, sy, sz derartig schwingen, dass sich die Verschiebungen zu den Zeiten t , bez. at wie $1:\delta$ verhalten; das Verhältniss der Geschwindigkeiten wird alsdann gleich $\frac{\delta}{a}$ und das der Beschleunigungen $\frac{\delta}{a^2}$ sein. Da die Massen der beiden elementaren Parallelepipede $dx dy dz$ und $s^3 dx dy dz$ sich wie $1:s^3\gamma$ verhalten, so ist das Verhältniss der Kräfte gleich $\frac{s^3\gamma\delta}{a^2}$. Andererseits sind die wirklichen Kräften dem Elasticitäts-Coefficienten E , den relativen Verschiebungen $\frac{\delta}{s}$ und den Oberflächen s^2 der Elemente, folglich der Grösse $Es\delta$ proportional. Wir haben also

$$\frac{s^3\gamma\delta}{a^2} = Es\delta$$

oder

$$a^2 = s^2 \frac{\gamma}{E};$$

diese Gleichung drückt das Verhältniss a der Perioden als Function des Ähnlichkeitsverhältnisses s , der Dichte γ und des Elasticitäts-

¹⁾ Sax hat für die Pariser Oper bei Gelegenheit der Aufführung von „Patrie“ eine Glocke angefertigt, die aus einfachem dünnem Messingblech besteht und die Form eines mit Ausbauchungen versehenen Waldhorns besitzt. Diese Glocke, die nur 7 kg wiegt, giebt in einem geschlossenen Raume einen Ton, der vollständig dem einer Glocke von 7000 kg im Freien ähnlich ist.

²⁾ Cauchy, Mémoires de l'Académie des sciences 9, 118; 1830.

Coefficienten E aus.¹⁾ Wenn man statt der Periode die Schwingungszahl einführt, so lautet die vorhergehende Gleichung:

Für ähnliche Systeme, die ähnliche Schwingungen ausführen, ist die Schwingungszahl dem Ähnlichkeitsverhältniss und der Quadratwurzel aus der Dichte umgekehrt, der Quadratwurzel aus dem Elasticitäts-Coefficienten direct proportional.

¹⁾ Die Grenzbedingungen sind wie gewöhnlich.

Neuntes Capitel.

Zusammensetzung von Wellenbewegungen.

I. Zusammensetzung zweier paralleler Wellen.

388. Schwebungen. — *Theorie.* — Superponiren sich zwei gleichgerichtete Wellen in demselben Punkte, so entstehen *Interferenzen*, wenn die Perioden vollständig gleich, *Schwebungen*, wenn die Perioden fast gleich sind.

Da wir die erste Erscheinung genau kennen gelernt haben (4. Cap.), wird uns die zweite keine grossen Schwierigkeiten mehr bereiten.

Es mögen sich in demselben Punkte zwei parallele Wellen superponiren, deren Perioden wenig von einander abweichen und deren Geschwindigkeiten gegeben sind durch die Gleichungen

$$v = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right)$$

und

$$v' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau'} - \varphi' \right).$$

Schreibt man die letztere Gleichung in der Form

$$v' = a' \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi + \frac{t}{\tau'} - \varphi' - \frac{t}{\tau} + \varphi \right)$$

oder

$$v' = a' \sin 2\pi \left\{ \frac{t}{\tau} - \varphi - \left(\varphi' - \varphi - \frac{\tau - \tau'}{\tau\tau'} t \right) \right\}, ^1)$$

¹⁾ Diese Schreibweise für die Formel, bei der ein Theil des Factors von t in die Phase eingeht, hätte keine physikalische Bedeutung, wenn der in die Phase gezogene Theil nicht sehr klein wäre; auf alle Fälle bleibt die wirkliche Periode dabei unbestimmt.

so ist sofort klar, dass man sich die resultirende Bewegung aus zwei Wellen von derselben Periode zusammengesetzt denken kann, deren Phasenunterschied

$$\Phi = \varphi' - \varphi - \frac{\tau - \tau'}{\tau\tau'} t$$

sich mit der Zeit ändert; diese Änderung geht nur langsam vor sich, da die Differenz $\tau - \tau'$ im Verhältniss zu τ und τ' klein ist. Während der Dauer einer Schwingung bleibt Φ nahezu constant, und die Erscheinung reducirt sich auf die Interferenz zweier Wellen von diesem besonderen Phasenunterschied. Bei der folgenden Schwingung hat Φ nicht mehr ganz denselben Werth, in Folge dessen sind die Bedingungen für die Interferenz etwas geändert. Da diese Änderung andauert, so verläuft die Erscheinung ebenso in der Zeit, wie sie sich früher im Raum abspielte (357). Die Intensität der resultirenden Bewegung ist ein Maximum für die Zeiten, wo der Phasenunterschied eine beliebige ganze Zahl oder ein gerades Vielfaches von $1/2$ beträgt; die Minima treten zu den Zeiten auf, wo der Phasenunterschied gleich einem ungeraden Vielfachen von $1/2$ ist.

Die Maxima der Intensität folgen in gleichen Zeiträumen auf einander, deren Länge

$$\Theta = \frac{\tau\tau'}{\tau - \tau'}$$

beträgt; zwischen einem Maximum und dem darauf folgenden Minimum verfliesst die Zeit $\frac{\Theta}{2}$.

Man beobachtet also eine Reihe von *Stössen*, die in gleichen Zeiträumen auf einander folgen; dazwischen, in der Mitte dieser Zeiträume, verschwindet der Ton vollständig. Da sich die Zeit Θ auch in der Form

$$\Theta = \frac{1}{\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{N' - N}$$

schreiben lässt, wo N und N' die Schwingungszahlen der beiden betrachteten Töne bedeuten, und da ausserdem die Anzahl B der Schwebungen in der Zeiteinheit gleich dem reciproken Werthe von Θ , der Dauer einer Schwebung, ist, so ergibt sich, dass die Anzahl der Schwebungen in der Zeiteinheit gleich dem Unterschied der absoluten Schwingungszahlen der beiden fraglichen Töne ist,

$$B = N' - N.$$

Die Erscheinung wird um so deutlicher, je mehr sich die Intensitäten der beiden ursprünglichen Töne einander nähern; sind sie einander gleich und beide gleich 1, so hat die Intensität der einzelnen Stösse den Werth 4.¹⁾

Versuche. — Die Schwebungen lassen sich leicht bei Instrumenten mit einfachen Tönen, z. B. bei Stimmgabeln, beobachten. Nimmt man zwei grosse Stimmgabeln mit Resonanzkasten, die beide denselben Ton, z. B. c, geben, und verändert man den Ton der einen Stimmgabel,²⁾ so hört man starke Schwebungen, die um so schneller auf einander folgen, je mehr sich die Töne der Stimmgabeln unterscheiden. Zwei grosse gedeckte Pfeifen, die beide denselben Ton geben, eignen sich auch sehr gut zu unserem Zwecke, da die Obertöne bei diesen Instrumenten sehr schwach sind: bringt man den Finger an das Windloch der einen Pfeife, wodurch ihr Ton tiefer wird, so hört man sofort die Schwebungen. Mit Hülfe der Schwebungen stimmen auch die Orgelspieler die Pfeifen ab: die einzelnen Stösse entfernen sich um so mehr von einander, je mehr die Töne der Pfeifen übereinstimmen.

Zwei offene Pfeifen, zwei Saiten vom Contrabass oder vom Clavier, die nahezu denselben Ton liefern, geben auch Schwebungen, die aber schwieriger zu beobachten sind. Denn die Schwebungen zusammengesetzter Töne sind selbst complicirter Art: jedem Stosse des Grundtones entsprechen zwei Stösse des ersten Obertones, drei

¹⁾ Sind die Amplituden einander gleich, so erhält man, wenn so gleich die Schwingungszahlen N und N' eingeführt und die Phasen φ und φ' vernachlässigt werden, die man durch eine passende Wahl des Anfangspunktes der Zeit immer gleich Null machen kann,

$$\sin 2\pi Nt + \sin 2\pi N't = 2 \cos \pi (N - N')t \sin 2\pi \frac{(N + N')t}{2};$$

der erste Factor dieses Products enthält die periodische Änderung der Intensität, während der zweite anzeigt, dass die Schwingungszahl der resultirenden Bewegung constant gleich $\frac{1}{2}(N + N')$, dem Mittelwerth aus den Schwingungszahlen der Componenten, ist.

Sind die Amplituden verschieden, so ändert sich die Schwingungszahl fortwährend ebenso wie die Intensität; das Maximum ist gleich $\frac{Na + N'a'}{a + a'}$, das Minimum gleich $\frac{Na - N'a'}{a - a'}$ und die mittlere Schwingungszahl kann gleich $\frac{Na^2 + N'a'^2}{a^2 + a'^2}$ gesetzt werden (Terquem und Boussinesq, Journal de physique 4, 193; 1875).

²⁾ Man braucht nur ein Übergewicht (ein kleines Geldstück oder ein Wachskügelchen) an das obere Ende der einen Zinke zu kleben, um den Ton tiefer zu machen.

Stösse des zweiten Obertones u. s. w.; alle diese Schwebungen, die je nach der Intensität der Obertöne mehr oder weniger deutlich auftreten, mischen sich, so dass dem Ohr mehr die Höhe und die Beschaffenheit als die Intensität des Tones verändert erscheint.¹⁾ Es ist leicht, die Schwebungen durch eine optische Methode (397) oder mit Hilfe von manometrischen Flammen (355) dem Auge sichtbar zu machen. Man kann sie auch direct oder mittelst des Phonautographen registriren.

Die Schwebungen zweier Stimmgabeln lassen sich leicht mit dem Apparat von Lissajous und Desains registriren, der im Wesentlichen aus einer beweglichen und einer festen Stimmgabel besteht; die erste zeichnet ihre Schwingungen auf einer geschwärzten Glasplatte auf, die an der anderen, gleichfalls schwingenden festen Stimmgabel befestigt ist. Anfangs hielt man die bewegliche Stimmgabel einfach mit der Hand über die Glasplatte, die mit etwas Wachs an die feste Stimmgabel geklebt war. Mit

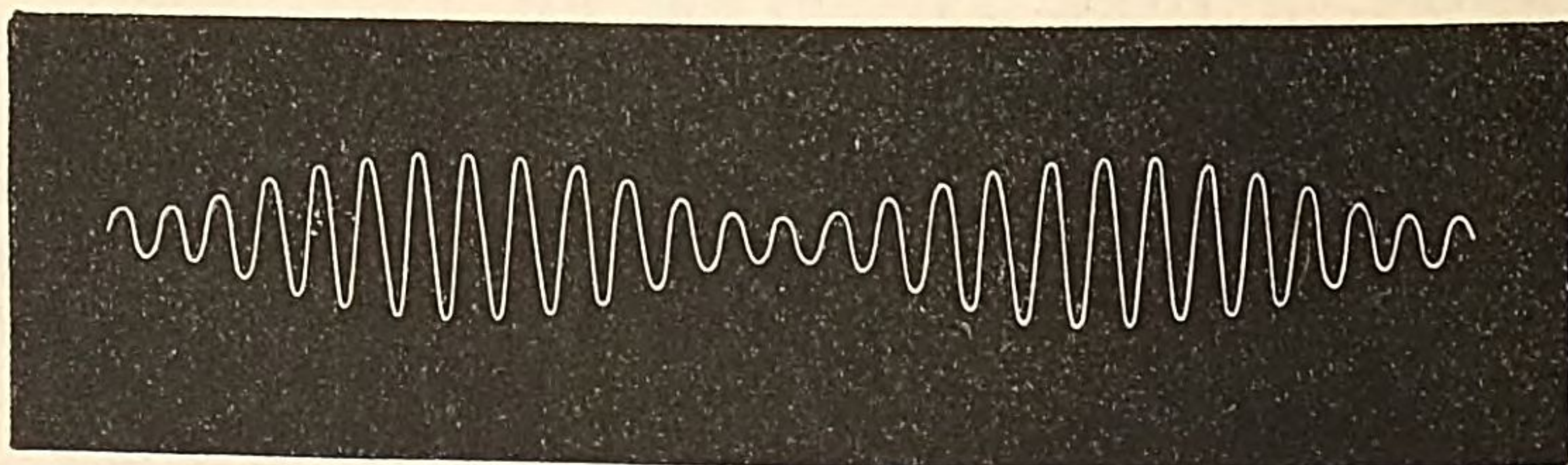


Fig. 131.

dem eigentlichen Apparat kann man bequem jede beliebige Combination der beiden Wellenbewegungen vornehmen. Zu diesem Zweck dient eine feste Bank aus Gusseisen, auf der die eine der Stimmgabeln unveränderlich fest ist, während sich die andere auf einem beweglichen Schlitten befindet; die zweite Stimmgabel trägt den Schreibstift, die erste die Glasplatte. Versetzt man beide in Schwingung, so braucht man nur den Schlitten zu verschieben, um auf dem berussten Glase die Curve zu erhalten, die der Re-

¹⁾ Die Wirkung ist sehr überraschend bei der Helmholtz'schen Sirene, je nachdem man die Resonanzkasten benutzt oder nicht. Im ersten Falle überwiegt der Grundton; dreht man die Welle d (Fig. 53), um Schwebungen hervorzurufen, so lässt sich gut beobachten, wie die Intensität abwechselnd verstärkt und geschwächt wird. Hat man dagegen die Resonanzkästen weggenommen, so erreichen die Obertöne eine verhältnissmässig hohe Stärke; in Folge dessen ist die Änderung der Intensität während der Schwebungen viel weniger auffällig als der Wechsel der Tonhöhe und der Klangfarbe (v. Helmholtz, loc. cit., 4. Aufl., S. 275).

sultante beider Wellenbewegungen entspricht. Man kann ausserdem jeder dieser Bewegungen eine beliebige Richtung geben, indem man die beiden Stimmgabeln passend dreht. Im vorliegenden Fall, von dem Fig. 131 ein Beispiel giebt, werden die beiden Stimmgabeln parallel zu den Schienen gestellt, auf denen der Schlitten gleitet.

Anwendung auf die Messung der absoluten Tonhöhe. — Sauveur,¹⁾ der zuerst die Schwebungen untersuchte, versuchte damit die absolute Höhe von Tönen zu bestimmen. Geben nämlich zwei Töne von der Schwingungszahl N und N' in der Zeiteinheit B Schwebungen, so hat man

$$N' - N = B.$$

Andererseits erhält man, wenn das Intervall I der beiden Töne bekannt ist,

$$\frac{N'}{N} = I.$$

Durch diese beiden Gleichungen sind die Schwingungszahlen N und N' vollständig bestimmt. Obwohl die Methode also principiell einwurfsfrei ist, so kann man sie in der Praxis doch nicht brauchen. Denn die Schwebungen zweier Töne lassen sich nur dann leicht und sicher zählen, wenn sich N' nur wenig von N unterscheidet, das Intervall I also sehr schwer zu bestimmen ist.

Scheibler²⁾ vermied diese Schwierigkeit. Er verwandte eine Reihe von 56 Stimmgabeln, deren auf einander folgende Töne zwischen a mit 220 Schwingungen und a_1 mit 440 Schwingungen lagen und sich jedesmal um 4 Schwingungen unterschieden. Da jedes dieser kleinen Intervalle durch Schwebungen genau bestimmt und das ganze Intervall zwischen 440 und 220 Schwingungen mit dem Ohr sicher abgeschätzt werden konnte, so erhielt man auf diese Weise einen *Tonmesser*, bei dem die absolute Tonhöhe für jede Stimmgabel der Reihe bekannt war. Wollte man alsdann die absolute Höhe irgend eines Tones zwischen 220 und 440 Schwingungen messen, so bestimmte man einfach die Zahl der Schwebungen, die er mit der ihm am nächsten gelegenen Stimmgabel gab. Man konnte auch tiefere und höhere Töne messen, wenn man sie zuvor durch eine Reihe von Octaven in die gewünschte Tonlage brachte.

¹⁾ Sauveur, Histoire de l'Académie des sciences 134; 1700.

²⁾ Scheibler, Pogg. Ann. 29, 390 und 32, 333 u. 492; 1833—1834.

König¹⁾ hat einen grossen Tonmesser construirt, der das Intervall von 16 bis 32 000 Schwingungen²⁾ und somit die ganze Scale der wahrnehmbaren Töne umfasst.

389. Combinationstöne. — *Versuche.* — Wenn zwei hinreichend starke Töne von der Schwingungszahl N und N' (die um weniger als eine Octave verschieden sind)³⁾ gleichzeitig entstehen, so geht aus ihrem Zusammentreffen ein dritter Ton hervor, dessen Schwingungszahl gleich

$$R = N' - N$$

ist. Es ist dies der Combinationston, der fast gleichzeitig von Sorge⁴⁾ in Hamburg, Romieu⁵⁾ in Montpellier und Tartini⁶⁾ in Padua beobachtet wurde.

In physikalischen Instituten findet man gewöhnlich zwei Pfeifen, die jede für sich die Töne c_2 und f_2 geben und deren Combinationston f ist. Um dieses schärfer hervortreten zu lassen, giebt man denselben Ton eine Zeit lang mit einer dritten Pfeife f an; dann scheint, wenn diese Pfeife nicht mehr tönt, der Combinationston die Fortsetzung des verklungenen Pfeifentones zu bilden. Auch lässt sich der Combinationston durch Schwebungen nachweisen, die er mit einem ihm nahe liegenden Ton hervorbringt.

Am besten kann man, worauf wir sogleich zurückkommen, die Combinationstöne mit Hülfe der Stimmgabeln untersuchen, besonders mit solchen der fünften Octave.

Für die Vorlesungen bedient man sich mit Vorthail des König'schen Apparats;⁷⁾ er besteht aus zwei Glasröhren, zwischen

¹⁾ König, Catalogue d'appareils d'acoustique; Paris 1882.

²⁾ Von 16 bis 256 Schwingungen genügen 8 Stimmgabeln mit Laufgewicht, von denen jede 32 verschiedene Töne liefert. Für die höchste Octave hat man statt der Stimmgabeln gerade Stäbe (332) genommen, deren kleinster c_8 mit 32768 Schwingungen selbst keinen hörbaren Ton mehr giebt; man kann mit ihm die Stimmgabeln anschlagen, ohne dass man zu befürchten braucht, dabei noch seinen Eigenton hervorzurufen.

³⁾ Diese Einschränkung wird weiter unten (390) verständlich.

⁴⁾ Sorge, Anweisung zur Stimmung der Orgelwerke und des Claviers; Hamburg 1744.

⁵⁾ Romieu, Mémoires de l'Académie de Montpellier; 1753.

⁶⁾ Tartini, Traité de l'harmonie; Padoue 1754.

⁷⁾ Der Apparat enthält zwölf Röhren, die auf die Töne $c_4 = 8$, $d_4 = 9$, $e_4 = 10$, $f_4 + = 11$, $g_4 = 12$, $a_4 - = 13$, $ais_4 + = 14$, $h_4 = 15$, $c_5 = 16$, $e_5 = 20$ und $fs_5 + = 23$ abgestimmt sind; die letzten sind für die Combinationstöne der harmonischen Intervalle bestimmt (390).

denen sich ein mit nassem Zeug umgebenes Rad dreht und sie der Längsrichtung nach in Schwingungen versetzt. Mit dieser Vorrichtung lassen sich die primären Töne, folglich auch der Combinationston, beliebig lange anhalten; man nimmt den letzteren also leicht wahr und kann ihn auch nöthigenfalls durch einen der oben angegebenen Kunstgriffe nachweisen.

Erklärung von Young. — Young¹⁾ schrieb die Entstehung des Combinationstones Schwebungen zu, die hinreichend schnell auf einander folgen. In Wirklichkeit schliesst sich nämlich der Ton ganz auffällig an die Schwebungen an. Lassen wir neben einer Stimmgabel c_1 mit 256 Schwingungen eine zweite tönen, deren Ton wir allmählich vom Gleichklang an erhöhen, so treten zuerst scharf getrennte Stösse auf,²⁾ die aber, bevor 288 Schwingungen in der Secunde (32 Schwebungen) erreicht sind, in ein immer schnelleres Rollen übergehen; in der Nähe der Terz mit 320 Schwingungen (64 Schwebungen) nimmt man nur noch einen einfachen *rauen* Klang wahr.³⁾ Gleichzeitig hört man ein schwaches C mit 64 Schwingungen, das bis auf c mit 128 Schwingungen steigt, je mehr man sich der Quinte mit 384 Schwingungen (128 Schwebungen) nähert, während der rauhe Ton vollständig verschwindet. Bei 384 bis 448 Schwingungen steigt der Combinationston auf g mit 192 Schwingungen und wird im Verhältniss zu früher überraschend stark. Vergleichen wir diese Erscheinung in ihrem Anfangsstadium mit den Klängen, die bei dem Savart'schen Rade auftreten, wenn man dessen Geschwindigkeit allmählich vergrössert, so erhält man auch hier zuerst *Stösse*, darauf ein *Knarren*, das auch noch anhält, wenn schon 128 Stösse in der Secunde erfolgen; aber neben dem Knarren hört man gleichzeitig deutlich den Ton c mit 128 Schwingungen.⁴⁾ Die Ähnlichkeit mit den Schwebungen ist also vollständig.⁵⁾

¹⁾ Young, Phil. Trans., 1800, und Miscellaneous Works 1, 83.

²⁾ König, loc. cit. 100.

³⁾ In allen diesen Punkten stimmt König mit Helmholtz überein, der zuerst untersucht hat, „was aus den Schwebungen wird, wenn man sie schneller und schneller werden lässt, und wie weit ihre Anzahl wachsen darf, ohne dass das Ohr unfähig wird, sie wahrzunehmen.“

⁴⁾ Das Knarren herrscht vor, wenn die Zähne gegen eine Platte aus hartem Holz stossen; bei einem spitzen und wenig widerstandsfähigen Carton ist der Ton deutlicher.

⁵⁾ Dass die getrennten Stösse und der ununterbrochene Ton gleichzeitig auftreten, stimmt auch mit den folgenden bekannten Thatsachen überein: 1. Es genügen 16 primäre Impulse, um einen Ton hervorzurufen (332); 2. man kann mit dem Ohr noch beobachten, dass zwei

*Helmholtz'sche Theorie.*¹⁾ — v. Helmholtz geht von der Thatsache aus, dass die primären Töne eine gewisse Stärke haben müssen, wenn Combinationstöne entstehen sollen. Er sieht diese deshalb als eine Störung der Wellenbewegung an, die so heftig geworden ist, dass sie nicht mehr den gewöhnlichen Gesetzen folgt.

Wenn die Schwingungen genügend klein bleiben, so sind die elastischen Kräfte, die durch die Verschiebungen hervorgerufen werden, den Verschiebungen selbst proportional; es gilt alsdann in aller Strenge das Princip von der Superposition kleiner Bewegungen, das wir bisher sehr oft angewandt haben. Sind die Amplituden der Wellen dagegen so gross, dass das Quadrat der Verschiebungen einen merkbaren Einfluss auf die Stärke der Kräfte ausübt, so muss nach der Theorie ein neues System von einfachen Wellen entstehen. Schlägt man eine Stimmgabel oder eine Glocke heftig an, so hört man die Octave,²⁾ während das Instrument bei mässigen Schwingungen nur die unharmonischen Obertöne angiebt. Wenn sich zwei Systeme von Wellen mit grossen Amplituden in demselben Punkte treffen, so entstehen zwei Arten von Combinationstönen: einerseits der *Differenzton*, dessen Schwingungszahl gleich dem Unterschied der Schwingungszahlen der primären Töne ist, andererseits der *Summationston*, dessen Schwingungszahl gleich der Summe der Schwingungszahlen der ursprünglichen Töne³⁾ ist. Auf diesen zweiten Ton passt offenbar die Young'sche Erklärung nicht.

Musikalische Bedeutung der Combinationstöne. — Die Combinationstöne spielen in der Musik eine wichtige Rolle, weil sie einen grossen Einfluss auf den Wohlklang der Accorde ausüben.

Wir wollen beispielsweise die beiden vollkommenen Accorde (335) betrachten, die durch die Octave vervollständigt sind.

Pendel nicht gleich schnell schwingen, wenn der Unterschied in der Schwingungsdauer auch nur 0,01 Secunde beträgt; ein Zeitunterschied von 0,01 Secunde zwischen zwei einzelnen Impulsen lässt sich also noch wahrnehmen. (Nach dem vorhergehenden bemerkt das Ohr sogar noch Unterschiede von $\frac{1}{130}$ Secunde.)

¹⁾ v. Helmholtz, loc. cit., 4. Aufl., S. 277.

²⁾ Versetzt man eine Stimmgabel mit langen und dünnen Zinken in starke Schwingungen, so kann man mit Hülfe von Resonatoren noch den dritten Oberton wahrnehmen (vgl. Gripon, Réunion des sociétés savantes, 1880, und König, Quelques experiences, S. 193).

³⁾ Ebenso wie die Grundtöne geben auch die Obertöne Combinationstöne, die ziemlich leicht bei der Geige und dem Harmonium zu erkennen sind.

Bei dem vollkommenen Dur-Accord

$$1, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad 2$$

sind die Combinationstöne

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad 1,$$

d. h. die zweite tiefere Octave des Grundtons, die Octave desselben Tons, die tiefere Octave der Quinte und der Grundton; alle diese Töne verstärken einfach die primären Töne und besonders den Grundton; der Accord ist daher fest und rein.

Der Moll-Accord

$$1, \quad \frac{6}{5}, \quad \frac{3}{2}, \quad 2$$

hat als Combinationstöne

$$\frac{1}{5}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{4}{5}, \quad 1,$$

d. h. die zweite tiefere Octave der tiefen grossen Terz, die zweite tiefere Octave der kleinen Terz, die tiefere Octave des Grundtons, die tiefe grosse Terz und den Grundton. Hier wiederholt sich ein neuer Ton, die tiefe grosse Terz, die mit der Quinte in Dissonanz steht. Es erklärt sich daraus der unruhige und unentschiedene Charakter des Moll-Accords.¹⁾

390. Schwebungen der harmonischen Intervalle. —

Wir wollen nun auf unsern Versuch mit den beiden Stimmgabeln zurückgehen; beide gaben einfache Töne: die feste möge den Ton c_1 , die bewegliche einen höheren liefern. Bringen wir diesen auf 488 Schwingungen, so wird der sehr deutliche Differenzton der ersten Ordnung schnell schwächer, gleichzeitig auch ein viel weniger starker Combinationston, den man schon von der Terz bis zur Quinte beobachten kann, wo er von g auf c heruntergeht. Allmählich kehren dann bei 472 Schwingungen der rauhe Ton, bei 488

¹⁾ Diese Betrachtungen finden auch auf die verschiedenen Formen der *Umkehrung* eines Accordes Anwendung, wo man einen oder mehrere der zugehörigen Töne um eine Octave versetzt. Die Combinationstöne werden alsdann geändert und führen secundäre Dissonanzen ein, deren sich Palestrina so geschickt zu bedienen wusste.

Schwingungen das Rollen, darauf die einzelnen Stösse wieder, die ihrerseits aufhören, wenn man zur Octave $c_2 = 512$ Schwingungen gelangt. Jenseits dieser Grenze verschwinden die Schwebungen wieder, werden bald nur noch als ein rauher Ton wahrgenommen u. s. w. Bei jedem Oberton kN treten Schwebungen auf, deren Zahl gleich m ist, wenn der Ton $kN \pm m$ mit dem Ton N zusammentrifft; diese Schwebungen können in ununterbrochene Töne übergehen, sobald sie zahlreich und stark genug sind.

Hallström¹⁾ erklärt die Schwebungen der harmonischen Intervalle aus dem Zusammentreffen der Combinationstöne. So gehen die zwei Stösse, die bei den Tönen $8N - 2$ und N entstehen und die bei $N = 64$ Schwingungen $= C$ sehr deutlich sind, daraus hervor, dass sich der Ton N^2) zuerst mit dem Ton $8N - 2$ vereinigt, woraus der Combinationston $7N - 2$ hervorgeht, darauf mit dem Ton $7N - 2$, woraus $6N - 2$ entspringt, darauf mit dem Ton $6N - 2 \dots$ und endlich mit dem Ton $N - 2$, wobei 2 Stösse erfolgen. Die Zwischentöne entgehen vollständig der Beobachtung. Es ist also einfacher anzunehmen, dass die Schwebungen der harmonischen Intervalle, ebenso wie die des Grundtons, aus den directen Vereinigungen der tönenden Wellen entstehen, bei denen periodisch Maxima von demselben Vorzeichen coincidiren.³⁾ Die Aufzeichnungen, die man mit dem Apparat von Lissajous und Desains erhält und die man mit Vortheil in diesen schwierigen Fragen zu Rathe zieht, scheinen diese Ansicht zu bestätigen.

391. Variationstöne. — Zwei Töne von gleicher Intensität, deren Schwingungszahlen N und N' ziemlich gleich sind, geben einen einzigen Ton von der Höhe $H = \frac{N + N'}{2}$ und von periodisch wechselnder Intensität, bei der $N' - N = B$ Schwebungen entstehen (388).

Umgekehrt ruft ein Ton H , dessen Intensität B periodische Änderungen in der Zeiteinheit erleidet, zwei *Variationstöne* $H + \frac{B}{2}$ und $H - \frac{B}{2}$ hervor.

¹⁾ Hallström, Pogg. Ann. 24, 438; 1831.

²⁾ Der Ton N muss natürlich einfach sein; sonst entstehen aus seinen Obertönen neue Schwebungen.

³⁾ König, loc. cit. 95 und Radau, Moniteur scientifique de Quesneville (3), 6, 333; 1876.

Wir haben nämlich

$$\cos 2\pi Bt \sin 2\pi Ht = \frac{1}{2} \sin 2\pi \left(H + \frac{B}{2}\right)t + \frac{1}{2} \sin 2\pi \left(H - \frac{B}{2}\right)t.$$

Diese Variationstöne beobachtet man, wie Radau¹⁾ angegeben hat, bei dem Interferenzversuch von Lissajous (355), wenn sich der ausgeschnittene Schirm schnell dreht. Ist S die Anzahl der schwingenden Sektoren und T die Zahl der Umdrehungen, die der Schirm in einer Secunde macht, so erhält man $B = ST$.

Man kann den Versuch auch ohne Schirm anstellen, wenn man die Platte in ihrer Ebene rotiren lässt. Als die in vier Sektoren getheilte Platte in dieser Weise 19,5 Umdrehungen in der Secunde machte und dabei den Ton $f_1 = 340$ Schwingungen gab, beobachtete Beetz²⁾ die beiden Töne g_1 mit 380 und es_1 mit 300 Schwingungen. Es war nämlich

$$H = 340, \quad S = 4, \quad T = 19,5,$$

also

$$H + \frac{ST}{2} = 379 \quad \text{und} \quad H - \frac{ST}{2} = 301.$$

Ein directeres Verfahren, um die Variationstöne zu beobachten, besteht darin, dass man vor einer Stimmgabel (c_2) eine Sirenscheibe mit grossen Löchern rotiren lässt. Zwischen diese Scheibe und die Stimmgabel bringt man eine verstärkende Röhre, deren Durchmesser gleich dem der Löcher in der Scheibe ist, so dass der Ton jedesmal kräftig wiederhallt, wenn eins der Löcher an der Röhre vorbeigeht. Die Variationstöne treten alsdann mit überraschender Deutlichkeit hervor; je nachdem die Umdrehungsgeschwindigkeit beschleunigt oder verzögert wird, hört man sehr gut, wie sie sich entfernen oder nähern.³⁾

392. Superposition harmonischer Schwingungen. — Besonders wichtig ist bei der Superposition paralleler Wellen der Fall, wo die Schwingungszahlen der Componenten ganze Vielfache der kleinsten Schwingungszahl sind oder, was auf dasselbe hinauskommt, wo der Grundton und seine harmonischen Obertöne in demselben Punkte zusammentreffen. Die nebenstehende Figur, die

¹⁾ Radau, Moniteur scientifique de Quesneville (2), 2, 430 und 3, 792; 1865—1866.

²⁾ Beetz, Pogg. Ann. 130, 313 und 587; 1867.

³⁾ König, loc. cit. 139.

dem Helmholtz'schen Werke entlehnt ist, stellt in *C* das Ergebniss dar, wenn sich zwei einfache Wellen *A* und *B* superponiren, deren Schwingungszahlen sich wie 1:2 verhalten und deren Phasenunterschied gleich 0 ist (es superponiren sich die Punkte d_0 und e , die Ordinaten $c_1, c_2 \dots$ sind die geometrischen Summen der Ordinaten a_1 und b_1, a_2 und $b_2 \dots$). Bei *D* beträgt der

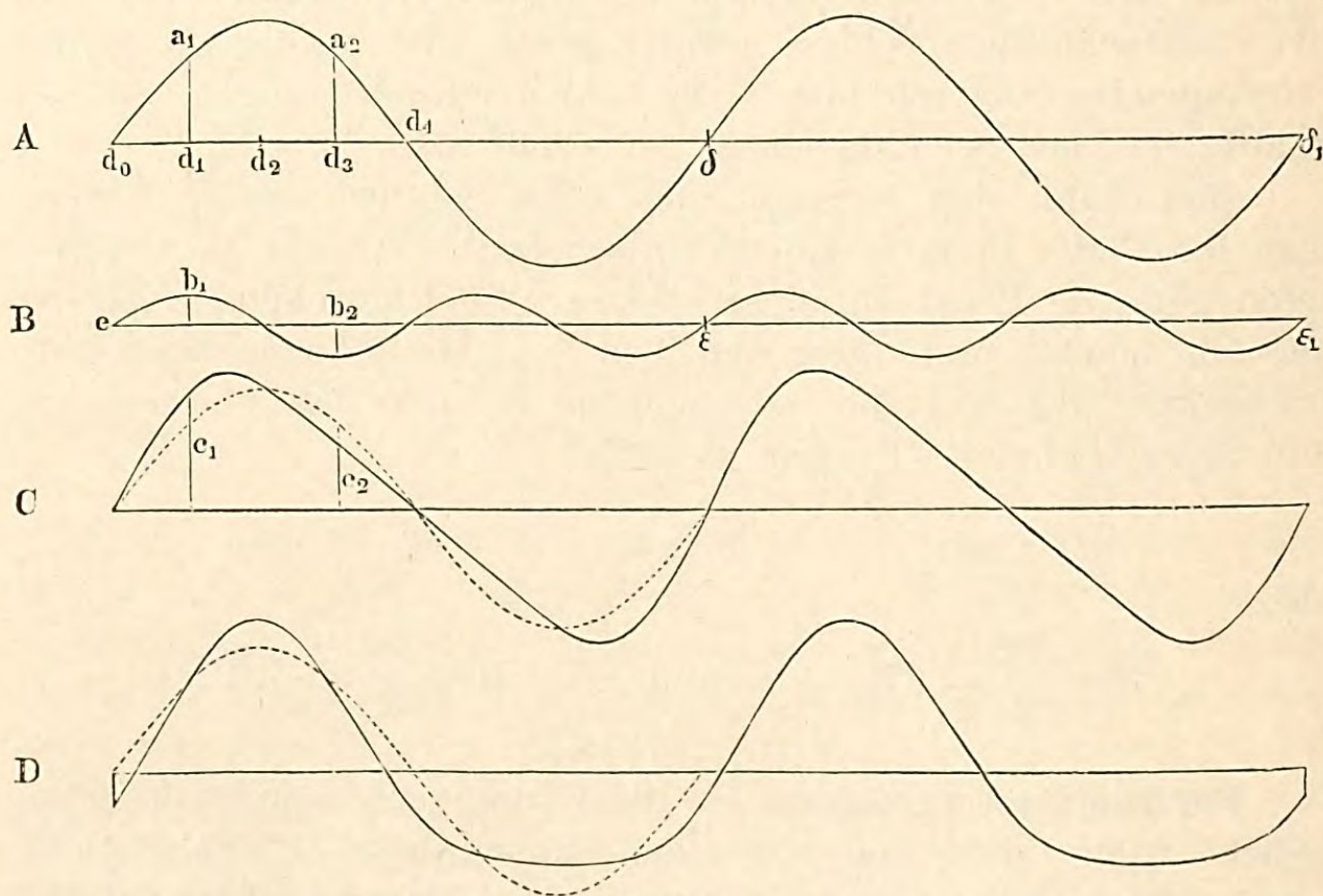


Fig. 132.

Phasenunterschied $\frac{1}{8}$ von der Periode des Grundtons (der Punkt e coincidirt mit dem Punkte d_1). Auf der linken Seite der Figur ist die punktirte Curve *A* hinzugefügt, um für das Auge die Zusammensetzung beider Bewegungen sogleich hervortreten zu lassen. Rechts, wo diese Curve nicht wiederholt ist, kann man sehen, dass die resultirende Curve nicht nothwendigerweise den Charakter der Componenten zu haben braucht.

Die Anwesenheit eines Obertons kann sich allerdings zuweilen durch Zacken an den Bogen der ursprünglichen Sinuslinie verathen, wie bei dem in Fig. 108 dargestellten Beispiel, aber gewöhnlich kann man aus dem Aussehen der resultirenden Curve nicht auf den Charakter der Componenten schliessen. Wie sollte dies auch bei Curven, wie sie z. B. Fig. 10 und 11 darstellen, möglich sein?

Jedenfalls ist es verständlich, wie durch die eben beschriebene Art der Superposition unendlich viele Curven mit derselben Periode entstehen können, durch die unendlich viele Schwingungen von verschiedener Beschaffenheit charakterisirt sind.

393. Fourier'scher Satz.¹⁾ — Fourier hat bewiesen, dass eine beliebige periodische Function von der Periode τ stets und auf eine einzige Weise durch eine Summe von Kreisfunctionen von der Periode τ , $\frac{\tau}{2}$, $\frac{\tau}{3}$. . . und der Form

$$A \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \varphi \right) + A' \cos 2\pi \left(\frac{t}{\frac{\tau}{2}} - \varphi' \right) + A'' \cos 2\pi \left(\frac{t}{\frac{\tau}{3}} - \varphi'' \right) + \dots$$

ersetzt werden kann, deren Coefficienten A , A' , A'' . . . und Phasen φ , φ' , φ'' . . . sich in jedem Fall in beliebig grosser Anzahl berechnen lassen.

Daraus folgt, dass jede Schwingung stets und auf eine einzige Weise als Resultante einer gewissen Anzahl von einfachen pendelartigen Bewegungen betrachtet werden kann.

II. Zusammensetzung zweier zu einander rechtwinkliger Wellen.

394. Theoretische Betrachtung der Superposition zweier zu einander rechtwinkliger Wellen. — *Fundamentale Gleichungen.* — Wir wollen jetzt zwei Wellen betrachten, deren Schwingungen zu einander rechtwinklig sind. Die Bewegungen sollen immer pendelartig sein; wählen wir alsdann die beiden Richtungen, in denen die Bewegungen erfolgen, zu Coordinatenachsen, so können die Verschiebungen durch

$$x = k \cos 2\pi (Mt - \varphi)$$

und

$$y = l \cos 2\pi Nt$$

dargestellt werden, wo M und N die Schwingungszahlen, φ den Phasenunterschied der beiden Componenten und k und l deren Amplituden bezeichnen. Die Curve der resultirenden Bewegung erhält man aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von t .

Im Allgemeinen ist diese Elimination schwierig, in besonderen Fällen, die für die Praxis wichtig sind, aber leicht.

¹⁾ Fourier, Théorie analytique de la chaleur; Paris 1821.

Gleichklang. — Wir wollen zuerst annehmen, dass die beiden Bewegungen im Gleichklang sind, also $M=N$ ist; alsdann hat man

$$\frac{x}{k} = \cos 2\pi Nt \cos 2\pi\varphi + \sin 2\pi Nt \sin 2\pi\varphi,$$

oder

$$\frac{x}{k} = \frac{y}{l} \cos 2\pi\varphi \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}} \sin 2\pi\varphi$$

und

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} - \frac{2xy}{kl} \cos 2\pi\varphi = \sin^2 2\pi\varphi;$$

es ist dies die Gleichung der Ellipse, bezogen auf den Mittelpunkt. Die Curve ist dem Rechteck $2k, 2l$ eingeschrieben, und ihre Achsen bilden mit den Coordinatenachsen Winkel, die von dem Werthe $2\pi\varphi$ abhängig sind.

Denn setzt man nach einander, in der Gleichung der Ellipse, $x=k$ und $y=l$, so erhält man $LT=l \cos 2\pi\varphi$ und $L'T'=k \cos 2\pi\varphi$, folglich

$$\cos 2\pi\varphi = \frac{LT}{OL'} = \frac{L'T'}{OL}.$$

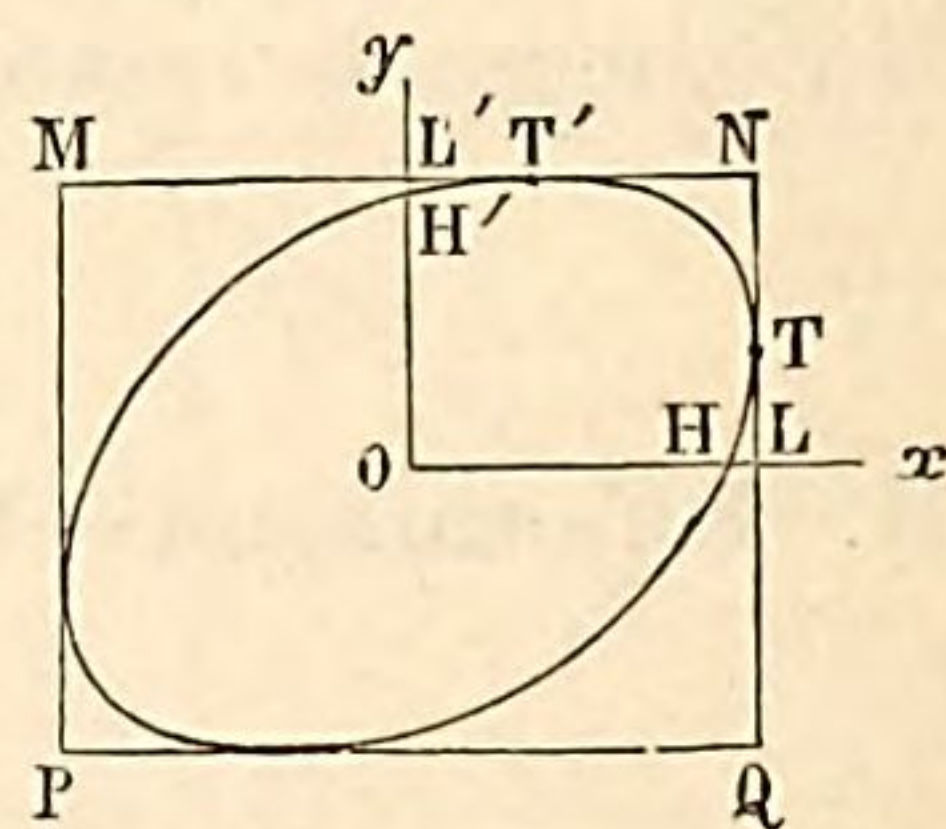


Fig. 133.

Ebenso, wenn man nach einander $x=0$ und $y=0$ setzt, kommt

$$\sin 2\pi\varphi = \frac{OH'}{OL'} = \frac{OH}{OL}.$$

Ist der Phasenunterschied beider Componenten gleich Null, also $\varphi=0$, so heisst die Gleichung

$$\frac{x}{k} - \frac{y}{l} = 0;$$

die Ellipse reducirt sich auf eine Gerade PN , die mit der x -Achse einen Winkel einschliesst, dessen trigonometrische Tangente gleich $\frac{l}{k}$ ist, und da x und y anfangs gleich k und l sind, darauf beide gleichzeitig Null werden und dann in $-k$ und $-l$ übergehen, so wird die Gerade zuerst von N nach P , darauf von P nach N u. s. w. durchlaufen.

Ist $\varphi = \frac{1}{4}$, so stellt die Gleichung eine auf ihre Achsen bezogene Ellipse

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{l^2} = 1$$

dar, und da die Componenten in diesem Fall

$$x = k \sin 2\pi Nt \quad \text{und} \quad y = l \cos 2\pi Nt$$

sind, so wird die Ellipse in der Pfeilrichtung oder im Sinne des Uhrzeigers durchlaufen: diese Drehung von links nach rechts (für einen Beobachter in O) wird rechtsläufig genannt.

Ist ausserdem $k = l$, so geht die Ellipse in einen Kreis über.

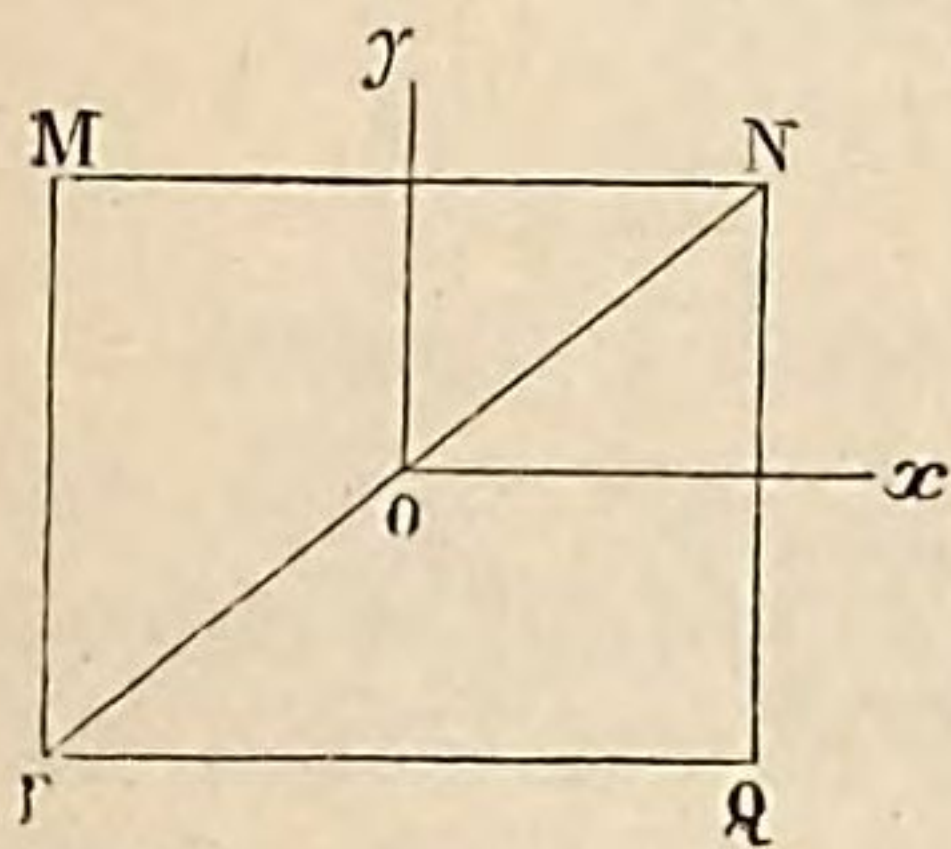


Fig. 134.

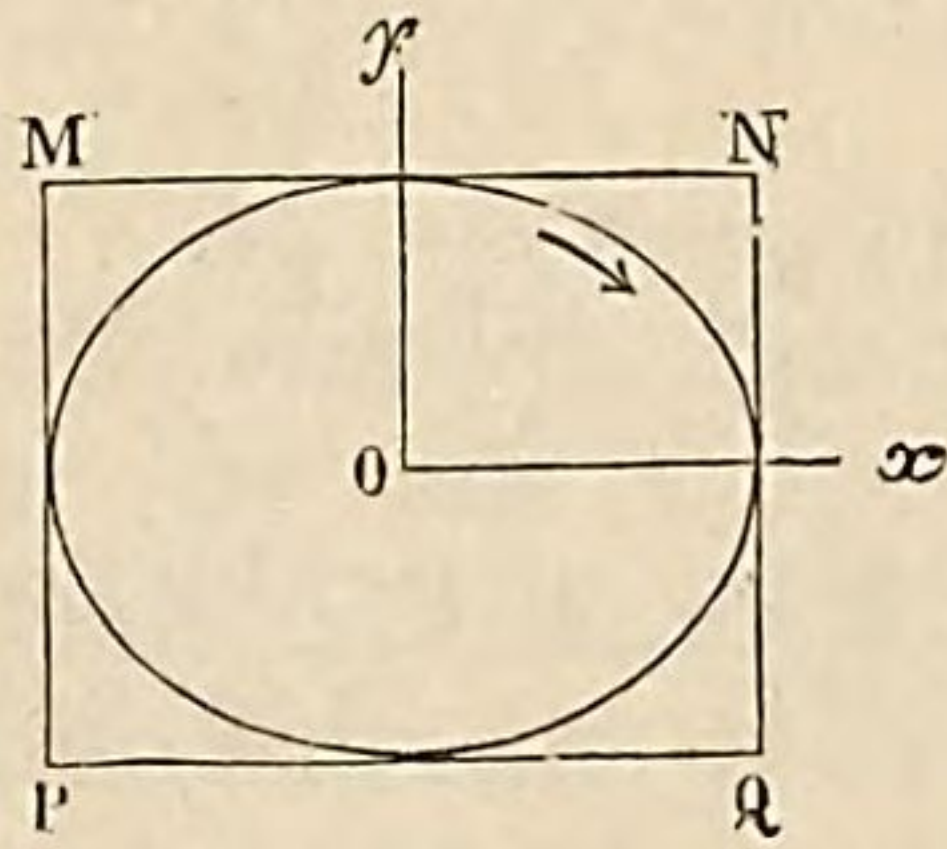


Fig. 135.

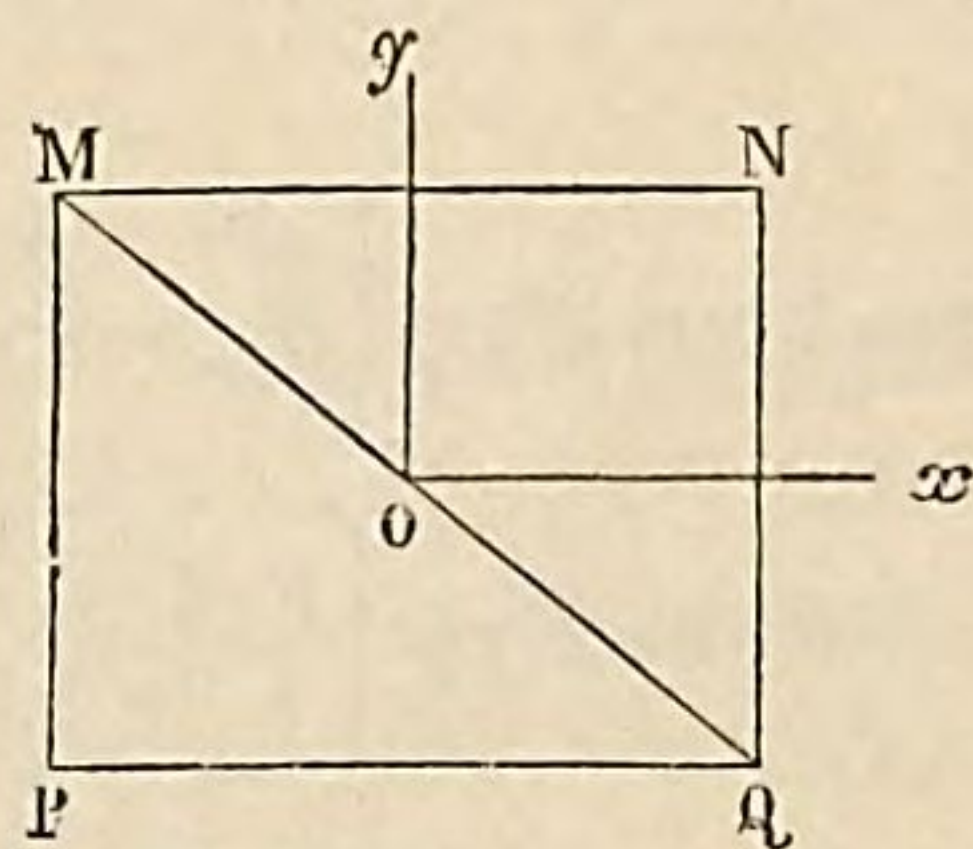


Fig. 136.

Für $\varphi = \frac{1}{2}$ erhält man eine Gerade MQ

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} = 0,$$

die zu der vorhergehenden PN in Bezug auf die Coordinatenachsen symmetrisch liegt und zuerst von M nach Q , darauf von Q nach M u. s. w. durchlaufen wird.

Fassen wir alles zusammen, so ist die Curve für die Werthe von φ zwischen 0 und $1/2$ eine Ellipse, deren grosse Achse in dem Winkel xOy liegt, wenn der Phasenunterschied kleiner als $1/4$, und in dem Winkel $(-x)Oy$, wenn dieser Unterschied grösser als $1/4$ ist.

Wächst φ darauf von $1/2$ bis 1, so nimmt die Curve im umgekehrten Sinne dieselben Formen wieder an; die verschiedenen Bahnen werden jetzt in entgegengesetzter Richtung durchlaufen: die Drehung ist linksläufig.

Die Werthe von φ , die grösser als 1 sind, geben dieselben Curven, da im Allgemeinen ein Phasenunterschied, der gleich einer ganzen Zahl vermehrt um einen Bruch ist, nur mit diesem Bruch in die Rechnung eingeht.

Harmonische Accorde. — Wenn die Schwingungszahlen M und N sich verhalten wie $p:1$, so kann man schreiben

$$\begin{aligned} x &= k \cos 2\pi(pNt - \varphi), \\ y &= l \cos 2\pi Nt; \end{aligned}$$

entwickelt man nun den Ausdruck von x , so erhält man

$$\begin{aligned} x &= k \cos 2\pi\varphi \left\{ \cos^p 2\pi Nt - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \cos^{p-2} 2\pi Nt \sin^2 2\pi Nt + \dots \right\} \\ &+ k \sin 2\pi\varphi \left\{ \frac{p}{1} \cos^{p-1} 2\pi Nt \sin 2\pi Nt - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{p-3} 2\pi Nt \sin^3 2\pi Nt + \dots \right\}, \end{aligned}$$

oder, da $\cos 2\pi Nt = \frac{y}{l}$ und $\sin 2\pi Nt = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}$,

$$\begin{aligned} x &= k \cos 2\pi\varphi \left\{ \frac{y^p}{l^p} - \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{y^{p-2}}{l^{p-2}} \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right) + \dots \right\} \\ &\pm k \sin 2\pi\varphi \left\{ \frac{p}{1} \frac{y^{p-1}}{l^{p-1}} \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{y^{p-3}}{l^{p-3}} \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Man hat also für $p=2$ (Octave)

$$x = k \cos 2\pi\varphi \left(2 \frac{y^2}{l^2} - 1\right) \pm k \sin 2\pi\varphi \left(2 \frac{y}{l}\right) \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}},$$

für $p=3$ (Duodecime)

$$x = k \cos 2\pi\varphi \left(4 \frac{y^3}{l^3} - 3 \frac{y}{l}\right) \pm k \sin 2\pi\varphi \left(4 \frac{y^2}{l^2} - 1\right) \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}.$$

.....

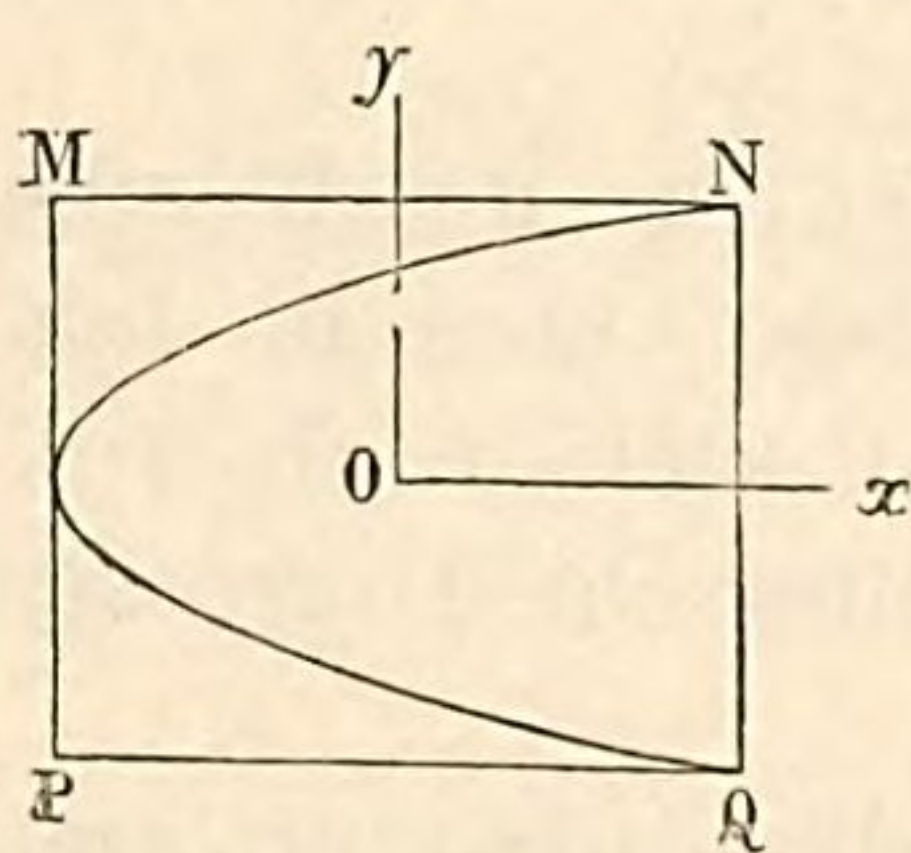


Fig. 137.

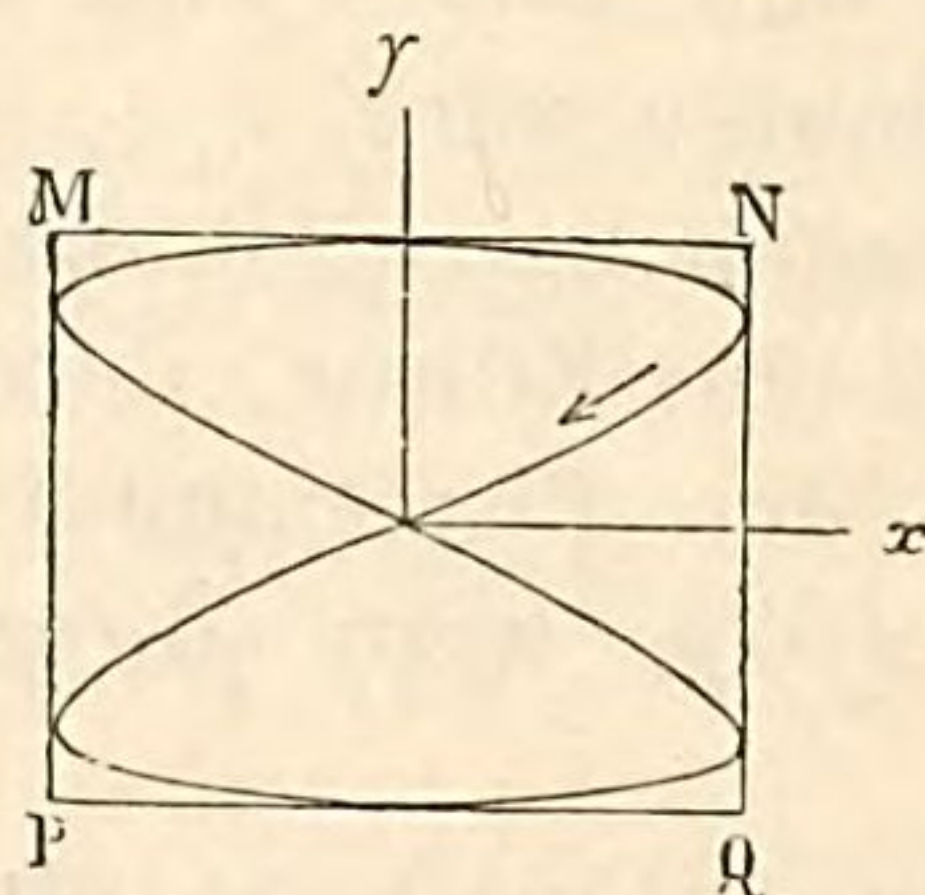


Fig. 138.

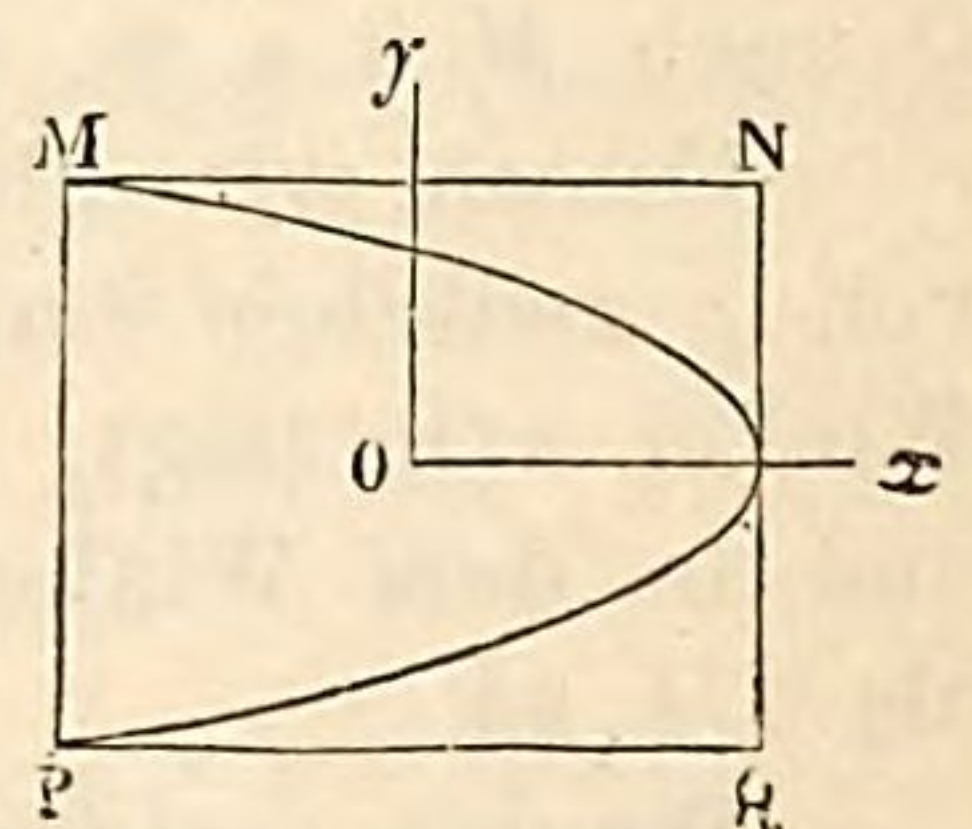


Fig. 139.

Für $p=2$ ist die Curve eine Parabel

$$\begin{aligned} x &= k \left(2 \frac{y^2}{l^2} - 1\right), & \text{wenn } \varphi &= 0, \\ x &= -k \left(2 \frac{y^2}{l^2} - 1\right), & \text{wenn } \varphi &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Ist $\varphi = \frac{1}{4}$, so geht die Gleichung über in

$$x = \pm k \left(2 \frac{y}{l} \right) \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}};$$

die Curve hat alsdann die Form einer 8 und geht durch den Coordinatenanfangspunkt, der gleichzeitig Mittelpunkt und ein mehrfacher Punkt ist. Die Curve hat einen höchsten und einen tiefsten Punkt für

$$x = 0, \quad y = \pm l$$

und vier horizontale Spitzen für

$$y = \pm \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad x = \pm k.$$

Zwischen diesen beiden Figuren liegen bei wechselnder Phase eine Reihe von Formen, die alle dem Rechteck $2k, 2l$ eingeschrieben sind und die man sich dadurch entstanden denken kann, dass die 8 sich in der Mitte einbiegt und ihre Zweige sich einander nähern, so dass zuletzt der parabolische Bogen entsteht.

Für $p = 3$ reducirt sich die Curve auf ein S,

$$\begin{aligned} x &= k \left(4 \frac{y^3}{l^3} - 3 \frac{y}{l} \right), & \text{wenn } \varphi &= 0, \\ x &= -k \left(4 \frac{y^3}{l^3} - 3 \frac{y}{l} \right), & \text{wenn } \varphi &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für $\varphi = \frac{1}{4}$ hat man eine Art 8 mit doppeltem Kreuzungspunkt, deren Gleichung

$$x = \pm k \left(4 \frac{y^2}{l^2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{y^2}{l^2}}$$

lautet: die Curve hat nur einen höchsten und einen tiefsten Punkt an jedem Ende $\pm l$ der verticalen Achse und drei horizontale Scheitel auf jeder Seite $x = \pm k$ des umschriebenen Rechtecks (in $y = 0$ und $y = \pm l \sqrt{\frac{3}{4}}$).

Allgemeiner Fall. — Wenn sich allgemein die Schwingungszahlen M und N der beiden zu einander rechtwinkligen Schwingungen verhalten wie $p:q$, wo p und q relativ prim zu einander sind, so hat die resultirende Curve p Berührungspunkte mit jeder

der Seiten ($x = \pm k$) und q Berührungspunkte mit jeder der Seiten ($y = \pm l$) des Rechtecks $2k, 2l$. In dem Zeitintervall $pT = q\tau$ (wo T und τ die Perioden $\frac{1}{M}$ und $\frac{1}{N}$ der beiden Bewegungen sind), wird nämlich x p mal gleich k und y q mal gleich l . Da die Curve ausserdem stetig verläuft, so hat sie p horizontale und q verticale Scheitel. Am Ende der Zeit $pT = q\tau$ kehrt der bewegliche Punkt an seinen Ausgangspunkt zurück: es wird also dieselbe Bahn unendlich oft unter denselben Bedingungen durchlaufen.

Geometrische Darstellung von Lissajous. — Lissajous¹⁾ hat ein elegantes Mittel angegeben, um die verschiedenen Curven zu construiren, die demselben Verhältniss der Componenten entsprechen.

Wenn man die Einheit der Zeit passend wählt, so kann man die beiden Verschiebungen immer in die Form

$$\begin{aligned} x &= k \cos m(t - \Theta), \\ y &= l \cos t \end{aligned}$$

bringen, wo m eine ganze Zahl oder einen Bruch bezeichnet.

Man zieht nun die Curve $ABCDE\dots$, die die Gleichung $x = k \cos m(t - \Theta)$ darstellt, und construirt andererseits den geraden Kreiscylinder $IKLN$ vom Durchmesser $2l$; darauf rollt man die Curve $ABCDE\dots$ auf den Cylinder auf, und zwar so, dass aA mit der Erzeugenden IK zusammenfällt; projecirt man nun die Curve auf die Meridianebene IN , so erhält man die gesuchte Figur.

Betrachtet man nämlich einen Punkt M der Curve auf dem Cylinder und die Projection P dieses Punktes auf die Ebene IN , so hat man, da der Bogen der Definition nach gleich t ist,

$$OQ = l \cos t = y$$

und

$$PQ = Mm = x.$$

Nun sind aber PQ und OQ die Coordinaten des Punktes P in Bezug auf die Achse Ox und den Durchmesser Oa des Cylinders. Der geometrische Ort der Punkte P ist also die Bahn der resultirenden Bewegung.

Fig. 140 und 141 beziehen sich auf den Fall, wo $m = 2$ ist (Octave). Da $m = \frac{p}{q}$ ist, so durchläuft der Punkt M im Allgemeinen p vollständige Sinuslinien zu beiden Seiten des Mittelkreises, indem er im Ganzen q vollständige Umläufe um den

¹⁾ Lissajous, Ann. de chim. et de phys. (3), 51, 147; 1857.

Cylinder macht. Es ist also klar, dass die Bahn des Punktes P p mal jede der Linien $x = \pm k$ und q mal jede der Linien $x = \pm l$ berührt.

Wenn die beiden Componenten dieselben bleiben, der Phasenunterschied sich aber ändert, wenn sich also der Punkt A auf der

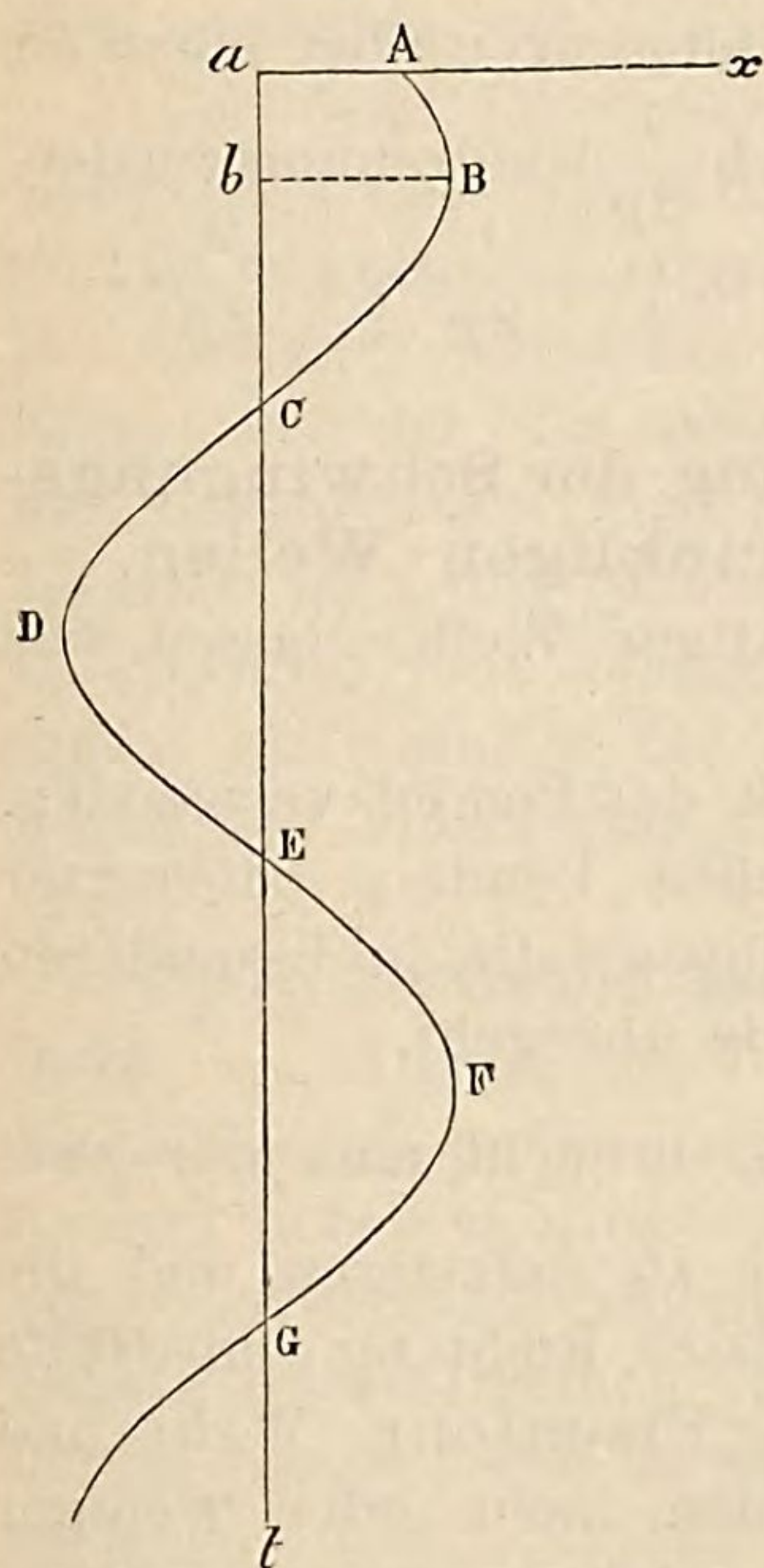


Fig. 140.

Sinuslinie $ABCDE \dots$ verschiebt, so hat man dieselbe Curve auf den Cylinder aufzurollen, nur fällt die Projectionsebene mit einer anderen Meridianebene zusammen. Anstatt aber die Projectionsebene zu ändern, können wir uns diese Ebene auch fest denken und annehmen, dass sich der Cylinder um seine Achse dreht, und zwar um den Winkel $\frac{p}{q} \varphi^1) = \psi$. Hat man also die

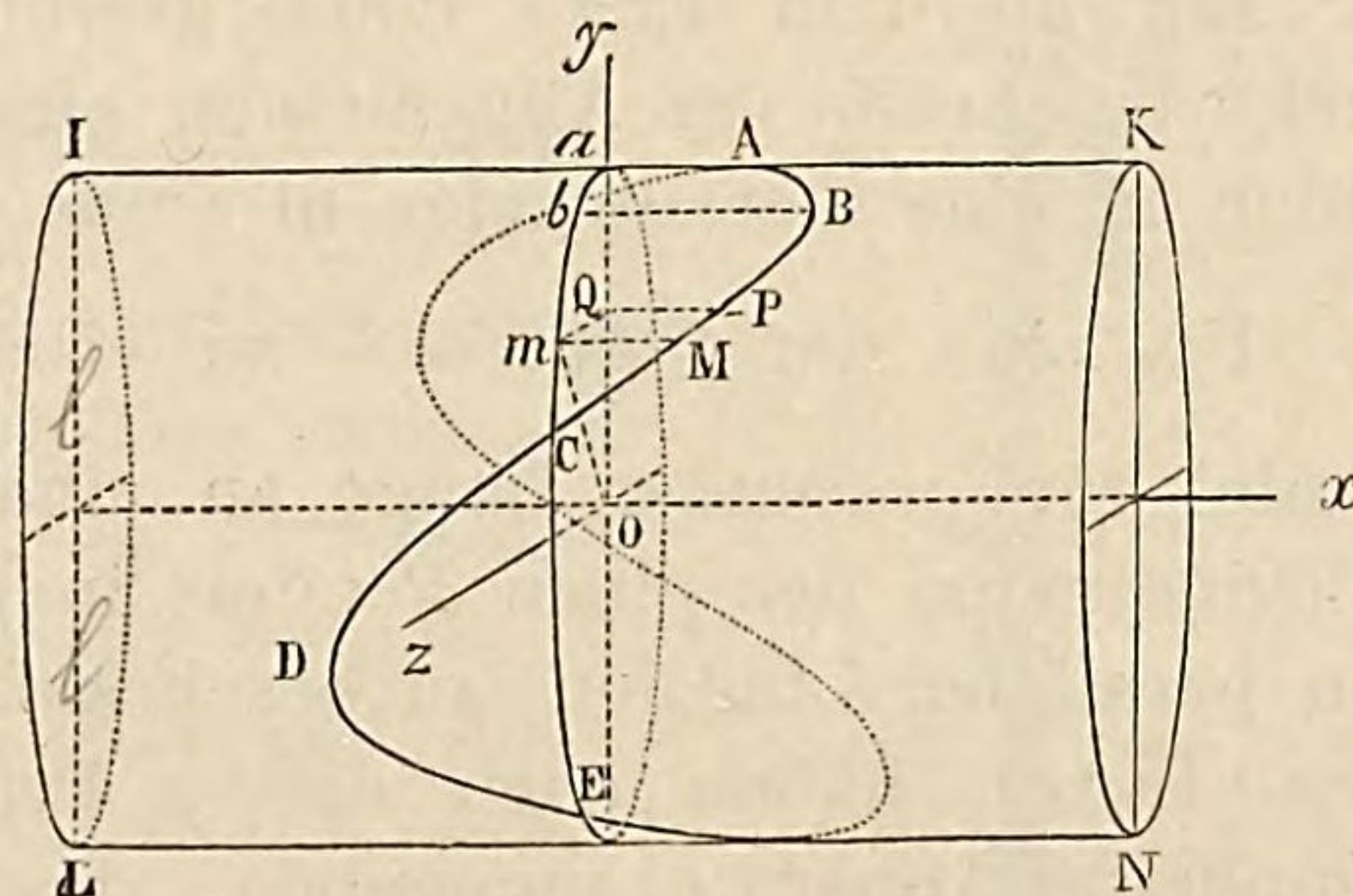


Fig. 141.

Curve $ABCDE \dots$ auf einen Glascylinder gezeichnet und dreht diesen um seine Achse, so sieht ein in der Richtung Oz blickendes Auge nach einander alle Formen der Curve, die dem betreffenden

Werthe von $\frac{p}{q} = m$ entsprechen. Man kann auch, wie Terquem²⁾

angegeben hat, die Sinuslinien k aus Blech ausschneiden, die alsdann auf den Cylinder l aufgerollt werden: es entstehen auf diese Weise Modelle, die man nur im parallelen Licht vor einem Schirm zu

¹⁾ Dieser Werth ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Construction der Curve. Man kann ihn auch aus der identischen Gleichung $\frac{M}{N} \Theta = 2\pi \varphi$ ableiten; denn da $\frac{M}{N} = \frac{p}{q}$ ist, so erhält man $\Theta = 2\pi \varphi \frac{q}{p}$ oder $\Theta = 2\pi \psi$.

²⁾ Terquem, Séances de la Société française de physique; 1876, S. 102.

drehen braucht, um auf diesem die verschiedenen Formen jeder Curvenart als Schattenbilder zu erhalten.

Die vollständige Figur entsteht, wenn sich der Cylinder um $\frac{1}{p}$ Umdrehung dreht, d. h. wenn $\psi = \frac{1}{p}$ ist. Da sich auf dem Schirm die vorderen und hinteren Theile der Cylindercurve über einander lagern, so kehrt dieselbe Figur schon nach $\frac{1}{2p}$ Umdrehung wieder: es entspricht diese Form den Phasen $\psi = 0, \psi = \frac{1}{2p}, \psi = \frac{2}{2p} \dots$

395. Apparate für die Darstellung der Schwingungsfiguren zweier zu einander rechtwinkligen Wellen. — Die Schwingungsfiguren zweier rechtwinkliger Wellen lassen sich leicht beobachten.

Man kann zunächst zu diesem Zweck das Pendel verwenden.

Ein an dem Ende eines gewöhnlichen Pendels befestigter Punkt beschreibt im Allgemeinen eine Ellipse, die in besonderen Fällen in eine Gerade oder in einen Kreis übergeht.

Um eine der Figuren $\frac{p}{q}$ zu erhalten, braucht man nur zwei Pendel von passender Länge an einander zu befestigen und die Schwingungen des einen Pendels in gewisser Richtung (mit Hülfe von parallelen Linealen) zu beschränken. Eisenlohr, Mohr und Knoblauch haben nach diesen Principien mehr oder weniger complicirte Apparate angegeben. Lymann bringt unter der Spitze des einen Pendels eine berusste Glasplatte an, die von der Verlängerung eines zweiten Pendels über seinen Aufhängungspunkt hinaus getragen wird; er bekommt auf diese Weise eine Curve, die von dem Verhältniss der Längen beider Pendel und dem Winkel zwischen ihren Schwingungsebenen abhängt.

396. Wheatstone'sches Kaleidophon. — Wheatstone beobachtete diese Erscheinungen zuerst und zwar brachte er sie mit seinem Kaleidophon (379) hervor. Wenn einer der Stäbe aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird, so geräth er in Schwingungen, die eben sein können, meistens aber windschief sind und durch Superposition zweier zu einander rechtwinkligen Systemen von ebenen Schwingungen entstehen.

Wir wollen beispielsweise einen Stab mit quadratischem Querschnitt betrachten: biegt man ihn mit dem Finger parallel zu einem Seitenpaar des Quadrats, so führt er ebene Schwingungen aus, und sein Endpunkt durchläuft eine zu diesem Seitenpaar

parallele Gerade; parallel zu dem anderen Seitenpaar gebogen, beschreibt er ebenfalls eine zu diesem zweiten Paar parallele Gerade; biegt man ihn in schiefer Richtung, so erhält man als Bahn des Endpunktes eine Ellipse.

Hat der Stab einen rechteckigen Querschnitt, dessen Seiten sich verhalten wie $p:q$, so entsteht die Figur $p:q$.

Bei dem Universal-Kaleidophon, das fast gleichzeitig von Lippich¹⁾ und von Melde²⁾ angegeben wurde, trägt ein langes Stahlband, das an einem Ende gut befestigt ist, an seiner Spitze ein zweites Band, dessen Ebene auf der des ersten rechtwinklig steht und dessen Länge man beliebig ändern kann: versetzt man die Bänder in Schwingungen, so zeichnet eine spiegelnde Kugel auf der Spitze des Ganzen die Figur, die dem gewünschten Verhältniss $p:q$ entspricht.

397. Optische Methode von Lissajous. — Lissajous³⁾ hat eine sinnreiche Methode angegeben, um die Schwingungsfiguren hervorzubringen, und daraus ein sehr genaues Verfahren abgeleitet, um zwei Stimmgabeln oder allgemein zwei beliebige Instrumente bis auf ein gewisses Intervall abzugleichen.

Bei der Lissajous'schen Methode, die als sogenannte *optische Methode* bekannt geworden ist, wird die Figur von einem Lichtstrahl beschrieben, der nach einander von zwei Stimmgabeln reflectirt worden ist. Diese stehen in dem gewünschten Intervall und tragen jede an dem Ende der einen Zinke einen kleinen Spiegel (oder eine kleine Linse), während die andere Zinke mit einem Gegengewicht versehen ist.

Optische Darstellung der Schwingungen einer Stimmgabel. — Wir wollen zuerst eine einzige Stimmgabel D betrachten, auf deren

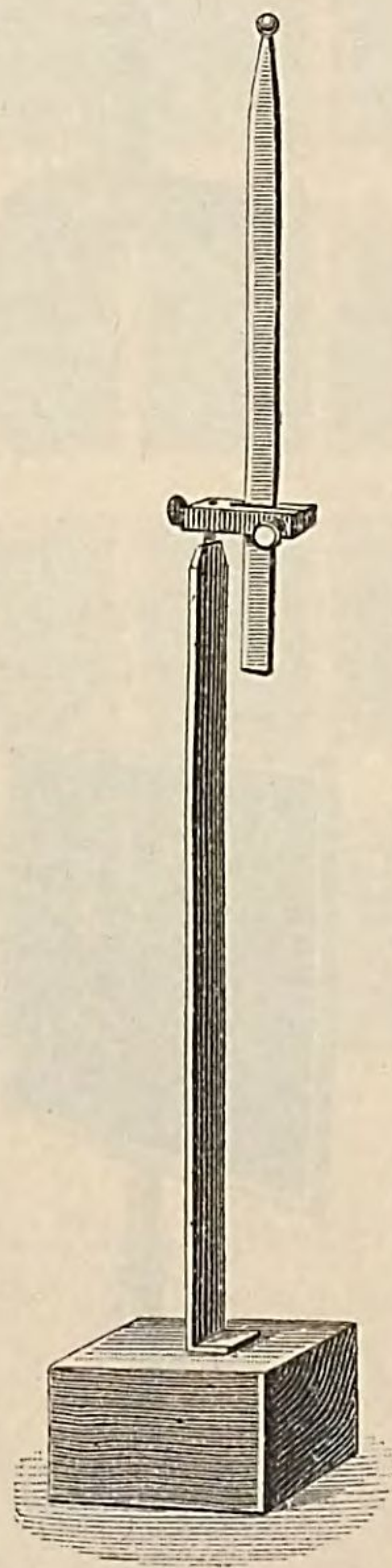


Fig. 142.

¹⁾ Lippich, Sitzungsber. d. Wien. Acad. 45, und Pogg. Ann. 117, 161; 1862.

²⁾ Melde, Pogg. Ann. 115, 117; 1862. Melde hat einen genauen Atlas dieser Figuren in seiner „Lehre von den Schwingungscurven“, Leipzig 1864, veröffentlicht.

³⁾ Lissajous, loc. cit.

Spiegel mit Hilfe einer Linse L ein Bündel Sonnenstrahlen gerichtet wird: dies wird gespiegelt, trifft den Hülsspiegel M und

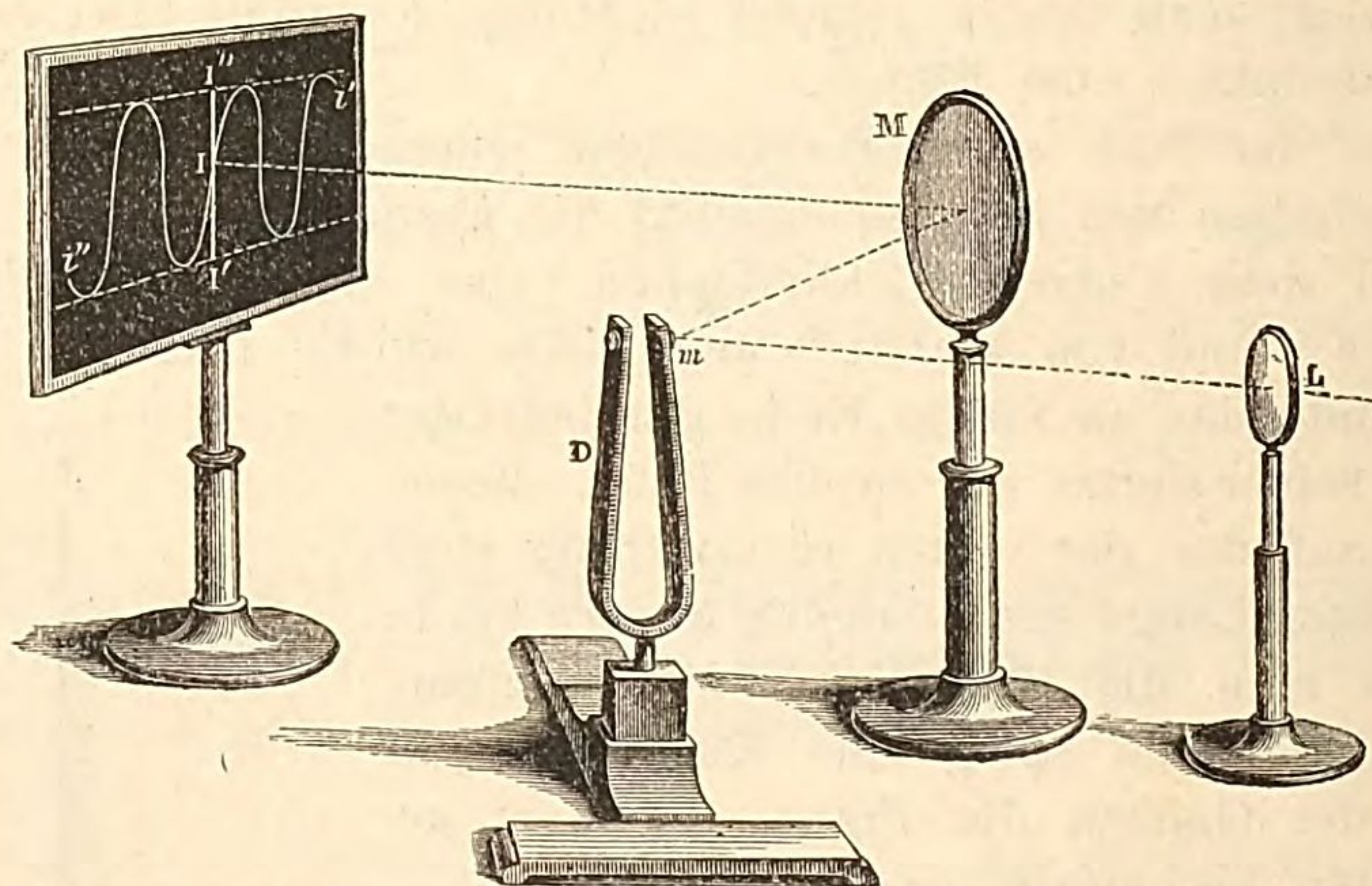


Fig. 143.

wird zuletzt auf einem Schirme aufgefangen. Schwingt die Stimmgabel, so bewegt sich der leuchtende Punkt auf dem Schirm längs

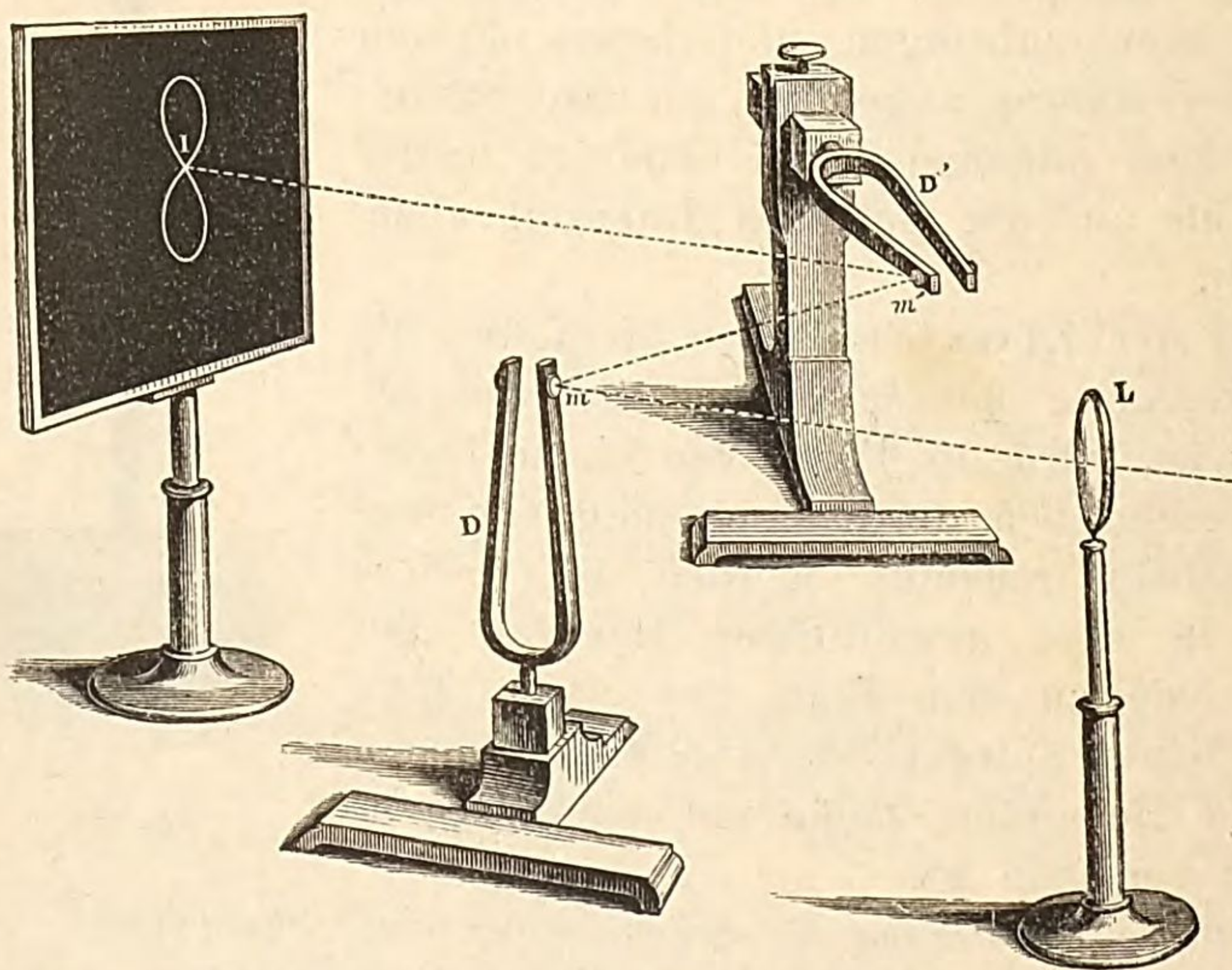


Fig. 144.

der Geraden II' parallel zu der Ebene der Stimmgabelzinken; die Gerade scheint in Folge dessen in ihrer ganzen Ausdehnung zu leuchten, weil die Eindrücke auf der Netzhaut nachwirken.

Will man die auf einander folgenden Eindrücke trennen, so lässt man den Spiegel M um die verticale Achse rotiren: es ent-

steht alsdann auf dem Schirm eine Sinuslinie, die gewissermassen die optische Zeichnung der Schwingung ist.

Optische Darstellung zweier zu einander rechtwinkligen Wellen. — An Stelle des Spiegels M wollen wir nun eine zweite Stimmgabel D' setzen, deren Schwingungsebene auf der der Stimmgabel D senkrecht steht. Befindet sich die Stimmgabel D in Ruhe und schwingt D' allein, so beschreibt der auf den Schirm ge-

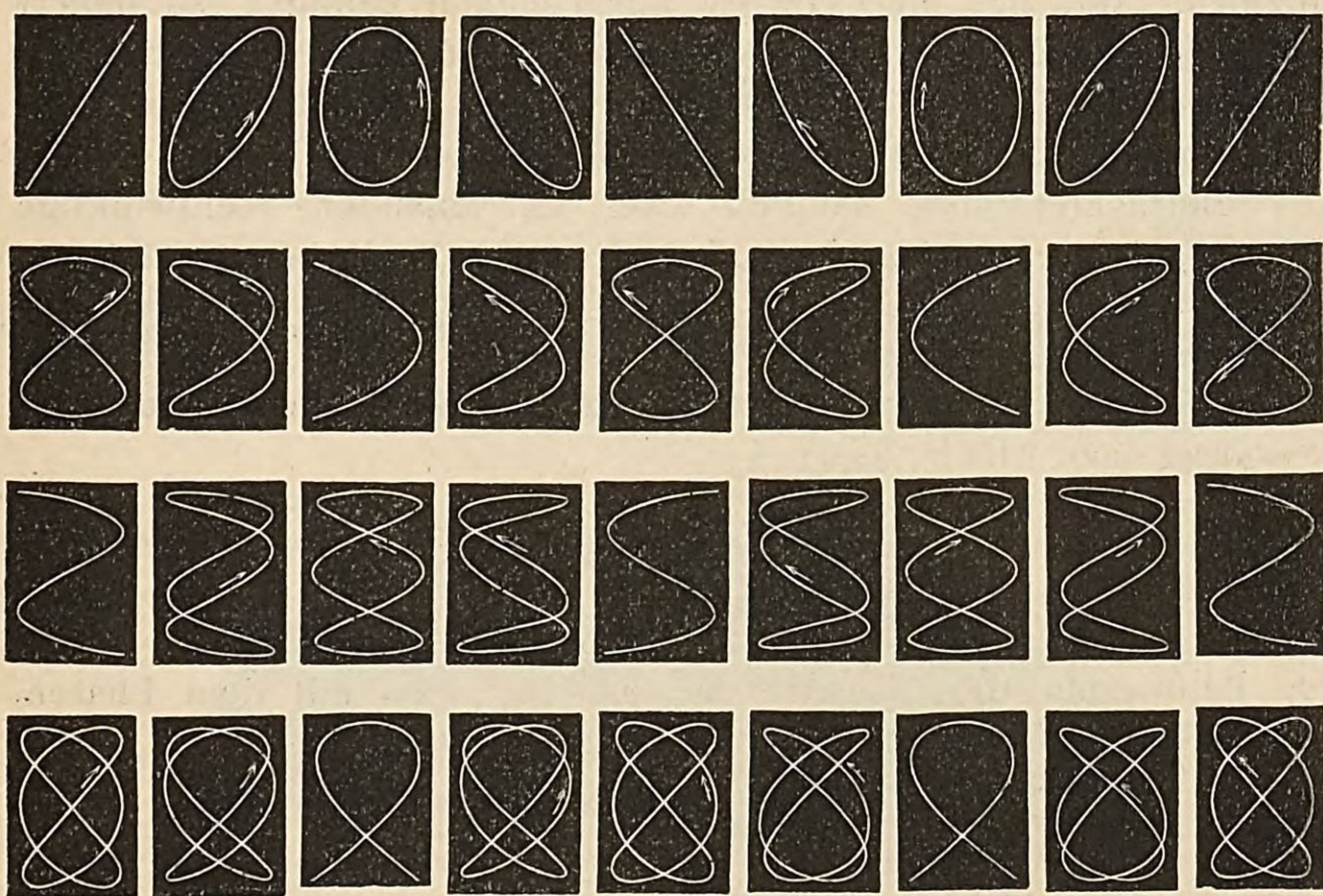


Fig. 145.

worfene Lichtpunkt eine kleine Gerade, die der Zinkenebene von D' parallel und folglich rechtwinklig zu der kleinen Geraden ist, die bei den Schwingungen der Stimmgabel D entstand. Lässt man beide Stimmgabeln gleichzeitig schwingen, so erscheint eine von den Formen der für das Intervall $D':D$ charakteristischen Curven.¹⁾

Die nebenstehenden Figuren,²⁾ die der Lissajous'schen Abhandlung entlehnt sind, stellen die hauptsächlichsten Formen dar, die sich auf die fundamentalen Accorde (Gleichklang, Octave,

¹⁾ Die Curve erscheint zusammenhängend, wenn sie in weniger als $\frac{1}{15}$ Secunde durchlaufen wird; anderenfalls scheint sie gleichsam zu zittern, wie wenn sich eine dunkle Welle schnell längs der leuchtenden Linie bewegte.

²⁾ Bei diesen Figuren steht die tiefere Stimmgabel, wie wir bisher vorausgesetzt haben, vertical und schwingt am kräftigsten ($l > k$); die Phasen sind negativ gezählt und auf die längste Periode bezogen.

Duodecime und Quinte) beziehen. Die Zeichnungen stimmen genau mit den von der Theorie vorgeschriebenen Curven überein; es ist dies ein Beweis dafür, dass die Schwingungen pendelartige sind.

Verschiedene Formen der Lissajous'schen Schwingungsfiguren. — Die besondere Form der Curve hängt von dem Phasenunterschied¹⁾ ab, dieser wiederum von der Art des Anstreichens, d. h. von einer Menge unbestimmter Bedingungen, die dem Zufall überlassen bleiben. Hat sich eine gewisse Form einmal gebildet, so dauert sie auch unbegrenzt lange an, wenn die Stimmgabeln genau abgeglichen sind.²⁾ Anderenfalls ändert sich die Schwingungsfigur und nimmt allmählich alle Formen des Typus an.³⁾

Betrachtet man nämlich zwei zu einander rechtwinklige Wellen, deren Schwingungszahlen sich verhalten wie $m + \varepsilon : 1$ (wo m stets das Verhältniss $\frac{p}{q}$ der Zahl der auf einander folgenden Schwingungen Ox zu der der Schwingungen Oy bedeutet und $p > q$ vorausgesetzt wird), also

$$\begin{aligned} x &= k \cos 2\pi (mNt + \varepsilon Nt - \varphi), \\ y &= l \cos 2\pi Nt, \end{aligned}$$

so kann man die überzähligen Schwingungen mit dem Phasenunterschied zusammenfassen und

$$\Phi = \varphi - \varepsilon Nt$$

setzen.

¹⁾ Um den Einfluss des Phasenunterschieds zu zeigen, gebraucht man am besten den zu diesem Zweck von Lissajous construirten Apparat. Auf einer Holzunterlage sind zwei Federn aus Stahl befestigt, die eine horizontal, die andere vertical; jede trägt an ihrem Ende eine Linse. Durch die beiden Linsen, die einander gegenüber stehen, gehen die Strahlen einer starken Lichtquelle, die auf einem Schirm das Bild eines Spaltes hervorrufen. Zwischen den beiden Federn dreht sich eine Achse mit zwei Excentern, von denen jeder auf eine der Federn wirkt. Durch verschiedene Stellung der Excenter zu einander kann man in den Schwingungen der beiden Linsen jeden gewünschten Phasenunterschied hervorrufen, dem die auf dem Schirm entstehende Curve entspricht.

²⁾ Bei den Stimmgabeln, die auf elektrischem Wege in Schwingungen erhalten werden und Gegengewichte mit Feinverstellung haben, kann man die Schwingungsfigur ganz beständig erhalten oder sie so langsam abändern, als man will.

³⁾ Vereinigt man mit Hülfe des Apparats von Lissajous und Desains (388) die zu einander rechtwinkligen Schwingungen zweier Stimmgabeln M und N , so erhält man eine Curve, die die beständige Änderung der Schwingungsfigur $M:N=p:q$ erkennen lässt.

Da sich der Phasenunterschied mit der Zeit ändert, so wechselt die Curve ihre Form und zeigt nach einander die verschiedenen Figuren.

Da sich Φ um 1 in der Zeit $\frac{1}{\varepsilon N}$ ändert, so nimmt Ψ um 1 in der Zeit $\frac{p}{q \varepsilon N}$ zu; weil sich Ψ aber um $\frac{1}{2p}$ ändern muss, damit aus einer einfachen Form die folgende entsteht, so erfordert dieser Übergang die Zeit

$$\Theta = \frac{1}{2q\varepsilon N}.$$

Auf diese Weise zeigt die Änderung der Curve den Mangel an Übereinstimmung beider Töne, und zwar liefert die Schnelligkeit der Änderung ein Maass für die Grösse der Abweichung.

Das Verfahren ist ganz allgemein gültig und kann bei der Untersuchung jeder Art von Wellenbewegung angewendet

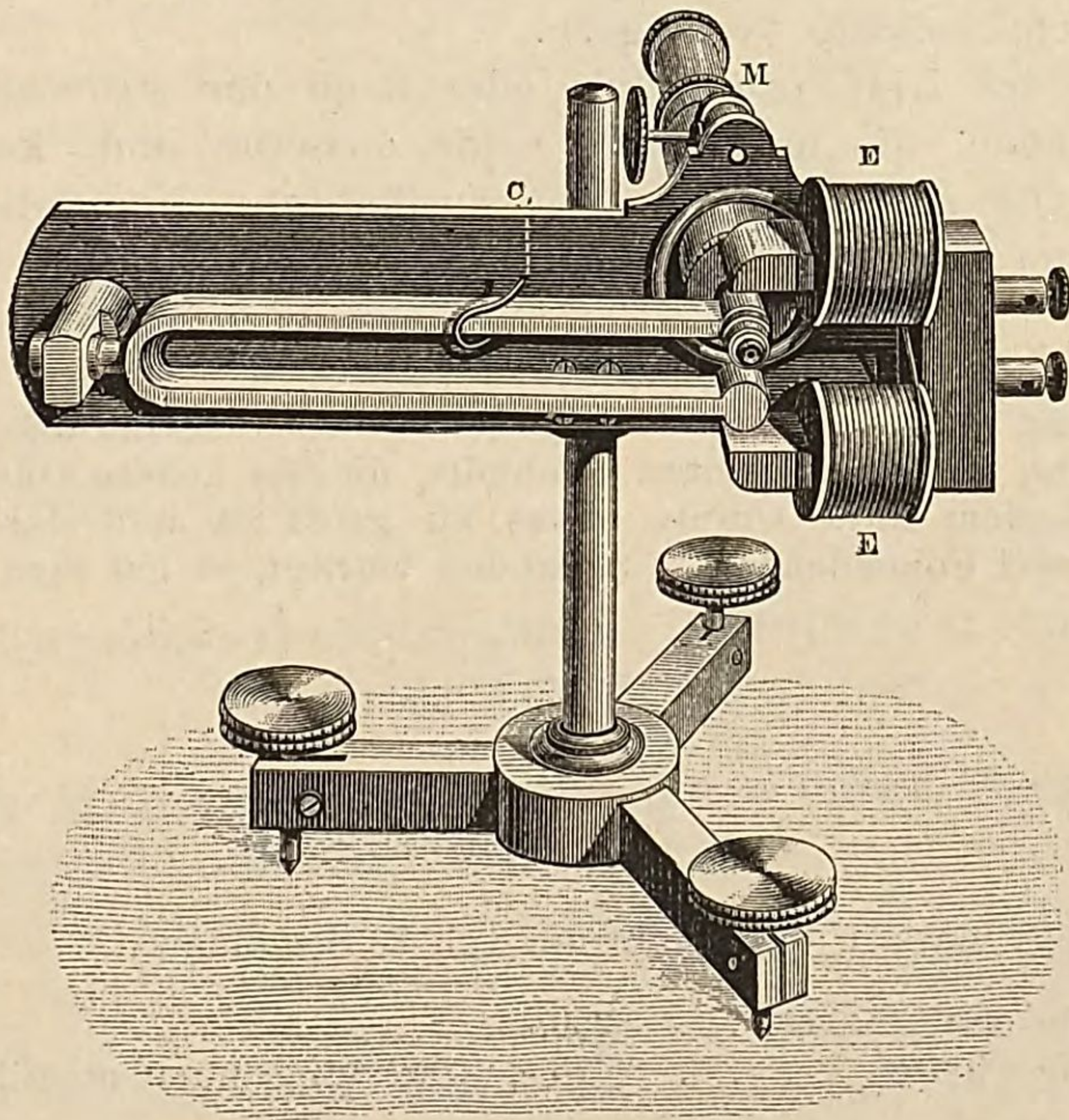


Fig. 146.

werden.¹⁾ Man braucht diese Bewegung nur rechtwinklig mit der einer bekannten Stimmgabel zusammen zu setzen.

¹⁾ Man kann auch auf diese Weise die Schwingungen einer Gas-säule untersuchen. Mach, Optisch-akustische Versuche und Journal de physique 2, 338; 1873.

Optischer Comparator. — Lissajous hat zu diesem Zweck seinen optischen Comparator angegeben. Es ist dies ein Mikroskop, bei dem Ocular und Objectiv von einander unabhängig sind: das Ocular ist unveränderlich auf einem festen Fuss befestigt, während das Objectiv an einer Zinke der als Normal dienenden Stimmgabel sitzt (die andere Zinke trägt ein Gegengewicht). Man versetzt nun die Stimmgabel in Schwingung und stellt das Mikroskop auf einen Punkt des zu untersuchenden Körpers (Stimmgabel, Saite, Kapselmembran u. s. w.) ein, der derartig in dem Gesichtsfelde angebracht ist, dass seine Schwingungen rechtwinklig zu denen der Stimmgabel verlaufen.

Fig. 146 stellt diesen Apparat in der Form dar, die ihm v. Helmholtz gegeben hat: *M* ist die Fassung des *Vibrationsmikroskops*, dessen Objectiv von der Stimmgabel *D* getragen wird. Ein kleines Laufgewicht *C* dient dazu, die Tonhöhe der Stimmgabel zu verändern; mittelst des Elektromagneten *E* kann man die Dauer des Versuchs beliebig verlängern.

Nach der Lissajous'schen oder nach der stroboskopischen (362) Methode, die im Grunde beide dasselbe sind, kann man, ohne das Ohr zu gebrauchen, ein musikalisches Intervall mit fast unbegrenzter Genauigkeit bestimmen.¹⁾

¹⁾ Wenn man z. B. eine Stimmgabel, die 250 Schwingungen in 1 Secunde macht, mit einer zweiten combinirt, die die höhere Quinte giebt, wenn ausserdem diese Quinte etwas zu gross ist und das Intervall zwischen zwei Coincidenzen 25 Secunden beträgt, so hat man

$$25 = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \varepsilon \cdot 250}$$

oder

$$\varepsilon = \frac{1}{25\,000}.$$

Hieraus folgt, dass in dem Zeitraum von 25 Secunden

die erste Gabel . . . 6250,
die zweite 9375 + $\frac{1}{4}$ Schwingungen ausführt.

Giebt die eine der Stimmgabeln das normale *a* mit 435 Schwingungen an und will man die zweite auf denselben Ton abgleichen, während die Schwingungsfigur in 1 Minute von einer Coincidenz in die andere übergeht, so bedeutet dies, dass die zweite Gabel in 1 Minute oder während der Dauer von 26 000 Schwingungen $\frac{1}{2}$ Schwingung gewonnen hat; der Fehler ε beträgt also $\frac{1}{5200}$.

Diese Beispiele zeigen die grosse Genauigkeit, die das Verfahren zulässt.

398. Foucault'scher Versuch.¹⁾ — Wir können diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne den merkwürdigen Versuch zu erwähnen, den Foucault mit einem schwingenden Stabe angestellt hat. Er befestigte einen Stahldraht von 2 mm Durchmesser und ungefähr 20 cm Länge mit seinem einem Ende in einem massiven Block, den er auf einer Drehbank anbrachte. Diese blieb zuerst in Ruhe: entfernte er alsdann den Draht aus seiner natürlichen Lage, so gerieth er in Schwingungen, und sein freies Ende beschrieb im Allgemeinen eine Ellipse, die sich je nach der Structur des Drahtes mehr oder weniger schnell änderte; es ist dies der Wheatstone'sche Versuch. Setzt man, während sich die Schwingungsfigur in dieser Weise ändert, plötzlich die Drehbank in Gang, so bleibt die Art der Schwingung bestehen, die im Momente des Angehens gerade ausgeführt wird: sei dies nun Kreis, Ellipse oder Gerade, die Figur erhält sich so lange unveränderlich, als die Achse in Bewegung ist. Wird die Drehbank angehalten, so treten die Änderungen von Neuem auf. Man lässt nun Alles zur Ruhe kommen und setzt die Drehbank alsdann wieder in Gang; während sich der Draht nun um seine Längsachse dreht, versetzt man ihn in einer beliebigen Ebene in Schwingung. Diese bleibt dann eben (ohne sich wie im Ruhezustande zu ändern); ebenso erhält sich die Schwingungsebene unveränderlich und wird nicht durch die Bewegung der Drehungsachse der Bank mitgerissen. Im Gegentheil, je schneller diese sich dreht, um so sicherer erhält sich die Schwingungsebene (55).

III. Zusammensetzung einer schwingenden und einer translatorischen Bewegung.

399. Änderung der Wellenlänge durch Verschiebung der Tonquelle oder des Beobachters. — Wenn einer Tonquelle eine translatorische Bewegung erteilt wird, so werden offenbar die auf einander folgenden Wellen nach vorn zusammengedrängt und nach hinten von einander entfernt, während sie an den Seiten dieselben Entfernungen beibehalten, als wenn die Tonquelle an ihrer Stelle bliebe. Die Wellenlänge wird also vergrößert oder verkleinert, je nachdem sich die Tonquelle nähert oder entfernt.

Doppler's Formeln. — Doppler,²⁾ dem wir diese wichtige Bemerkung verdanken, stellte folgende Berechnung auf:

¹⁾ Foucault, Bulletin de la Société philomatique, 1851, und Travaux scientifiques; Paris 1878, S. 392.

²⁾ Doppler, Abhandl. d. k. Böhm. Ges. d. Wissensch. (5), 2, 465; 1842.

Es seien λ die normale Wellenlänge der ausgesandten Schwingung,
 λ' die neue Wellenlänge,
 V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle,
 u die Geschwindigkeit, mit der sich die Tonquelle bewegt.

Wenn sich während der Dauer τ einer Schwingung die Tonquelle von O nach O' bewegt, so ist die Welle, die Anfangs in

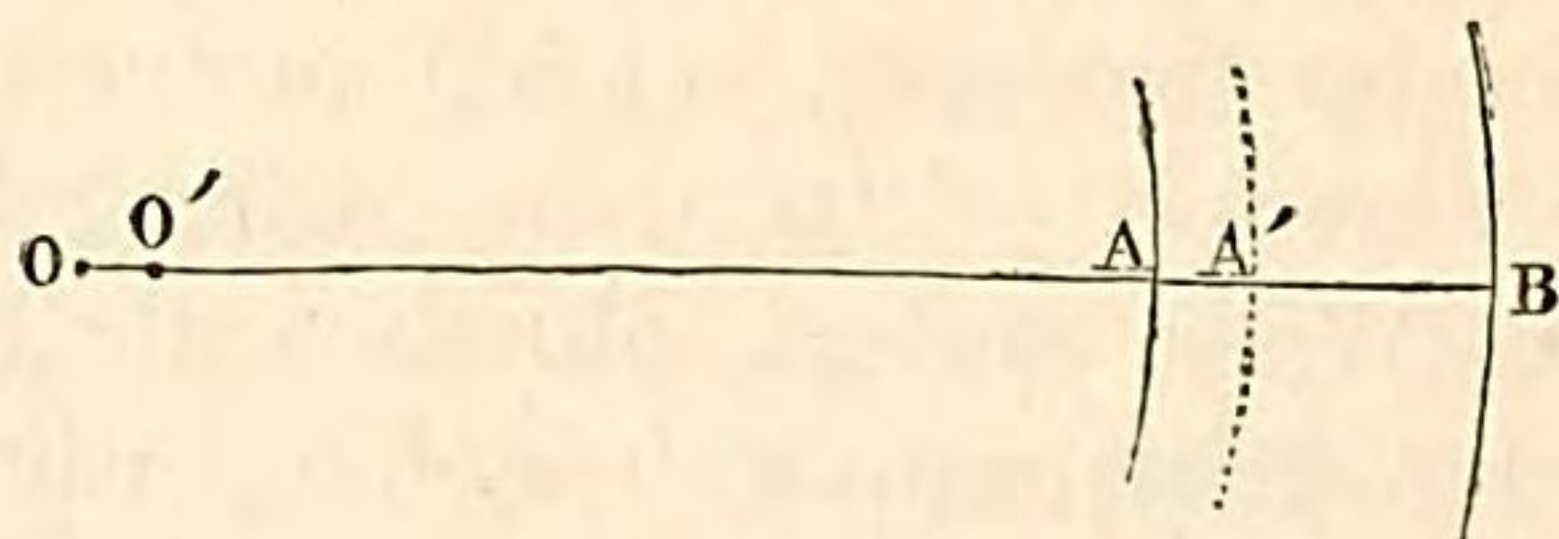


Fig. 147.

A war und während dieser Zeit τ nach B in die Entfernung λ gelangt ist, durch die Welle $A'B = AB - OO'$ zu ersetzen, so dass man hat

$$\lambda' = A'B = \lambda - u\tau$$

oder, da $\tau = \frac{\lambda}{V}$,

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{u}{V}\right).$$

In der zur Verschiebung entgegengesetzten Richtung hat man

$$\lambda'' = \lambda \left(1 + \frac{u}{V}\right).$$

Senkrecht zur Linie OO' wird die Wellenlänge nicht geändert. Bleibt die Tonquelle unbeweglich und bewegt sich der Beobachter mit der Geschwindigkeit u , so hat man

$$\lambda'_1 = \lambda \frac{1}{1 + \frac{u}{V}}$$

und

$$\lambda''_1 = \lambda \frac{1}{1 - \frac{u}{V}}.$$

400. Messungen über die Änderung der Tonhöhe, die aus der Bewegung der Tonquelle hervorgeht. — *Versuche von Buys-Ballot, Scott Russell und Vogel.* — Die obigen

Schlussfolgerungen lassen sich leicht an einer Tonquelle nachweisen, und zwar bieten die Eisenbahnen die beste Gelegenheit hierzu. Die Pfeife einer Locomotive, die stündlich 50 km zurücklegt, hat eine Geschwindigkeit von 14 m in der Secunde, also $\frac{1}{24}$ der Schallgeschwindigkeit. Der Ton der Pfeife wird folglich je nach dem Sinne der Bewegung um einen halben Ton erhöht oder erniedrigt. Wenige Jahre nach der Veröffentlichung von Doppler's Abhandlung stellte Buys-Ballot¹⁾ auf der Eisenbahn von Utrecht nach Maarsen einige Versuche an, die diese Folgerungen bestätigten.

Um dieselbe Zeit führte Scott Russell²⁾ ähnliche Messungen aus; wir verdanken ihm ausserdem folgende merkwürdige Beobachtung: da man das Geräusch eines Zuges unter einer Brücke wegen der Reflexion so auffassen kann, als rühre es von zwei Zügen her, die in entgegengesetzter Richtung mit derselben Geschwindigkeit (die wir hier immer als 50 km in der Stunde annehmen) fahren, so wird das Ohr durch die Dissonanz der Secunde unangenehm berührt. Damit man eine Terz hört, müsste die Geschwindigkeit mehr als 120 km in der Stunde betragen.

Vogel³⁾ hat endlich die Versuche von Buys-Ballot wieder aufgenommen und auf der Eisenbahn von Cöln nach Minden eine Reihe von sehr sorgfältigen Beobachtungen angestellt, die die Richtigkeit der Doppler'schen Formeln bestätigen.

Fizeau'scher Versuch. — Da die Geschwindigkeit, die man dem tönenden Körper ertheilen muss, um die Tonhöhe zu ändern, nicht sehr gross zu sein braucht, so unternahm es Fizeau,⁴⁾ die Erscheinung in seinem Laboratorium zu untersuchen. Zu diesem Zweck construirte er ein Instrument, das gewissermaassen die Umkehrung des Savart'schen Rades ist, da der Carton an dem rotirenden Rade sitzt, während die Zähne an der Innenseite eines Kreisbogens befestigt sind, der in horizontaler Richtung über der Aussenseite des Rades angebracht ist. Bei einer gewissen Umdrehungsgeschwindigkeit hört der Beobachter hinter dem Apparat z. B. *c*, während er *e* hört, wenn er vor dem Apparat steht, und in den Zwischenstellungen alle zwischen diesen beiden Noten liegenden Töne. Um den Versuch noch wirkungsvoller zu machen, bringt man zwei gleichgezähnte Bogen an, den einen oberhalb und den anderen unterhalb des Rades. Da die rotirende Bewegung für die beiden Bogen den entgegengesetzten Sinn hat, so nimmt

¹⁾ Buys-Ballot, Pogg. Ann. **67**, 321; 1845.

²⁾ Scott Russell, Brit. Ass. Reports, 1849, 2, S. 30.

³⁾ Vogel, Pogg. Ann. **158**, 287; 1876.

⁴⁾ Fizeau, Bulletin de la société philomatique, 1848, und vollständiger in Ann. de chim. et de phys. (4), **19**, 211; 1870.

der Beobachter nach einander beide Töne wahr, ohne seinen Platz wechseln zu müssen.

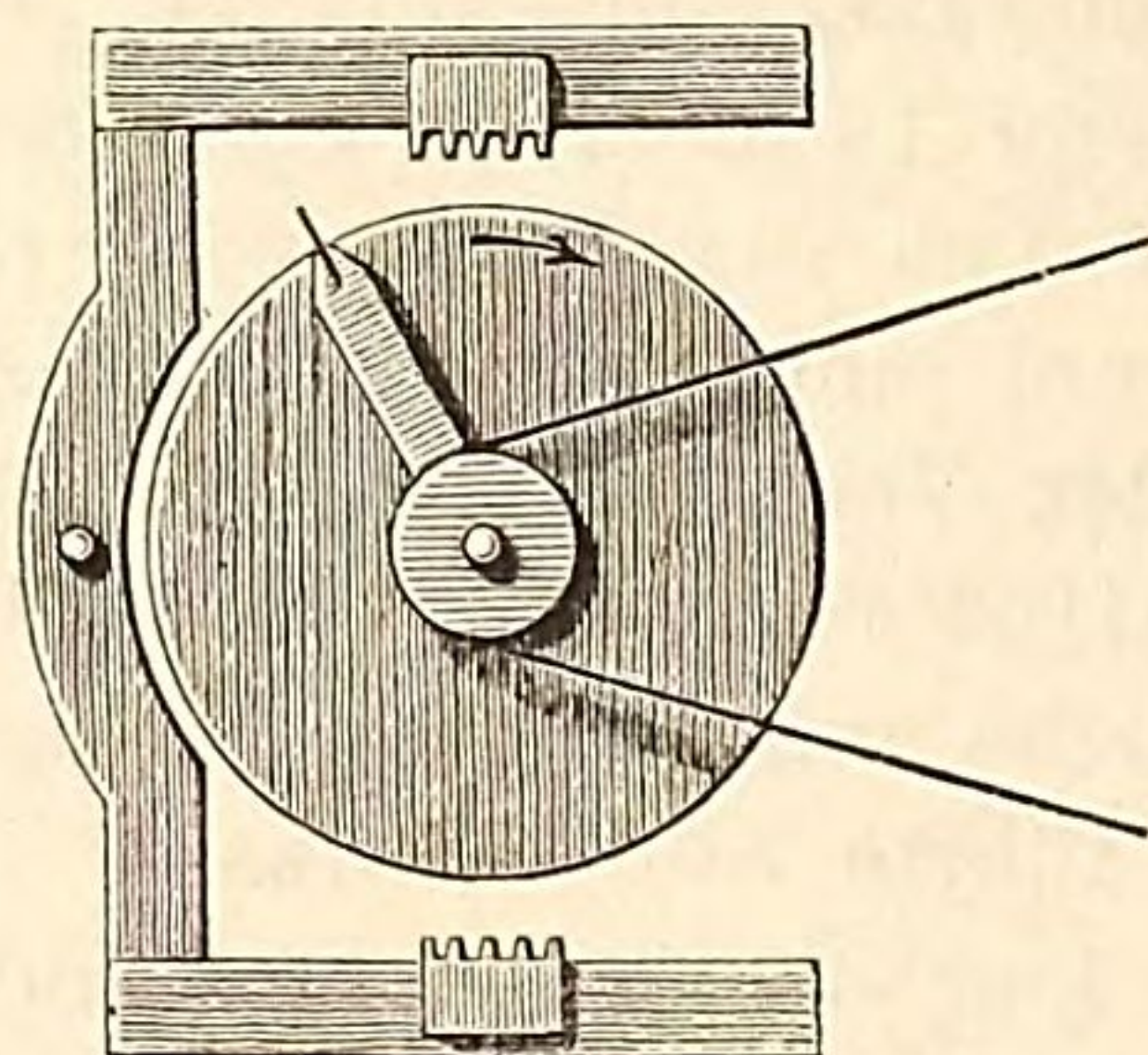


Fig. 148.

Nach demselben Princip hat Mach¹⁾ einen Apparat construirt, der hauptsächlich aus einer Pfeife besteht, die am Ende einer hohlen Röhre angebracht ist und mit dieser durch eine Handwelle in schnelle Drehung versetzt werden kann. Die Änderung der Tonhöhe ist auch hier recht deutlich, obwohl der Apparat weniger vollkommen als der Fizeau'sche ist.

Versuche nach der Methode der Schwebungen: König, Schüngel und Quesneville. — Die Schwebungen lieferten König²⁾ ein leichtes Mittel, um die Änderung der Tonhöhe einer Stimmgabel nachzuweisen, die sich nähert oder entfernt. Er stellte zwei Stimmgabeln, c_2 und $c_2 + 4$ Schwingungen, die, beide unbeweglich, beim Zusammenklingen 4 Stösse in der Secunde geben, neben einander auf und näherte die tiefere um 0,60 m in der Secunde. Da 0,60 m ungefähr gleich der Wellenlänge von c_2 ist, so nahm das Ohr bei der tieferen Gabel in einer Secunde eine Schwingung mehr wahr, also eine Schwebung weniger. Man hörte dagegen eine Schwebung mehr, wenn die höhere Stimmgabel dem Ohr genähert wurde.

Schüngel³⁾ und darauf Quesneville⁴⁾ haben nach diesem Princip Messungen vorgenommen, die ihnen vollständig die Doppler'schen Formeln zu bestätigen schienen: das von Quesneville angewandte graphische Verfahren giebt seinem Beweis alle wünschenswerthe Strenge.

¹⁾ Mach, Pogg. Ann. **112**, 58 und **116**, 333; 1860—1862.

²⁾ König, Catalogue illustré de 1865 und Quelques Experiences, S. 41. König hat denselben Versuch mit einer einzigen Gabel angestellt, indem er sich vor eine Wand stellte und die Gabel rechtwinklig dazu verschob.

³⁾ Schüngel, Pogg. Ann. **150**, 356; 1873.

⁴⁾ G. Quesneville, De l'influence du mouvement sur la hauteur du son; Paris 1879. (Die Abhandlung enthält eine historische Darstellung der früheren Arbeiten.)

IV. Resonanz.

401. Resonanz. — Ein elastischer Körper kann jeden beliebigen Ton übertragen. Wenn aber die zu dem Körper gelangenden Schwingungen mit denen übereinstimmen, die er selbst ausführen kann, so geräth er als Ganzes in eine schwingende

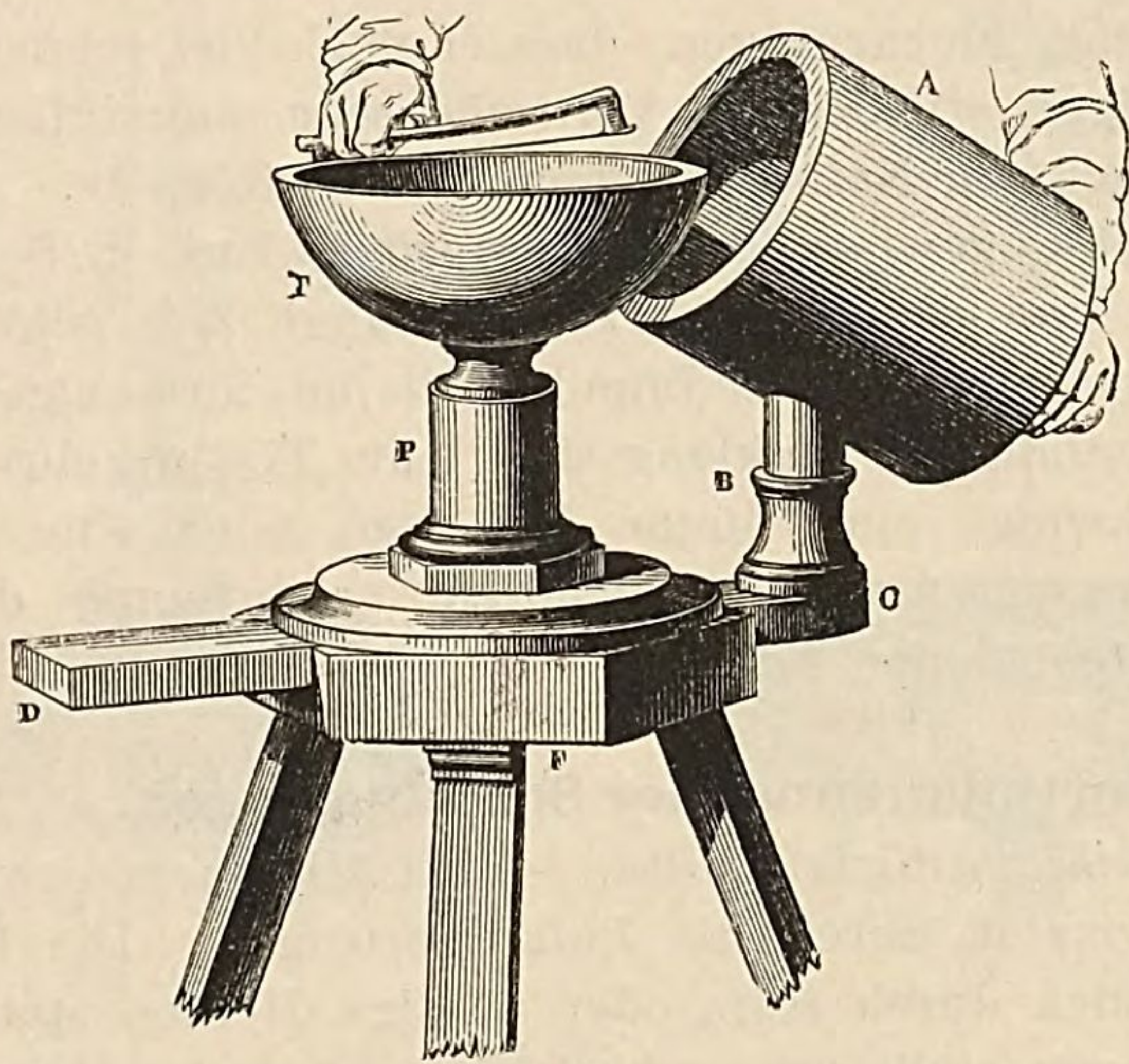


Fig 149.

Bewegung, deren Amplitude oft bedeutend ist, während er sonst nur eine einfache Erschütterung erleidet, die allmählich seine verschiedenen Theile erreicht. Unter dem wiederholten Einfluss synchroner Impulse schwingt der ganze Körper im Einklang mit den äusseren Schwingungen: er tönt mit.

Wir haben schon besprochen, wie die Luftsäule einer Pfeife bei denjenigen Tönen des Mundstücks mittönt, die ihren Eigentönen entsprechen; ebenso gehört hierher das Mittönen einer Saite, die durch eine andere Saite, eine Stimmgabel oder irgend ein anderes Instrument verursacht wird, ferner das Mittönen einer Membran unter dem Einfluss eines äusseren Tones u. s. w.

Die Erscheinung zeigt sich deutlich bei zwei gleich tönenden Stimmgabeln, die auf Resonanzkasten befestigt sind und sich in der Entfernung von mehreren Metern gegenüber stehen.¹⁾ Streicht man

¹⁾ Als König im Laufe der Regnault'schen Versuche im Canal Saint-Michel zwei Stimmgabeln *c* so aufgestellt hatte, dass sich die Öffnungen ihrer Resonanzkasten an den Enden des Canals gegenüberstanden, bemerkte er diesen Einfluss selbst bei einem Abstände von 1590 m noch sehr deutlich.

nämlich die eine Stimmgabel mit dem Bogen an, so beginnt auch die andere zu tönen, und unterbricht man die Schwingungen der ersten mit der Hand, so hört man deutlich den Ton, der von der zweiten ausgeht.

Der oben abgebildete Savart'sche Apparat bildet ein schönes Beispiel für die Resonanz: unter der Einwirkung einer gegenüber stehenden Röhre wird der Ton der Glocke bald sehr stark.¹⁾ Es ist kaum nöthig hinzuzufügen, dass er noch viel schneller erlischt.

Im Übrigen erleiden die Versuche sehr mannigfache Abänderungen je nach der Natur des erschütterten Körpers. Eine Stimmgabel, die eine gewisse Energie erfordert, um in Schwingungen zu gerathen und die, einmal erregt, lange Zeit schwingt, kann nur durch eine Reihe solcher Impulse, die mit ihren eigenen Schwingungen vollständig im Einklang sind, zum Tönen gebracht werden. Dagegen schwingt eine dünne Membran oder eine feine Saite, deren Schwingungen schnell aufhören, schon unter dem Einfluss ziemlich verschiedener Töne.

402. Fortpflanzung der Schwingungen. — *Fortpflanzung durch eine Reihe elastischer Mittel.* — Im Allgemeinen wird der Ton zu dem Resonator durch die Luft übertragen. Die Übertragung kann aber auch durch feste oder flüssige Medien stattfinden. In den Vorlesungen stellt man gewöhnlich folgenden Versuch an: auf den Resonanzkasten einer Stimmgabel wird ein Glas mit Quecksilber gestellt; darauf streicht man die Stimmgabel an, die von dem Kasten losgetrennt ist. Ihre Schwingungen nimmt das Ohr nicht wahr; berührt man aber mit der Stimmgabel das Quecksilber, so ist der Ton sofort zu hören. Die Schwingungen der Stimmgabel pflanzen sich also nach der inneren Luftsäule durch das Quecksilber, das Glas und das Holz des Kastens fort.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit auch noch an die merkwürdige Übertragung durch das *Bindfadentelephon* erinnern.

Übertragung durch feste Körper. — Die Übertragung durch eine Reihe von Medien ist eine complicirte Erscheinung. Savart hat gezeigt, dass sich die Wellen in einem zusammenhängenden, aus festen Stücken gebildeten System parallel zur Richtung der Erschütterung fortpflanzen.

¹⁾ Die Wirkung ist derartig, dass, wenn die Glocke schon gar nicht mehr gehört wird, man nur die Röhre ihr zu nähern braucht, um noch einen starken Ton hervorzurufen. Nach manchen Autoren soll ein Glas von Glockenform durch eine passende und kräftige Stimme zerbrochen werden können (Chladni, loc. cit., S. 224).

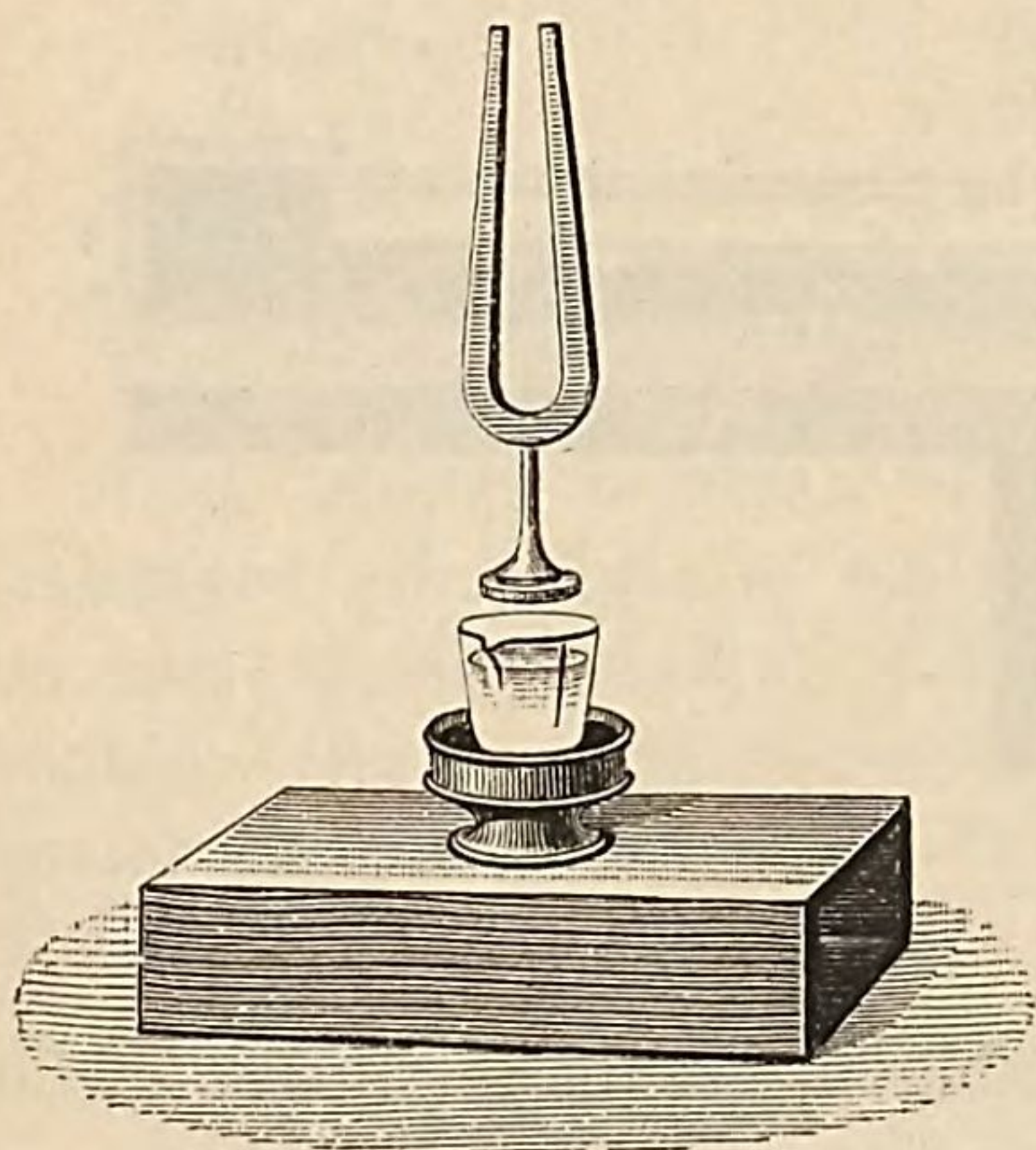


Fig. 150.

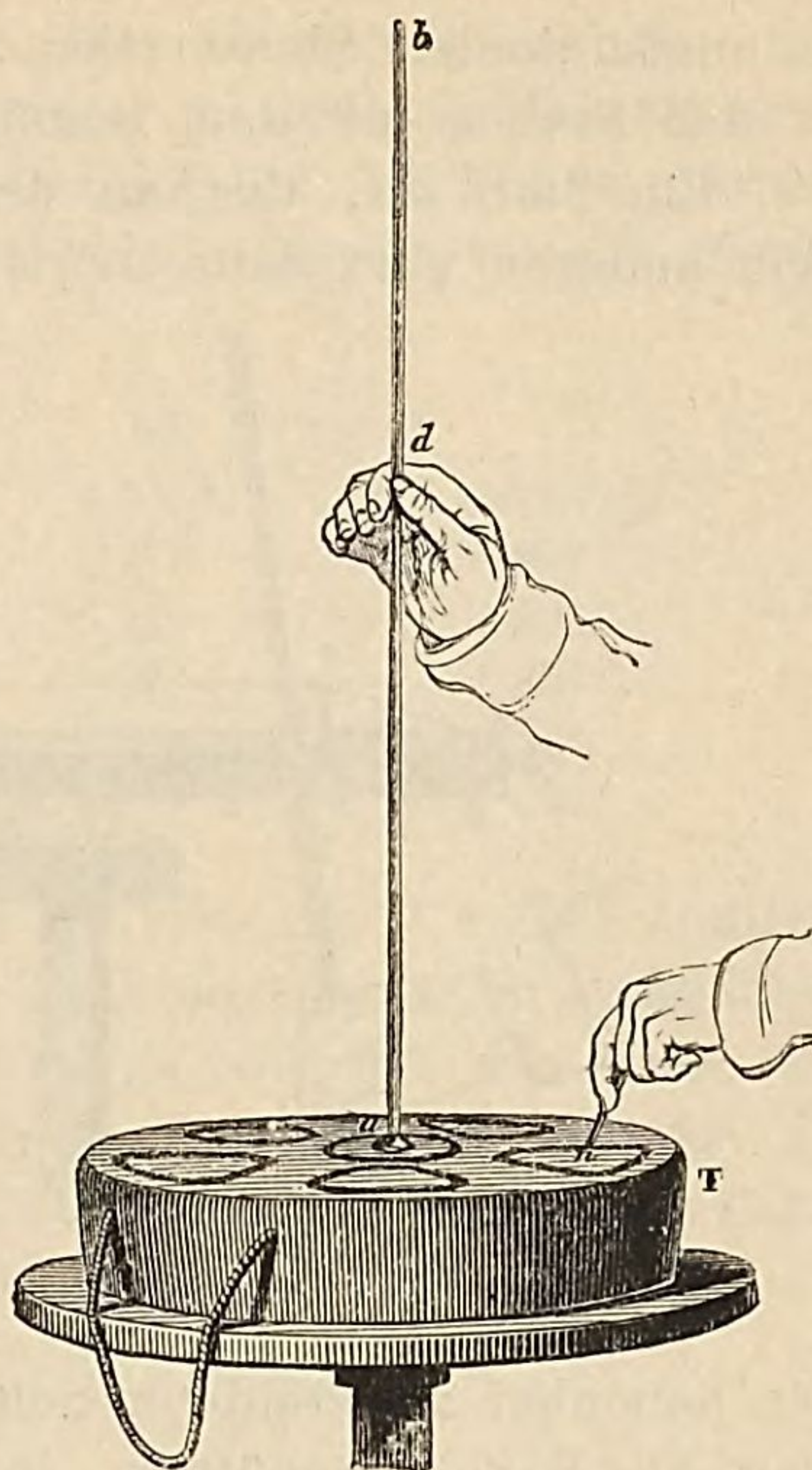


Fig. 151.

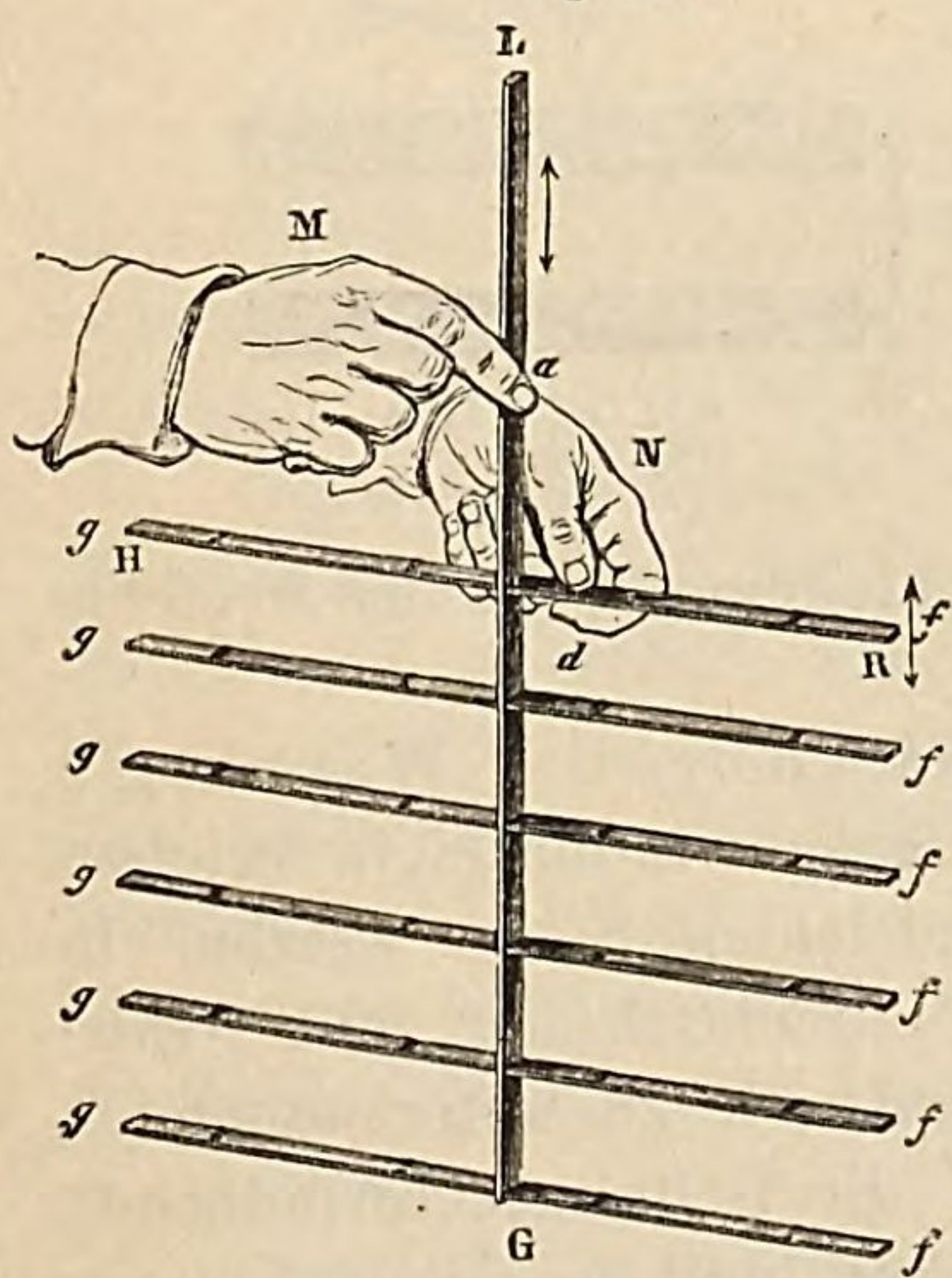


Fig. 152.

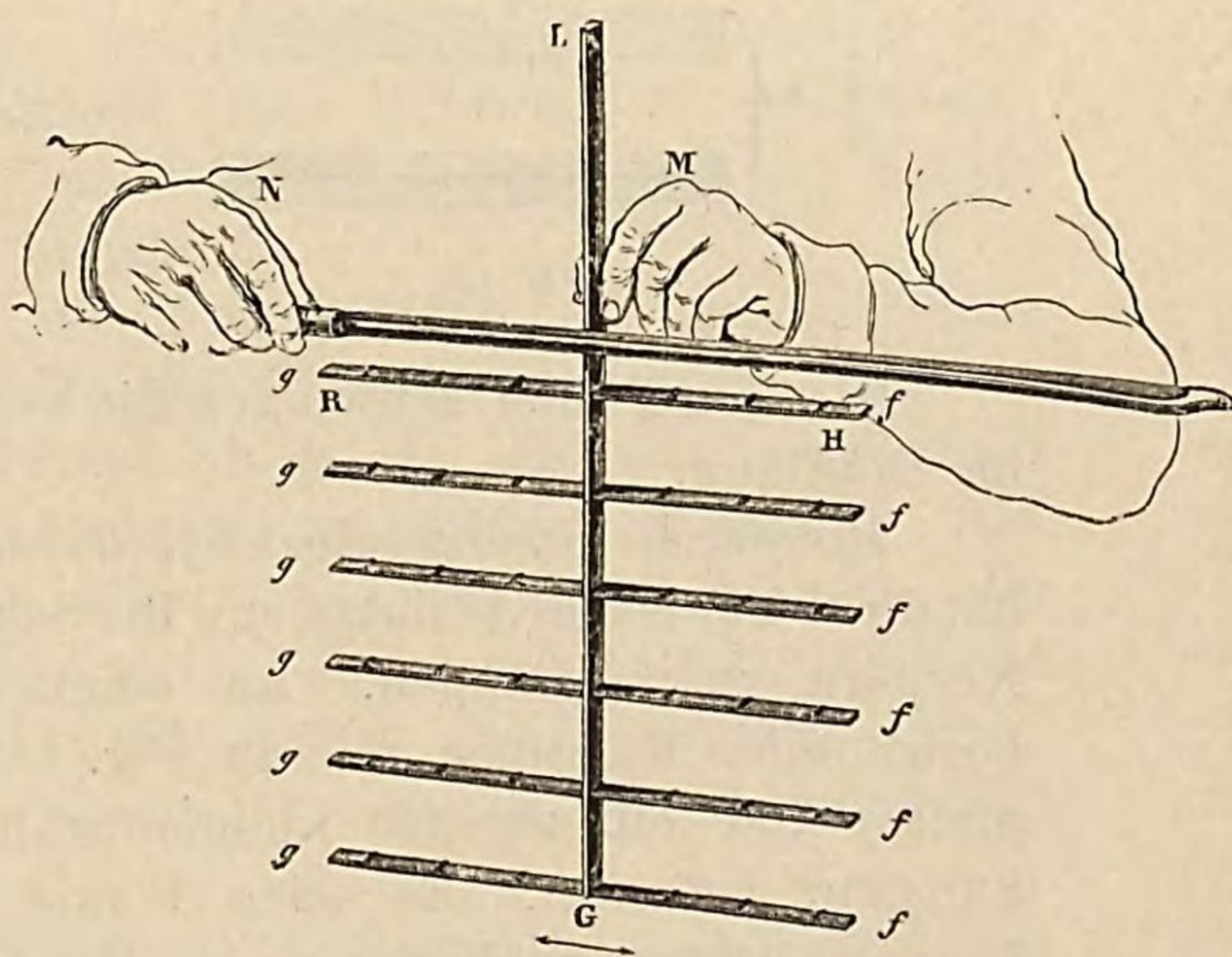


Fig. 153.

Um die transversalen Schwingungen einer Platte hervorzurufen, liessen wir einen Stab, der senkrecht aus der Platte heraustrat, der Länge nach schwingen. Dies Verfahren ist auch bei einer Membran anwendbar (Fig. 151). Ebenso kann man transversale Schwingungen der Stäbe fg (Fig. 152) hervorrufen, indem man den Querstab LG

in longitudinalem Sinne reibt; streicht man diesen dagegen parallel zu den Stäben mit dem Bogen an, so schwingen sie longitudinal.

Ein Stab da , der an dem einen Ende befestigt ist und an dem anderen eine Saite acb trägt, zeigt die verschiedenen Arten

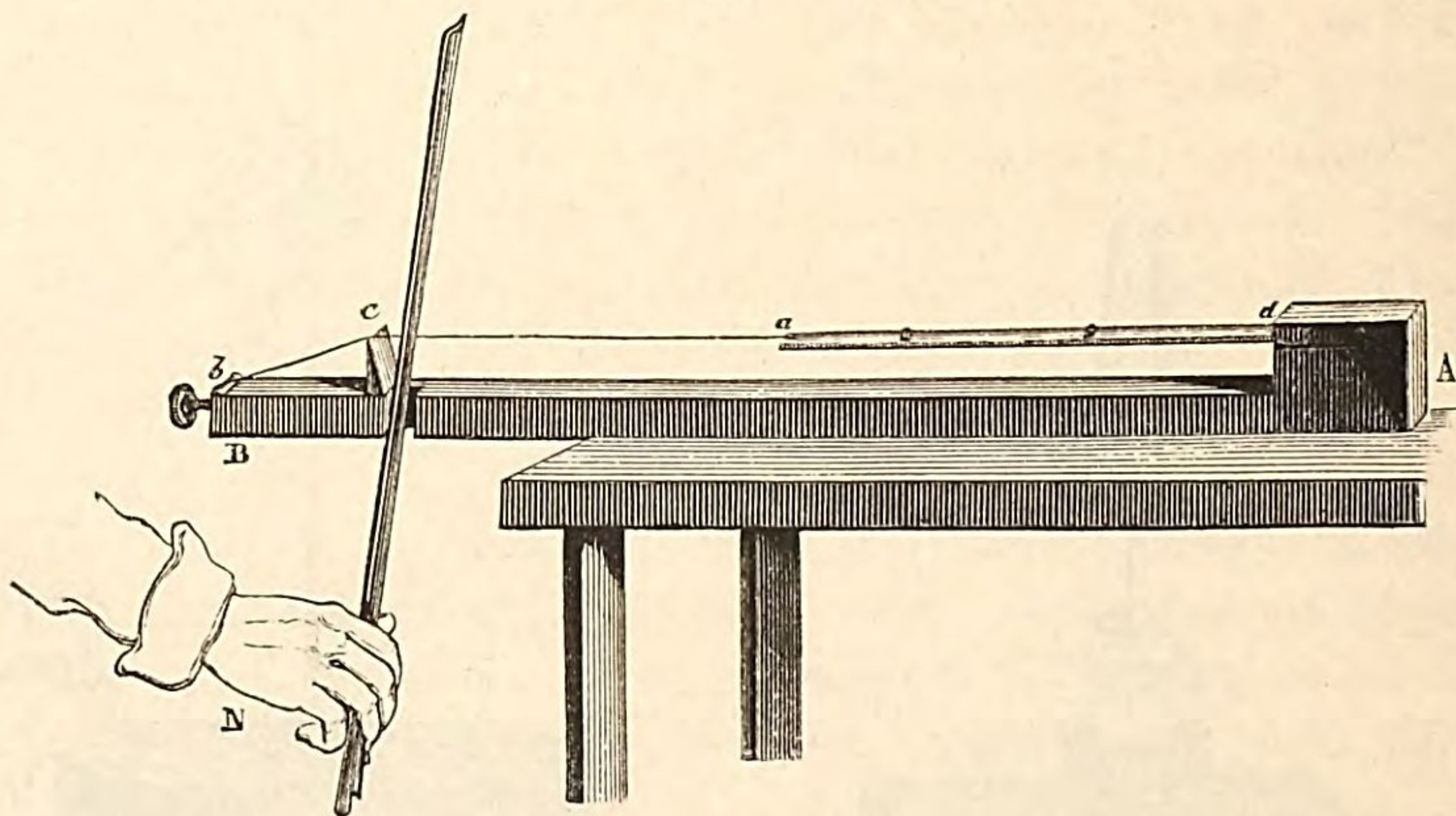


Fig. 154.

der nebenbei abgebildeten Schwingungen, wenn der Bogen, womit man die Saite erschüttert, in verschiedenen Richtungen der zur Saite senkrechten Ebene geführt wird.

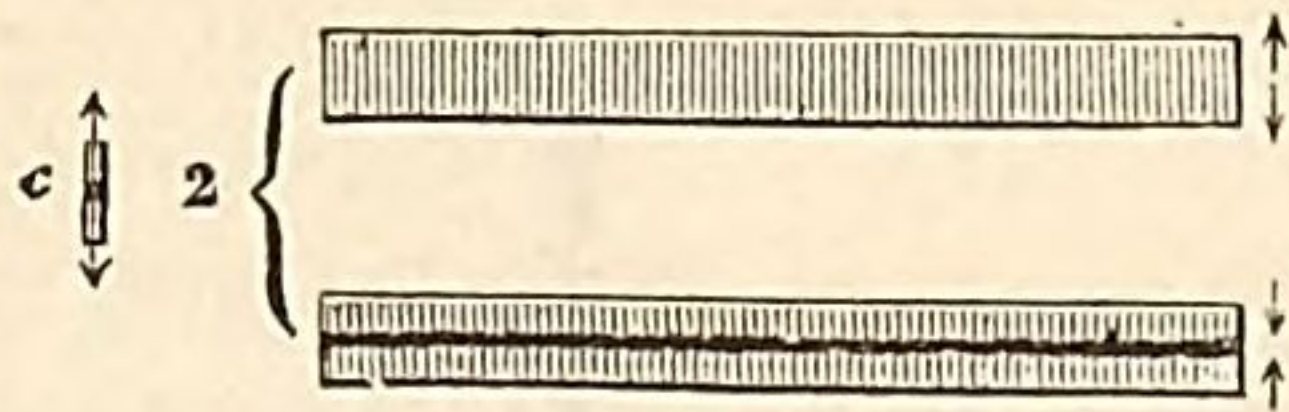


Fig. 155.

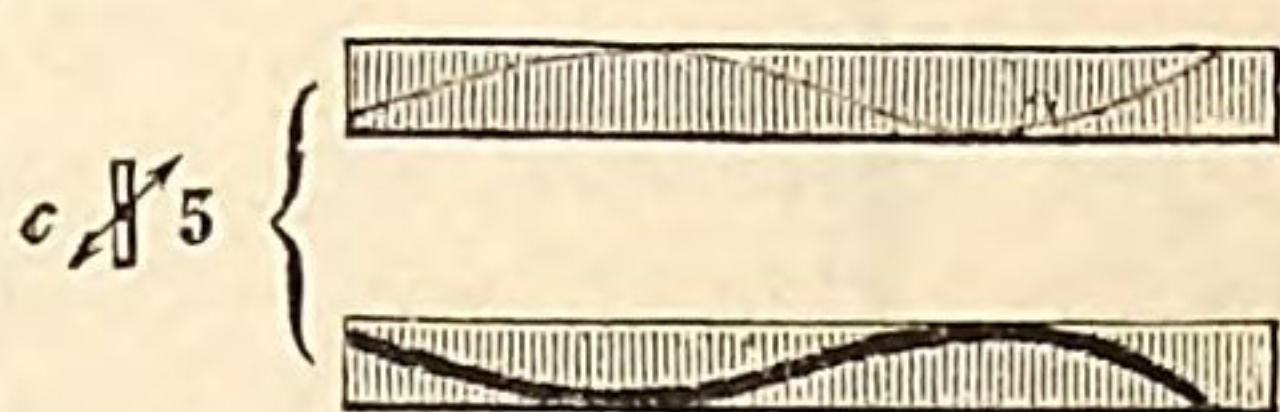


Fig. 155.

In allen Fällen schwingen die verschiedenen Teile des Systems im Einklang.

Messung der Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern. — Warburg¹⁾ hat diese Thatsache benutzt, um die Schallgeschwindigkeit in weichen Körpern zu bestimmen. An einem verticalen Stabe werden in horizontaler Richtung, wie in Fig. 152, ein elastischer Stab (Glasplatte) und ein zweiter kleiner Stab aus der zu untersuchenden Substanz befestigt. Es seien V und V' die Schallgeschwindigkeit in den beiden Stäben; e , e' die Dicken und l , l' die Längen der Schwingungsabtheilungen (gemessen durch die Entfernung zweier benachbarter Knoten) bei den beiden synchron schwingenden Stäben; alsdann hat man

$$\frac{V}{V'} = \frac{l^2}{l'^2} \frac{e'}{e}.$$

¹⁾ Warburg, Pogg. Ann. **136**, 285; 1869.

Ist V bekannt, so lässt sich V' aus dieser Formel berechnen. Um die Genauigkeit der Methode zu prüfen, bestimmte Warburg V' für Messing und fand die Chladni'sche Zahl. Er konnte deshalb das Verfahren auch auf andere Körper anwenden¹⁾ und erhielt folgende Resultate:

	ρ'	$\frac{V'}{V}$	$\frac{E'}{E}$	V'
Glas	2,390	1,000	1	5164 m
Stearin	0,974	0,265	$\frac{1}{3.5}$	1368
Parafin	0,908	0,251	$\frac{1}{4.2}$	1296
Wachs	0,971	0,166	$\frac{1}{8.8}$	857
Wachs und Terpentin	0,989	0,111	$\frac{1}{19.7}$	573
Talg	0,917	0,075	$\frac{1}{46.1}$	387

Diese Zahlen beziehen sich auf 0° . Stefan²⁾ stellte ähnliche Messungen an, indem er einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzte; dieser bestand aus zwei Teilen, die mit den Enden an einander stiessen (die Schwierigkeit liegt hierbei in der Art der Zusammensetzung, die keine Phasenverzögerung herbeiführen darf). Für die Schallgeschwindigkeit bei t° fand Stefan:

Wachs	730 (1 — 40 (t — 20))	Meter
Fett	369 (1 — 40 (t — 20))	„
Kautschuk	30 bis 60	Meter, je nach der Spannung.

Diese letzten Zahlen sind von derselben Grössenordnung wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Nervenreizes und lassen vermuthen, dass sich diese Erschütterung, ebenso wie der Schall, durch longitudinale Wellen fortpflanzt.

Gegenseitiger Einfluss. — Wenn zwei Uhren, die nahezu gleiche Pendel haben, auf derselben Holzplatte befestigt werden, so gehen sie genau überein.³⁾ Die Thatsache wurde von dem englischen Uhrmacher Ellicot⁴⁾ beobachtet, der ausserdem bemerkte, dass die eine der beiden Uhren, wenn sie Anfangs allein geht, die andere in Gang setzt, so dass deren Pendel mit voller Amplitude schwingt, sodann aber allmählich selbst stehen bleibt; darauf findet das Umgekehrte statt u. s. w. Savart hat diese Beobachtung

¹⁾ Groth hat auf diesem Wege die Elasticität des Steinsalzes untersucht (Pogg. Ann. **157**, 115; 1876).

²⁾ Stefan, Sitzungsber. d. Wien. Acad. **57**; 1868.

³⁾ Auf diese Beobachtung hin fasste Bréguet den Plan, zwei Chronometer auf derselben Metallplatte zu befestigen, die folglich stets überein gingen; da die individuellen Unregelmässigkeiten alsdann ausgeglichen sind, so wäre der gemeinsame Gang besser als der jedes einzelnen Chronometers für sich.

⁴⁾ Ellicot, Phil. Trans.; 1739.

bestätigt und sie auf andere schwingende Körper ausgedehnt. Zwei ähnliche Saiten, die neben einander auf einem Monochord oder besser auf dem Resonanzboden eines Contrabasses angebracht sind, setzen sich gegenseitig in gleiche Schwingungen,¹⁾ indem sie dieselben Wechsel in den Amplituden ihrer Schwingungen zeigen.

Wenn der Einklang von Anfang an besteht, so führt die Rückwirkung des beeinflussten Körpers die Ruhe des einwirkenden Körpers herbei, oder wenn ein gemeinschaftlicher Schwingungszustand eintritt, so hat dieser eine andere Periode.

Auf diese Weise hört bei dem Melde'schen Versuch die erregende Stimmgabel (wenn ihre Schwingungen nicht auf elektrischem Wege unterhalten werden) sofort zu tönen auf, wenn die Saite genau im Gleichklang ist.²⁾ Wenn die Saite dick ist, so dauern die Schwingungen an, der Ton des schwingenden Systems ist jedoch tiefer als der Eigenton der beiden Bestandtheile. Unter den zahlreichen Versuchen auf diesem Gebiete stellte Gripon³⁾ noch folgenden an: eine Membran schwingt unter dem Einfluss einer Pfeife; sie sind also beide im Einklang. Man bringt nun die Membran bis auf einige Centimeter an die Mündung heran: der Ton der Pfeife ändert sich sofort und wird höher, wenn er nicht vollständig aufhört.

Die Praxis hat schon lange gezeigt, dass man die beiden Resonanzböden einer Geige auf verschiedene Tonhöhen abstimmen muss, um ihnen das Maximum an Klangfülle zu geben. Ebenso weiss man auch, dass der Resonanzkasten einer Stimmgabel nicht genau mit der Stimmgabel im Einklang sein darf (381).

403. Resonatoren. — *Resonanzkasten.* — Die Wichtigkeit der Resonatoren für die Musik braucht nicht bewiesen zu werden. Da der Ton einer Saite für sich fast unhörbar ist, so macht der *Resonanzboden* der Geige den ganzen Werth des Instrumentes aus.

Menschliches Ohr. — Das menschliche Ohr begünstigt durch seine Resonanz die dem g_4 benachbarten Töne: sie kommen in

¹⁾ Es geht daraus hervor, dass man zwei Instrumente nicht zu nahe an einander stellen darf, wenn man sie genau in Einklang bringen will, da sich sonst der Gleichklang von selbst herstellt, ohne dass jedes der Instrumente für sich allein denselben Ton zu geben braucht.

²⁾ Bei dem Kundt'schen Versuch schwingt die Luftsäule nicht, wenn sie genau mit der Röhre im Einklang ist. Hopkins hat auch schon auf die Schwierigkeit hingewiesen, die entsteht, wenn man eine Platte schwingen lässt, die ihre Schwingungen auf eine im Einklang schwingende Luftsäule überträgt (355). Terquem stiess bei den Stäben auf eine analoge Erscheinung (382).

³⁾ Gripon, Ann. de chim. et de phys. (5), 3, 343; 1874.

dem Gezirpe des Heimchens vor und berühren ein empfindliches Ohr unangenehm.¹⁾

Helmholtz'sche Resonatoren. — v. Helmholtz²⁾ hat Resonatoren angegeben, die für die akustischen Versuche sehr werthvoll sind. Es sind hohle Kugeln mit zwei einander gegenüber liegenden Rohransätzen, von denen der eine kurz und gerade ist und sich nach aussen erweitert, während der andere die Form eines Trichters hat, um ihn in das Ohr stecken zu können, wo er durch das Trommelfell geschlossen wird. Der Grundton des Apparates ist viel tiefer und kräftiger³⁾ als seine Obertöne.

Ein Helmholtz'scher Resonator wird also praktisch nur von einem einzigen Ton erregt. Alle andere Töne verschwinden mit

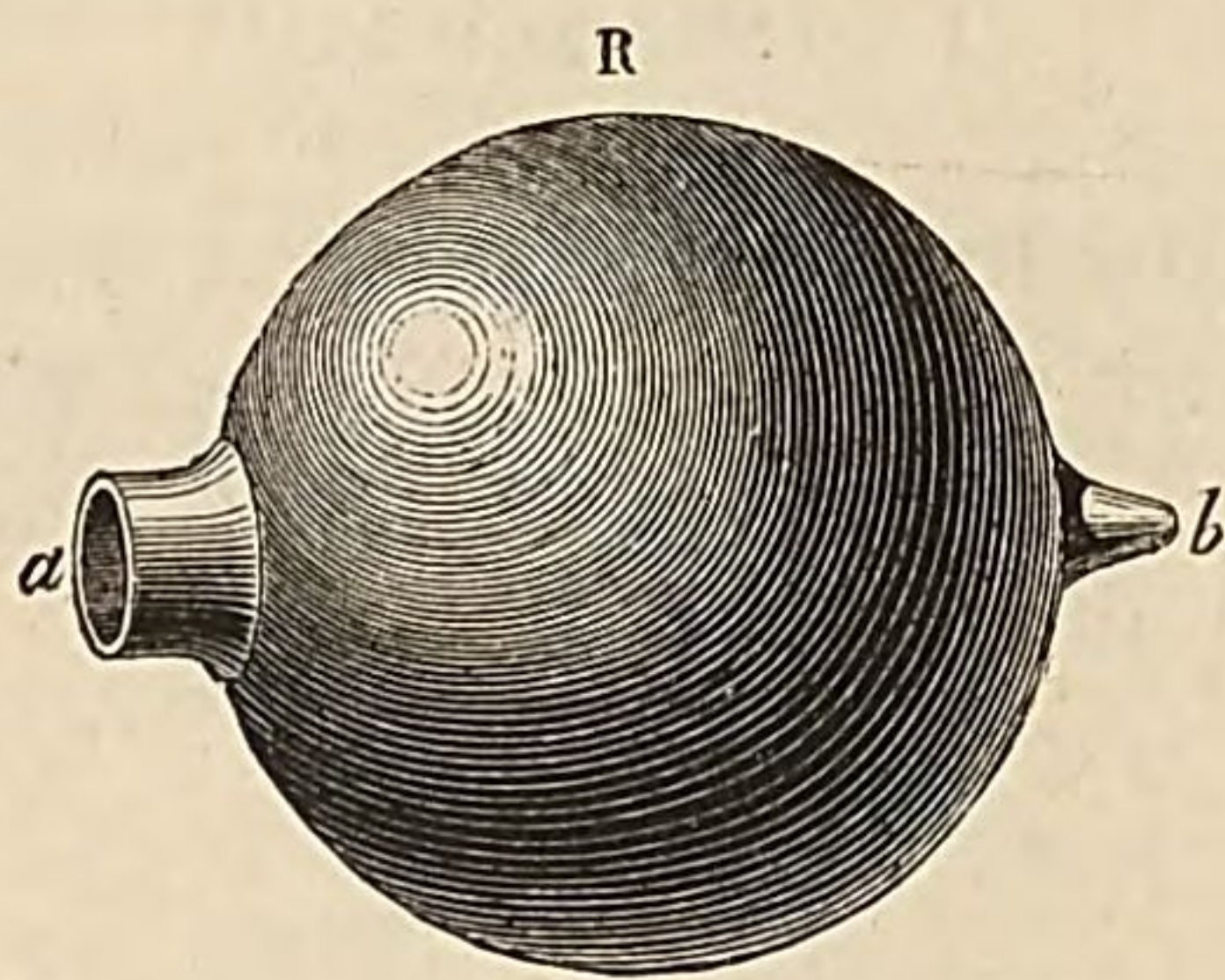


Fig. 156.

Ausnahme dieses einzigen, der, so oft er draussen erzeugt wird, im Ohr mit wunderbarer Kraft erklingt. Man kann auf diese Weise einen schwachen Ton unter anderen stärkeren herausfinden und einen Combinationston oder Oberton erkennen, der ohne dies Hülfsmittel auch dem geübtesten Ohr entginge.

¹⁾ v. Helmholtz, loc. cit.

²⁾ v. Helmholtz, loc. cit., 4. Aufl., S. 73 und 600.

³⁾ Die Wellenlänge dieses Tones wird durch die Formel

$$\lambda = 2\pi \sqrt{UR}$$

gegeben, wo U das Volumen des Hohlraumes von beliebiger Form bedeutet, der die schwingende Luft einschliesst, und R den Widerstand der Öffnung, der der elektrostatischen Capacität einer Scheibe von derselben Oberfläche proportional ist.

Zehntes Capitel.

Intensität. — Klangfarbe.

I. Intensität.

404. Physikalische Intensität. — *Theoretische Formel.* —

Die mechanische Wirkung einer einfachen Wellenbewegung von der Periode τ und der Amplitude A in einem Medium von der Dichte ρ wird durch die Formel

$$I = 2\pi^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2}$$

gemessen. Durch diese Beziehung ist die physikalische Intensität vollständig bestimmt.

Messungsversuche. — Um zwei Tonquellen von derselben Höhe zu vergleichen, stellt A. M. Mayer¹⁾ vor jede einen Resonator, der durch einen Gummischlauch mit dem einen Ende einer hufeisenförmigen Röhre verbunden ist, die in ihrer Mitte eine Gaskapsel trägt. Sind die beiden Intensitäten gleich, so werden sich die Wirkungen in der Mitte des Hufeisens vollständig aufheben, wenn die Tonquellen von ihren Resonatoren gleich weit entfernt sind und die Gummischläuche dieselbe Länge haben: die Flamme der Kapsel bleibt in Ruhe und zeigt in dem rotirenden Spiegel das Aussehen eines zusammenhängenden leuchtenden Bandes. Sind die Intensitäten ungleich, so kann man den einen der Resonatoren entfernen und dadurch die Wirkung der entsprechenden Tonquelle im umgekehrten Quadrat der Entfernung vermindern, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Hierbei sind gleiche Phasen vorausgesetzt; gewöhnlich sind diese jedoch nicht gleich, und man muss zuerst diese Ungleichheit compensiren: man fängt also damit an, die Länge von einem der Gummischläuche zu verändern, bis die

¹⁾ A. M. Mayer, Sill. American Journal (3), 5, 123, 1873, und Journal de physique 2, 228 (Angot).

Zähne des Flammenbildes auf ein Minimum gebracht sind; alsdann kann man sie vollständig verschwinden lassen, indem man die Entfernung der Körper von ihrem Resonator ändert.

Der allgemeine Fall ist bisher auf experimentellem Wege kaum in Angriff genommen. Wir müssen indessen die Versuche anführen, die Lord Rayleigh und Dvorák angestellt haben, um die Intensität einer Schallwelle durch ihre Wirkung auf leichte Körper zu messen.

Akustische Anziehungen und Abstossungen. — Der Apparat Lord Rayleigh's¹⁾ beruht auf der Thatsache, dass sich eine bewegliche Scheibe rechtwinklig zur Fortpflanzungsrichtung der Wellen zu stellen sucht: wirkt ein ablenkender Magnet dieser Bewegung entgegen, so nimmt die an einem torsionslosen Faden aufgehängte Scheibe eine Gleichgewichtsstellung ein, die man nach der Poggendorff'schen Methode bestimmen kann.

Nach einem eingehenden Studium der Anziehungen und Abstossungen, die in der Nähe schwingender Körper auftreten, fand

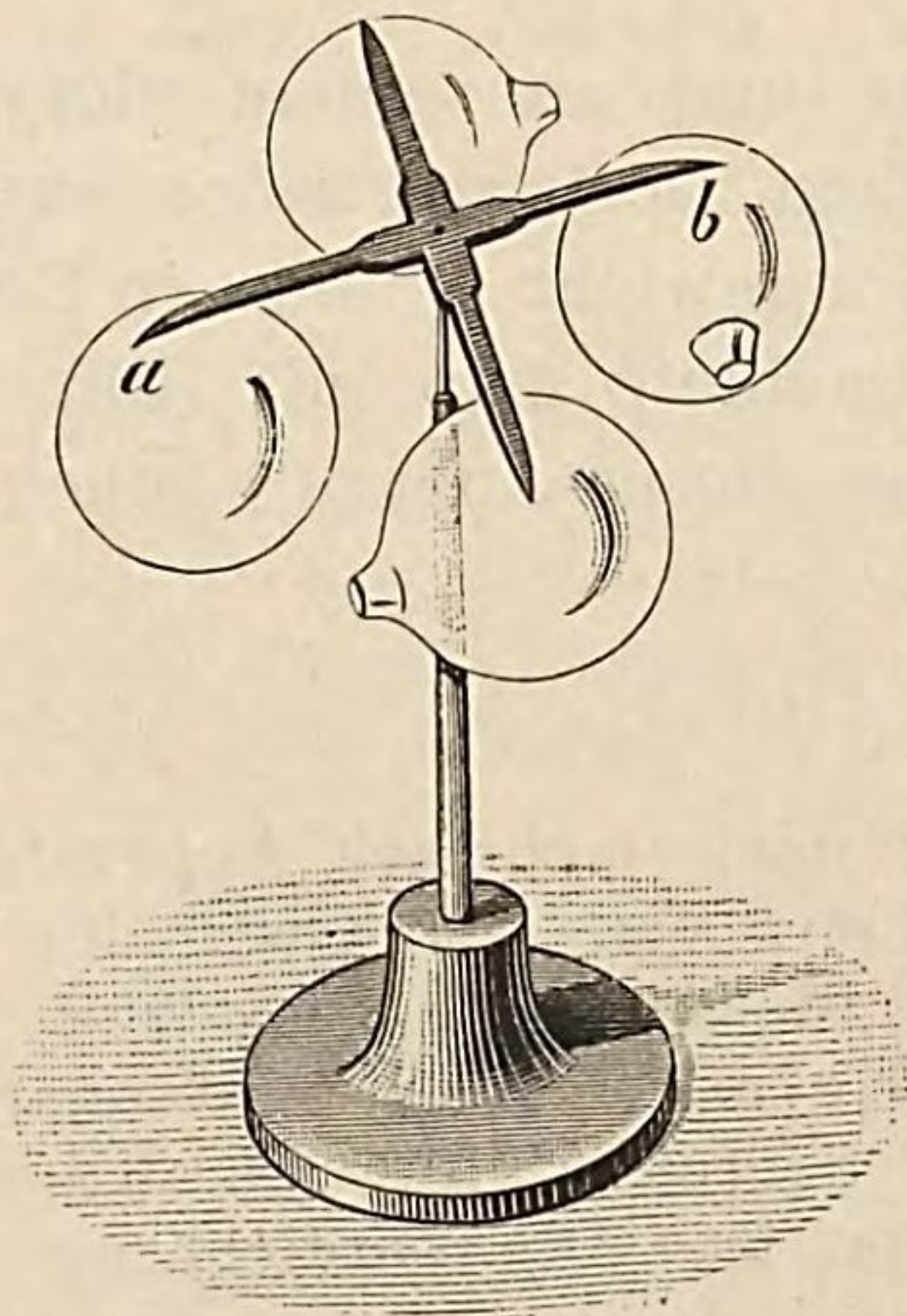


Fig. 157.

Dvorák,²⁾ wie schon früher M. A. Mayer,³⁾ dass ein Resonator durch einen im Einklang tönenden Körper abgestossen wird: beide construirten nach diesem Princip ein *akustisches Drehkreuz*, das aus den Resonatoren *a*, *b* besteht, die an den Armen eines kleinen, sehr beweglichen Kreuzes aufgehängt sind. Dvorák⁴⁾

¹⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5), **19**, 187; 1882.

²⁾ Dvorák, Sitzungsber. d. Wien. Acad.; 1875—1883.

³⁾ A. M. Mayer, Scientific American; 1876.

⁴⁾ Dvorák, Zeitschrift für Instrumentenkunde **3**, 127, 1883, und Journal de physique (2), **2**, 465.

fand ferner noch, dass eine einfache Cartonscheibe mit konischen Löchern von einem tönenden Körper abgestossen wird, der sich der Spitze der Löcher gegenüber befindet. Er maass deshalb die Intensität der Luftschwingungen mit einer Torsionswage, deren Hebel kb

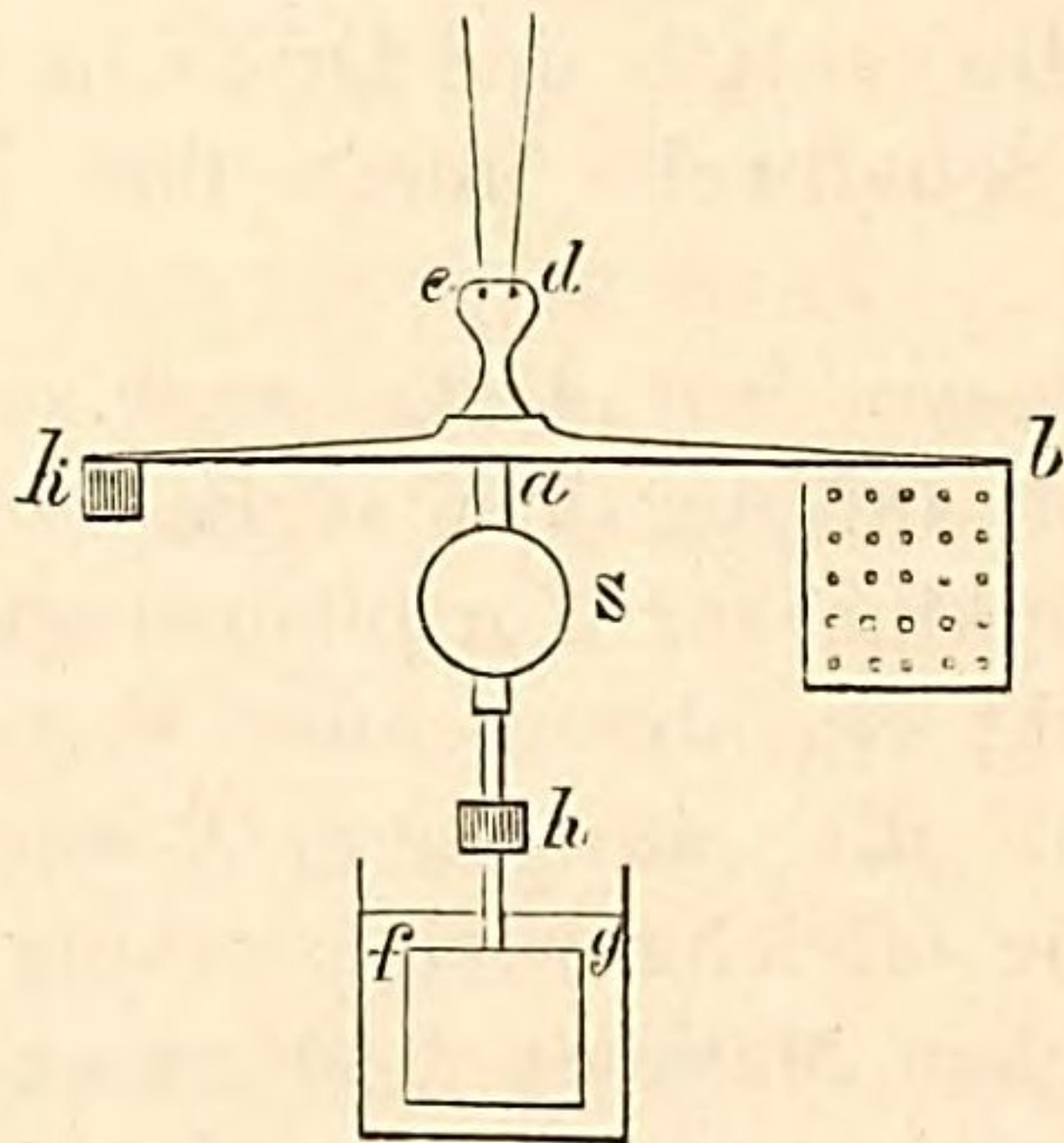


Fig. 158.

bifilar aufgehängt war und an seinem einem Ende eine Cartonscheibe b mit konischen Löchern trug; ausserdem war an dem Apparat noch ein Gegengewicht h und ein Dämpfer fg angebracht; die Ablenkungen beobachtete man mit Hülfe des Spiegels s .

Die Wirkungsweise dieser Apparate scheint ziemlich verwickelt zu sein.¹⁾

¹⁾ Neuerdings sind noch mehrfach Apparate für die Messung der Schallintensität angegeben, von denen wir hier zwei erwähnen wollen.

M. Wien (Über die Messung der Tonstärke, Ing.-Diss. 1888) benutzt zu diesem Zweck einen Helmholtz'schen Resonator, dessen eine Öffnung erweitert und mit der oberen Hälfte der Kapsel eines Aneroidbarometers luftdicht verlöthet ist. Die Verdichtungen oder Verdünnungen, die ein Ton in der freien Luft erzeugt, werden innerhalb des Resonators bedeutend verstärkt, wenn dieser zuvor auf den betreffenden Ton abgestimmt worden ist. Es geräth deshalb die elastische Metallplatte, deren Eigenton wiederum mit dem des Resonators übereinstimmt, in Schwingungen, deren Amplitude sich mit Hülfe einer empfindlichen Spiegelübertragung messen lässt.

A. Raps (Zur objectiven Darstellung der Schallintensität, Ing.-Diss. 1889) hat die Kundt'schen Membranventile (362) durch Metallventile ersetzt und damit die Druckänderungen in den Knoten gedackter Pfeifen gemessen. Das Verfahren ist schon oben (S. 142, Anmerkung) näher beschrieben worden.

Bei der Messung der Schallintensität in der freien Luft von Beobachtungsräumen wirkt die Bildung von stehenden Wellen störend. Auch ist die Hervorbringung von starken und gleichmässigen Tönen sehr schwierig. — H.

405. Physiologische Intensität. — *Angenäherte Bestimmung.*

Ein Mittel, die physiologische Intensität der Töne zu messen, besitzen wir nicht. Indessen ist es sicher, dass die Claviere fast in allen Octaven dieselbe Wirkung hervorrufen. Andererseits hat Töpfer¹⁾ beobachtet, dass bei einer gut regulirten Orgel die Luftmenge, die jede Pfeife verbraucht, der Wellenlänge des Tones proportional ist. Bosanquet²⁾ hat dies Gesetz an einer Orgel zu Oxford bewiesen; er schloss daraus, dass die mittlere Arbeit T_m , die nothwendig ist, um Töne von derselben Intensität zu erzeugen, der Wellenlänge der Töne proportional ist: $\frac{T_m}{\lambda}$ kann also als Maass für die scheinbare Intensität I_a gelten. Da T_m ³⁾ gleich I ist, so hat man also:

$$I_a = K \frac{I}{\lambda};$$

¹⁾ Töpfer, Die Orgel; Erfurt 1842.

²⁾ Bosanquet, Phil. Mag. (4), **44**, 381 und **45**, 173; 1872—1875. Die Definition der Intensität hat zu einer interessanten Streitfrage zwischen Bosanquet, Moon und Hudson geführt, Phil. Mag. (4), **44**, **45** und (5), **9**, 174; 1880.

³⁾ Diese Arbeit lässt sich auch leicht direct berechnen. Man kann sie aus dem Aufwand an Energie bestimmen, die nöthig ist, um eine in Ruhe befindliche Luftstrecke λ in den Schwingungszustand zu versetzen. Die zu diesem Zweck nöthige Energie setzt sich aus zwei Theilen, der kinetischen und potentiellen Energie, zusammen.

Die kinetische Energie oder lebendige Kraft ist

$$C = \int_x^{x+\lambda} \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx.$$

Um die potentielle Energie zu berechnen, betrachten wir eine Luftscheibe von dem Querschnitt 1 und der Dicke dx . Wir nehmen an, dass sie derartig zusammengedrückt ist, dass der Querschnitt derselbe bleibt, die Dicke aber in $dx - du$ übergeht. Der Druck nimmt alsdann im Innern der Scheibe um $E \frac{\partial u}{\partial x}$ zu. Ändert sich die Dicke um δdu , so ist dazu die Arbeit $E \frac{\partial u}{\partial x} \delta du$ nöthig; folglich wird bei der Änderung des Druckes von $du = 0$ bis $du = du$ die Arbeit

$$\int_0^{du} E \frac{\partial u}{\partial x} \delta du = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

aufgewendet. In allen Scheiben, die die Säule von der Länge λ bilden, ist demnach die Arbeit

die *scheinbare Intensität* ist also der Energie direct und der Wellenlänge umgekehrt proportional.

Gehen wir auf die Gleichung für I zurück, so lässt sich diese Beziehung auch in folgender Form schreiben:

$$I_a = h \frac{a^2}{\lambda^3};$$

d. h. für die Töne von gleicher scheinbarer Intensität sind die Quadrate der Amplituden den Cuben der Wellenlängen proportional.

Empfindlichkeit des Ohres. — Wenn wir thatsächlich noch keinen Intensitätsmesser für die Töne haben, so liegt das nicht daran, dass das Ohr zu unempfindlich ist. Die Amplitude der Schallwellen kann nämlich noch äusserst klein sein, ohne dass der Ton dem Ohr entgeht.

Lord Rayleigh¹⁾ stellte folgenden hierauf hezüglichen Versuch an: er blies eine Pfeife, die f_4 (2730 Schwingungen) angab, mit einem Windkasten an, aus dem 196 cm^3 Luft in 1 Secunde bei einem Wasserdruck von 9,5 cm ausströmten; der Ton wurde noch in der Entfernung von 820 m gehört.

$$P = \int_x^{x+\lambda} \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

aufgespeichert. Nun sind die beiden Grössen C und P einander gleich, da bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -V \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{und} \quad E = \rho V^2.$$

Man hat also für die gesammte Energie den Werth

$$\int_x^{x+\lambda} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx,$$

oder wenn wir $u = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right)$ setzen,

$$\int_x^{x+\lambda} \rho \frac{4\pi^2}{\tau^2} \sin^2 \left(\frac{t}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right) dx = 2\pi^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2} \lambda.$$

Die Energie der Volumeneinheit der schwingenden Luft ist demnach

$$T_m = 2\pi^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2} = I.$$

¹⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5), 3, 456; 1877.

Die Arbeit, die in 1 Secunde für das Tönen der Pfeife nöthig war, ergibt sich hiernach zu

$$T = 9,5 \times 196,$$

wenn als Einheit der Arbeit diejenige Arbeit gilt, bei der 1 cm³ Wasser auf die Höhe von 1 cm gehoben wird.

Andererseits ist die gesammte Energiemenge, die während 1 Secunde durch die Oberfläche einer Kugel geht, die mit dem Radius R um den Mittelpunkt der Erschütterung beschrieben ist,

$$2\pi^2 R^2 \rho \frac{A^2}{\tau^2} V.$$

Man hat demnach, wenn die betreffenden numerischen Werthe in die Formel eingesetzt werden,

$$A = \sqrt{\frac{9,5 \times 196 \times 981}{2\pi^2 \times 82000^2 \times 0,0013 \times 34000 \times 2730^2}} = 0,000\,000\,081 \text{ cm.}$$

Da ausserdem ein ziemlicher Theil der Arbeit offenbar verloren geht, so beträgt die Amplitude der Schwingungen, die das Ohr treffen, viel weniger als ein Millionstel Millimeter.

Setzt man die Wärmemenge, die frei wird, wenn sich 1 g Wasser um 1° abkühlt, in elektrische Energie um und lässt sie auf ein gutes Telephon wirken, so könnte man damit nach Pellat's¹⁾ Berechnung volle 10000 Jahre lang einen wahrnehmbaren Ton erzeugen.

II. Klangfarbe.

406. Zerlegung eines Klanges in seine Partialtöne nach dem Fourier'schen Satz. — *Rameau, Monge, Ohm und v. Helmholtz.* — Nach dem Fourier'schen Satz (**393**) kann man jede beliebige periodische Bewegung stets und auf eine einzige Art in einfache pendelartige Schwingungen zerlegen, deren Perioden der ganzen Periode der gegebenen Bewegung, der Hälfte, dem Drittel, dem Viretel u. s. w. davon gleich sind.

Es fragt sich, ob bei dem Hören von Klängen eine solche Zerlegung thatsächlich vor sich geht.

¹⁾ Pellat, Journal de physique **10**, 358; 1881.

Ohm¹⁾ behauptete, dass das Ohr wirklich jede periodische Luftbewegung in harmonische Schwingungen zerlegt, von denen jede einem einfachen Tone entspricht. Diesem Satze scheint auf den ersten Blick die gewöhnliche Erfahrung zu widersprechen. Achten wir nämlich bei einem Klang auf das, was ihn von anderen gleich hohen Klängen unterscheidet, so fassen wir gewöhnlich die Obertöne mit dem Grundton zu einem Ganzen zusammen, das wir als Klangfarbe bezeichnen. Die Obertöne können aber auch für sich wahrgenommen werden, wenn wir unsere Aufmerksamkeit darauf richten.

Die Klänge der Saiten sind für diese Beobachtungen besonders günstig. Lässt man zuerst einen Oberton erklingen und bald darauf den zusammengesetzten Klang, der diesen Oberton enthält, so unterscheidet das Ohr leicht den einfachen Ton in der Klangmasse. v. Helmholtz hat die Obertöne bis zum sechzehnten noch unterschieden und sie selbst weniger geübten Leuten zum Gehör gebracht. Indem man die Saite in dem passenden Punkte mehr oder weniger stark mit einem Pinsel berührt, erzeugt man jeden gewünschten Oberton, der entweder ganz rein oder verschieden stark von dem Grundton begleitet ist; man erhält auf diese Weise eine Reihe von Übergängen, durch die das Ohr daran gewöhnt wird, den Oberton selbst dann zu hören, wenn die Saite mit ihrem gewöhnlichen Klange ganz frei schwingt.

Mit etwas Übung hört man bald die Obertöne verschiedener Instrumente und selbst die der menschlichen Stimme, obwohl diese sehr schwer zu unterscheiden sind; indessen hat sie Rameau²⁾ ohne irgend ein Hilfsmittel schon bemerkt.

Dass das Ohr diese Zerlegung richtig ausführt, wird auch dadurch bewiesen, dass man nur die wirklich vorhandenen Töne wahrnimmt. So hört man bei dem Klange einer angeschlagenen Saite nie diejenigen Obertöne, die nach Young's Versuchen nicht auftreten können (369).

v. Helmholtz hat in seinem bekannten Buche „*Die Lehre von den Tonempfindungen*“ (Braunschweig 1862, 4. Aufl. 1877) gezeigt, dass jeder der einfachen Partialtöne durch ein rein mechanisches Mittel, nämlich durch das Mitschwingen elastischer Körper in Folge

¹⁾ Ohm, Pogg. Ann. 59, 513 und 62, 1; 1846—1847. Seebeck, der keine der unten beschriebenen Methoden anwandte, um die Aufmerksamkeit des Ohres auf die fraglichen Töne zu richten, bestritt die Behauptung von Ohm. (Seebeck, Pogg. Ann. 60, 449 und 63, 353 und 368; 1847—1848).

²⁾ Rameau, Nouveau système de musique théorique (Vorrede); Paris 1726.

der Resonanz, aus der Klangmasse herausgehoben werden kann. „Jeder einzelne Partialton existirt also ebenso gut und in demselben Sinne in dem Klange, den ein einzelnes musikalisches Instrument hervorbringt, wie z. B. in dem weissen Lichte, was von der Sonne oder irgend einem glühenden Körper ausgeht, die verschiedenen Farben des Regenbogens existiren.“

Die Zerlegung der Klänge¹⁾ mit Hülfe der Resonanz lässt sich leicht mit dem Clavier ausführen, bei dem jede Saite (wenn der Dämpfer entfernt ist) durch ihr Mitschwingen in der Klangmasse denjenigen Ton nachweist, den sie selbst angiebt. Dieser Versuch liefert vielleicht ein richtiges Abbild für die Art und Weise, wie das Ohr die Klänge zerlegt (409).

Besonders wendet man aber die Helmholtz'schen Resonatoren zu diesem Zwecke an, die entweder direct an das Ohr gehalten oder mit König'schen Gaskapseln in Verbindung gesetzt werden, wie es Fig. 159 angiebt. Wendet man diese Zerlegung auf Systeme an, deren Schwingungen mathematisch bestimmt sind (Saiten, Pfeifen, Stäbe u. s. w.), so lässt sich auf diese Weise ebenso wie direct durch das Ohr vollständig beweisen, was wir *a priori* über die Schwingungsart des betreffenden Systems wissen.

Wenn man diese Methoden auf die verschiedenen Instrumente ausdehnt, so erkennt man, dass ein musikalischer Klang gewöhnlich zusammengesetzt ist. Ein einfacher Ton, wie der einer Stimmgabel auf einem Resonanzkasten, klingt hohl und tiefer, als er in Wirklichkeit ist. Die grossen gedackten Orgelpfeifen, die bei schwachem Anblasen fast vollständig einfache Töne ohne Obertöne geben, bringen eine düstere und traurige Wirkung hervor. Die Klänge der Flöte, deren Obertöne wenig zahlreich und schwach sind, haben eine grosse Reinheit und Milde, zugleich aber auch eine gewisse Eintönigkeit. Vergleicht man auf derselben Tonhöhe eine Flöte und eine schöne menschliche Stimme, die ausser dem Grundton noch die sechs ersten Obertöne enthält und die deshalb einen vollen Accord bildet, so bemerkt man sofort den Einfluss der Obertöne. Die Orgelbauer pflegen schon seit langer Zeit die matten Klänge der grossen Pfeifen durch die *Mixturregister* zu

¹⁾ Wir müssen bemerken, dass sich diese Zerlegung nur auf ununterbrochene und gleichförmige Klänge bezieht; wir lassen hier die Erscheinungen bei Seite, die aus der Art der Tonerzeugung (dem Pfeifen der Luft in dem Windkasten, dem Kratzen des Bogens, dem Schlag des Hammers u. s. w.) oder der Tonveränderung (bald schwillt der Ton schnell an, bald allmählich; ebenso hört er allmählich oder plötzlich auf) entstehen; an allen diesen Merkmalen kann man in der Praxis sehr leicht die Art des Klanges erkennen.

verbessern; sie erzeugen hiermit die sechs ersten Töne der Tonreihe, die gerade einen vollkommenen Accord bilden. Bei dem Clavier schlägt der Hammer die Saite in $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{9}$ ihrer Länge

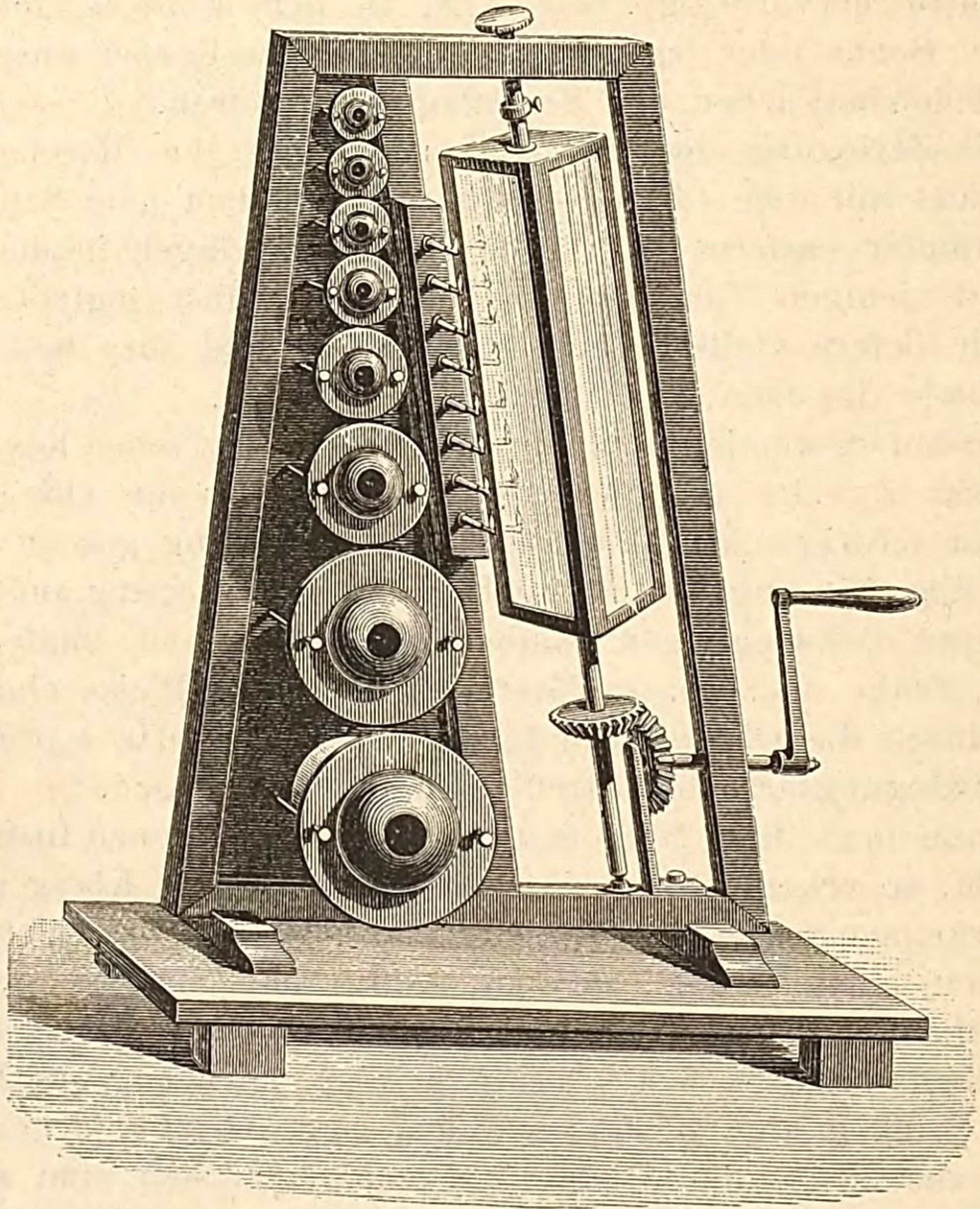


Fig. 159.

an und bringt dadurch genau dieselbe Reihe von Obertönen hervor, die dem Klange seine Fülle verleihen; dabei wird gleichzeitig das Spitze und Schrille vermieden, das die noch höheren Obertöne (Geige, Clarinette) erzeugen.

Alle diese Erscheinungen, sowie viele andere, die wir hier übergehen müssen, haben v. Helmholtz zu der Schlussfolgerung geführt, dass *die Klangfarbe von der Zahl und der Intensität der mit dem Grundton gleichzeitig auftretenden Obertöne abhängt*. Dieser Gedanke war früher schon von Anderen gefasst, und Monge hatte ihn sehr klar ausgesprochen;¹⁾ aber erst v. Helmholtz hat ihn

¹⁾ Monge, nach Surremain-Missery, *Théorie acoustico-musicale*; Paris 1793. „Ich weiss bestimmt, dass ich Monge sagen hörte, eine be-

durch die Zerlegung und Zusammensetzung von Klängen bewiesen.

407. Zusammensetzung der musikalischen Klänge. —

In der That lassen sich die Resultate der Zerlegung durch die Zusammensetzung von Klängen bestätigen. Giebt eine Clarinette einen etwas länger anhaltenden Ton vor einem offenen Clavier an, dessen Dämpfer aufgehoben ist, so schwingen die Saiten, die durch die einfachen Töne des zusammengesetzten Clarinettenklanges erregt werden, so stark mit, dass dieser Klang auch noch gehört wird, wenn die Clarinette nicht mehr tönt. v. Helmholtz hat einen Apparat construirt, der aus einer Zahl von Stimmgabeln besteht; diese sind nach der harmonischen Tonreihe abgeglichen, werden auf elektrischem Wege in Schwingung erhalten und stehen auf Resonanzkästen, die man mittelst eines clavierartigen Mechanismus mehr oder weniger öffnen kann. Wenn jede Stimmgabel mit gewünschter Stärke einen von den einfachen Tönen angiebt, die man bei der Zerlegung eines Klanges entdeckte, so entsteht durch das Zusammentönen thatsächlich der untersuchte zusammengesetzte Klang. Man kann auf diese Weise sehr gut den Klang des Hornes und der menschlichen Stimme nachahmen (auf die letztere lässt sich auch der Versuch mit dem Clavier ausdehnen). Ein interessanter Versuch, der von A. M. Mayer¹⁾ herrührt, besteht darin, dass man einen Punkt der seitlichen Membran einer Zungenpfeife²⁾ mit einer Reihe harmonischer Stimmgabeln durch eben so viel passend gespannte Fäden verknüpft: jede Stimmgabel wählt alsdann aus der zusammengesetzten Bewegung der Membran die pendelartige Schwingung aus, die ihrer Eigenbewegung entspricht; und weist damit die Existenz und bis zu einem gewissen Grade auch die Stärke dieses Tones nach, wenn sie selbst in Schwingung geräth. Derselbe Apparat dient auch zur Zusammensetzung des betreffenden Klanges; denn wenn die Pfeifen aufhören zu tönen, schwingen die Stimmgabeln noch eine Zeit lang, und die Gesammtheit ihrer Bewegungen, die an die Luft und das Trommelfell übertragen werden, erzeugen den Klang der Pfeife.

stimimte Klangfarbe müsse durch die Ordnung und die Anzahl der Schwingungen bestimmt werden, die die aliquoten Theile der Saite ausführten . . . Könnte man die Schwingungen der aliquoten Theile unterdrücken, so hätten alle Saiten, von welcher Beschaffenheit sie auch sonst wären, dieselbe Klangfarbe.“ (Résal, C. R. 79, 821; 1874).

¹⁾ A. M. Mayer, American Journal of sciences and arts (3), 8, Aug. und Sept. 1874, und Journal de physique 4, 184 (Maurat).

²⁾ Man kann auch die Membran des Phonautoskops (331) auf irgend eine Art in Schwingung versetzen.

408. Einfluss der Phase. — Da die musikalische Klangfarbe nur durch die Zahl und Intensität der einfachen Töne bestimmt ist, in die der Klang nach dem Fourier'schen Satze zerlegt werden kann, so scheint die Phase ohne Bedeutung zu sein. Das ist in der That nach den Helmholtz'schen Untersuchungen der Fall, so dass „die Klangfarbe des musikalischen Theiles eines Klanges nur abhängt von der Zahl und der Stärke der Theiltöne, nicht von ihren Phasenunterschieden.“ Dieser Satz, der von verschiedenen Forschern¹⁾ bestätigt wurde, ist von König²⁾ angegriffen worden; sein Verfahren besteht darin, eine unbegrenzte Sinuslinie vor einem Spalt von bestimmter Breite vorbeigehen zu lassen, aus dem ein Luftstrom austritt. Hierdurch wird aber die Einfachheit des Tones nicht so sicher gewährleistet, als dass man die Erklärung zugeben könnte, die er für die sonst so interessanten Erscheinungen aufstellt.

409. Mechanismus des Hörens.³⁾ — Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, müssen wir noch angeben, wie das Ohr die Fähigkeit ausüben kann, die Bewegungen der Luft in pendelartige Schwingungen zu zerlegen.

Das wesentlichste Organ für den Vorgang des Hörens scheint die *Membrana basilaris* zu sein; sie besteht aus parallelen Fasern, deren Längen im Verhältniss von 1 : 12 von der Basis bis zur Spitze der *Schnecke* wachsen. Auf diese Fasern stützen sich die *Corti'schen Bögen*, an die sich Cellen mit Wimperfortsätzen schliessen und die Verbindung mit den Enden des Hörnerven bilden.

v. Helmholtz nimmt an, dass jede Faser für einen besonderen Ton abgestimmt ist; und da ihre Anzahl wenigstens 6000 beträgt, so scheint die *Membrana basilaris* für jeden einfachen Ton der musikalischen Scale eine besondere Faser zu haben. Ausserdem ist zu bemerken, dass jede Faser nicht genau auf einen Ton abgestimmt zu sein braucht; sie wird nur von diesem Ton in besonderer Weise erregt (401). Nach der Dämpfungsfähigkeit, die das Ohr besitzen muss, um Triller von zehn Tönen in der Secunde wahrzunehmen, schätzt v. Helmholtz, dass die Intensität der Schwingung, die in einer Hörfaser durch einen Ton erregt wird, der um einen halben Ton von dem Eigenton der Faser abweicht, noch $\frac{1}{10}$ von derjenigen Intensität beträgt, die dem vollständigen

¹⁾ Siehe besonders die Arbeit von Schneebeli über die Vocale.

²⁾ König, Wied. Ann. 14, 369, 1881, und Quelques expériences 218.

³⁾ Dem Buche von Gavarret, l'Acoustique biologique (Paris 1877) sind zahlreiche Figuren entlehnt worden.

Einklang entspricht. Fig. 160 giebt eine Vorstellung von dem Gesetz, nach der die Intensität des Mitschwingens abnimmt, wenn die Differenz der Tonhöhe zunimmt: ab und bc bedeuten jedes die Breite eines ganzen Tons; bd ist die maximale Intensität, die der mitschwingende Körper bei vollem Einklang mit dem erregenden besitzt. Dieselbe Curve giebt die Intensität der Schwebungen an,

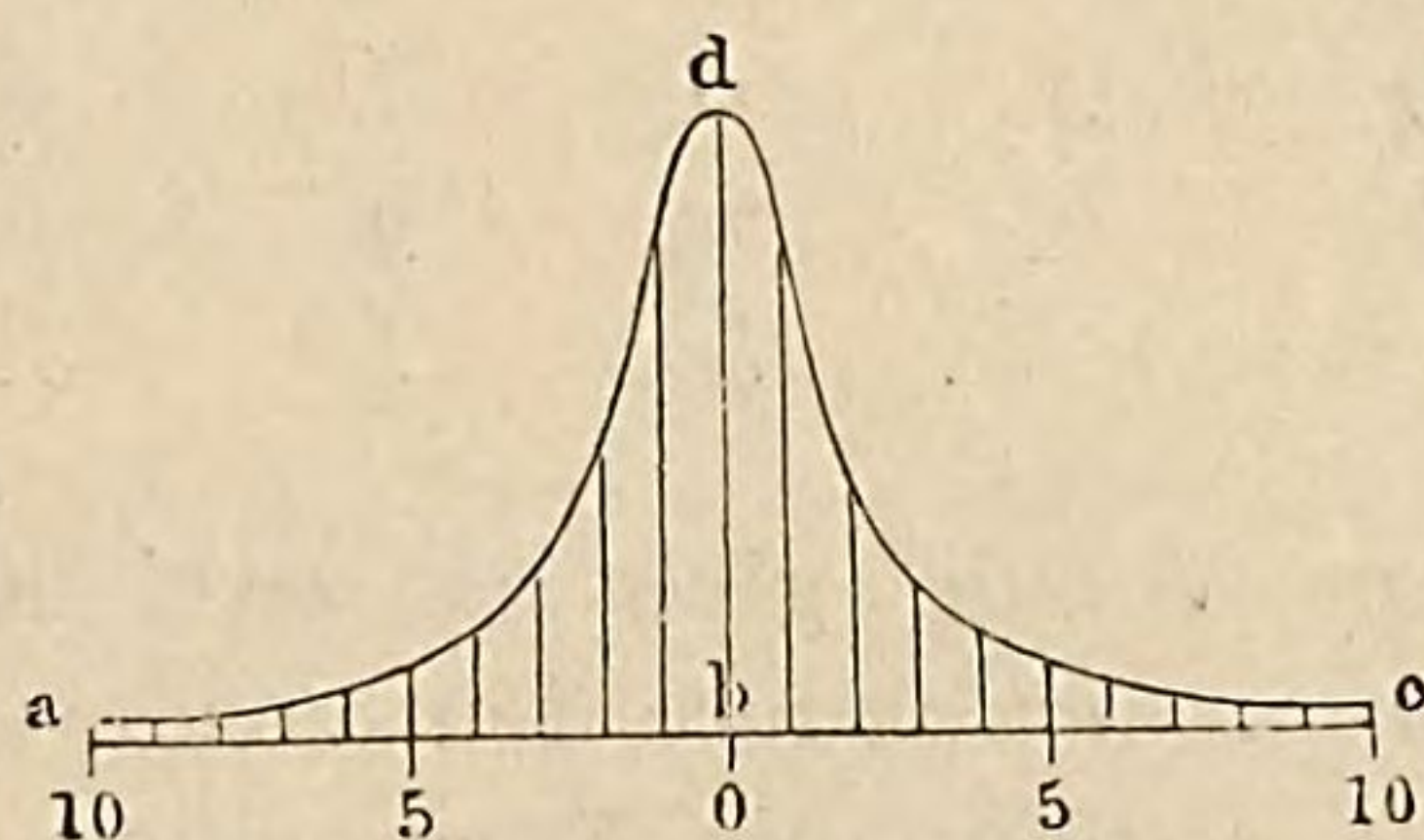


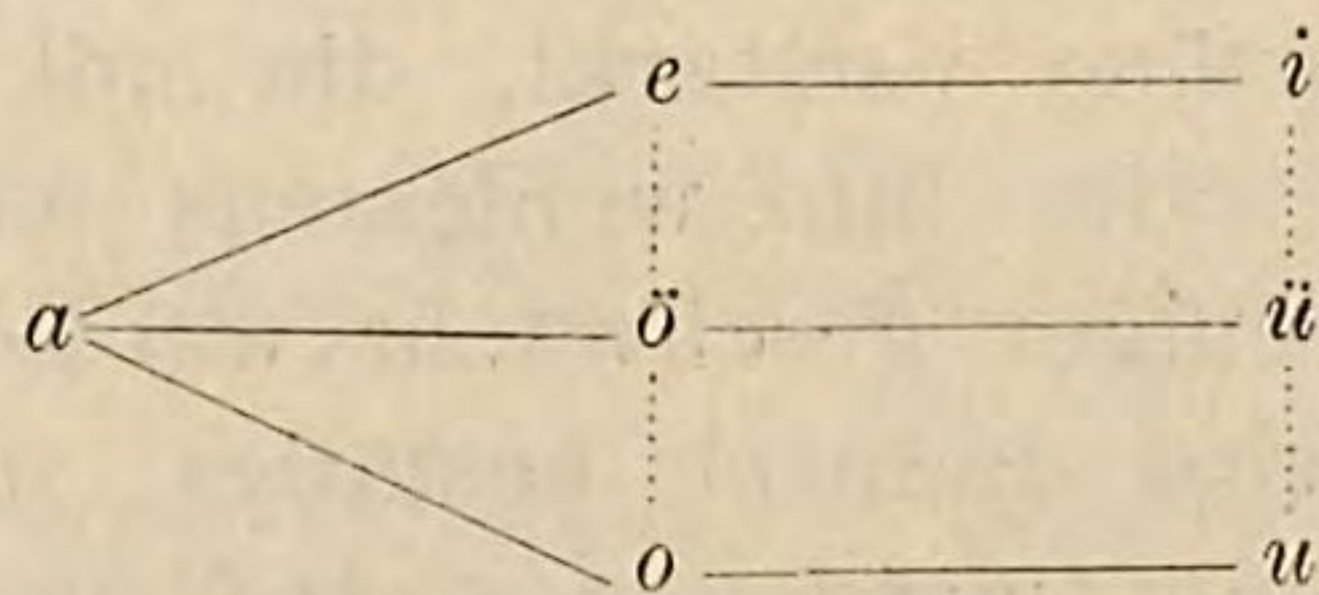
Fig. 160.

die im Ohr von zwei verschiedenen Tönen der Tonleiter hervorgerufen werden; alsdann bedeuten schon 5 Teilstriche einen ganzen Ton, da der Zwischenraum der beiden Töne doppelt so gross ist wie die Entfernung, die jeder von ihnen von der mittleren Faser hat: bedeutet i die Intensität, die der so bestimmten Abscisse entspricht, so ändert sich die Intensität der Schwebungen beider Töne von 0 bis $4i$.

410. Die Vocale der menschlichen Stimme. — Das Organ der menschlichen Stimme ist eine membranöse Zunge (364), deren Ansatzrohr von Hohlräumen (Schlund, Mundhöhle und Nase) gebildet wird, die einen Resonator von veränderlicher Gestalt und verschiedenen Dimensionen darstellen.

Die durch dies Organ hervorgebrachten Töne zerfallen in Vocale und Consonanten.

Die Vocale gruppieren sich nach ihrer Verwandtschaft folgendermaassen:



Unterwirft man sie der Analyse, so bemerkt man im Allgemeinen sechs bis acht wahrnehmbare Obertöne, die aber für die verschiedenen Vocale sehr verschiedene Intensität besitzen. Für jeden Vocal nimmt nämlich der Mund eine bestimmte Form an und verstärkt folglich einen gewissen Ton. Diese Verstärkung, die

Donders¹⁾ entdeckte (als er die Vocale mit leiser Stimme aussprach), hat v. Helmholtz bestätigt: war der Mund für die Aussprache eines Vocals geöffnet, so näherte er ihm abwechselnd verschiedene Stimmgabeln und merkte sich die, deren Ton besonders verstärkt wurde.²⁾ Er hat auf diese Weise folgende *Klänge* der verschiedenen Vocale gefunden:

<i>U</i>	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>Ö</i>	<i>Ü</i>	<i>E</i>	<i>I</i>
<i>f</i>	<i>b</i> ₁	<i>b</i> ₂	<i>cis</i> ₃	<i>g</i> ₃	<i>b</i> ₃	<i>d</i> ₄
			<i>f</i> ₁	<i>f</i>	<i>f</i> ₁	<i>f</i> .

Für verschiedene Vocale giebt es zwei Klänge, von denen der eine dem hinteren, der andere dem vorderen Theile der Mundhöhle entspricht, die alsdann die Form eines mehr oder weniger langen Flaschenhalses annimmt.

Nach König, der diese Versuche sorgfältig wiederholte, würden für *U* und *I* die charakteristischen Töne *b* und *b*₄ sein, so dass man folgende sehr einfache Reihe hätte:

<i>U</i>	<i>O</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>I</i>
<i>b</i>	<i>b</i> ₁	<i>b</i> ₂	<i>b</i> ₃	<i>b</i> ₄

Diese Bestimmungen sind ziemlich schwierig, da sich die zu messenden Grössen wesentlich ändern. In Wirklichkeit ist ein Vocal durch einen Buchstaben sehr schlecht definirt, der verschiedene Klänge bei den verschiedenen Völkern, bei verschiedenen Personen und selbst bei derselben Person unter verschiedenen Umständen bezeichnet: wirklich definirt wären die Vocale nur durch die Klangfarbe.

Trotz dieser Schwierigkeiten behauptet v. Helmholtz, dass die Mundhöhle für jeden Vocal eine bestimmte Resonanz ausübt; diese ist von der Tonhöhe unabhängig, in der der Vocal ausgesprochen wird, so dass der Mund in dem Klange der Stimmblätter alle die Obertöne verstärkt, die mit einem seiner Eigentöne zusammenfallen oder ihm wenigstens nahe liegen, während andere mehr oder weniger geschwächt werden.

Diese Theorie wird dadurch bestätigt, dass für jeden Vocal gewisse Töne bevorzugt werden (es sind dies die dem Eigenton, der tieferen Octave oder der tieferen Duodecime nahen Töne).

¹⁾ Donders, Archiv für die holländischen Beiträge 1, 157; Berlin 1858.

²⁾ Wir wollen auch noch das Verfahren Auerbach's erwähnen; er legt den Finger auf den Mund, nachdem er diesen für die Aussprache des Vocals gestellt hat, dessen Klang bestimmt werden soll.

So lässt sich U , dessen charakteristischer Ton f ist, am leichtesten auf die Töne f und seinen benachbarten e und d , wie auf F singen.

E , dessen charakteristischer Ton f_1 ist, passt am besten zu f_1 und den etwas höheren Noten bis e_1 , ebenso zu den Untertönen von f_1 , nämlich zu f und B . Obwohl E durch seinen zweiten charakteristischen Ton in die oberen Tonlagen gehört, so ist es doch zusammen mit U der Vocal des Basses (der gewöhnlich von F bis d_1 reicht).

Die Sopranstimme (von h bis g_2)¹⁾ passt zu den Klängen O und A : deshalb verleiht auch die italienische Sprache, die so reich an diesen Endungen ist, solchen Stimmen einen ganz besonderen Reiz.

Der Einfluss des charakteristischen Tones tritt besonders bei den Noten hervor, die an der Grenze der Stimmlage stehen. Eine Frauenstimme, die einen tieferen Ton als c_1 singen will, geht nothwendigerweise in O oder U über; deshalb ist dieser dumpfe Laut besonders der Stimme des Contra-Alt (e bis c) eigenthümlich. Alle Sänger kennen die Verwandtschaft zwischen Lauten und Tönen aus Erfahrung und wissen daraus Vorthail zu ziehen.²⁾

Willis,³⁾ dessen Arbeiten Wheatstone⁴⁾ dazu verleitet haben, zuerst die Theorie der Klänge aufzustellen, hatte es versucht, die Laute der Stimme durch mitschwingende Zungenpfeifen von veränderlicher Länge hervorzubringen; der Erfolg war ziemlich befriedigend.⁵⁾

v. Helmholtz wandte zu demselben Zweck seinen Apparat (407) an, der folgende Stimmgabeln besitzt (die vier letzten sind später hinzugefügt und klingen nur schwach):

B	b	f_1	b_1	d_2	f_2	a_2	b_2	d_3	f_3	as_3	b_3
1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16

Der Grundton dieser Reihe bildete ein sehr dumpfes U , das sich mehr dem gesprochenen U näherte, wenn man damit die

¹⁾ Wir meinen hier die gewöhnlichen Stimmen, denn einige Bässe gehen bis F_1 herunter, während Sopranstimmen c_4 mit 2100 Schwingungen erreichen.

²⁾ Laugel, *La voix, l'oreille et la musique*; Paris 1867, S. 58.

³⁾ Willis, *Cambridge Phil. Trans.* **3**, 231; 1863.

⁴⁾ Wheatstone, *London and Westminster Review*; Oct. 1837.

⁵⁾ Faber in Wien hat nach demselben Princip eine Sprachmaschine gebaut; die Klänge werden hier durch verschiedene Öffnungen hervorgebracht, die mit einem besonderen Hohlraum in Verbindung stehen. Mit Hülfe gewisser Theile, die die Wirkungsweise der Zähne, der Lippen und der Zunge nachahmen, kann man die Consonanten hervorbringen. Das Resultat ist befriedigend (*Journal de physique* **8**, 274; 1872).

leise klingenden Töne 2 und 3 verband. Man erhielt ein sehr schönes *O*, wenn man ausser dem etwas unterdrückten Grundton den Ton 4 stark und die Töne 2, 3 und 5 schwächer klingen liess. *A* brachte man hervor, wenn man möglichst stark die höchsten Töne der Reihe vom fünften an und die anderen schwach zum Tönen brachte. Der Apparat gab auch noch *E*, wenn man den Ton 3 verstärkte, aber es war der charakteristische Ton von *I* nicht zu erreichen.

Seit den grundlegenden Helmholtz'schen Arbeiten ist der Gegenstand oft wieder aufgenommen worden.

Der gewöhnliche Empfangsapparat für die Schwingungen, die Membran, wurde in allen seinen Formen und Arten für das Studium der menschlichen Stimme verwandt.

Indem man in eine Kapsel spricht, die mit einer Membran verbunden ist und indem diese auf einen Schreibstift [Logograph

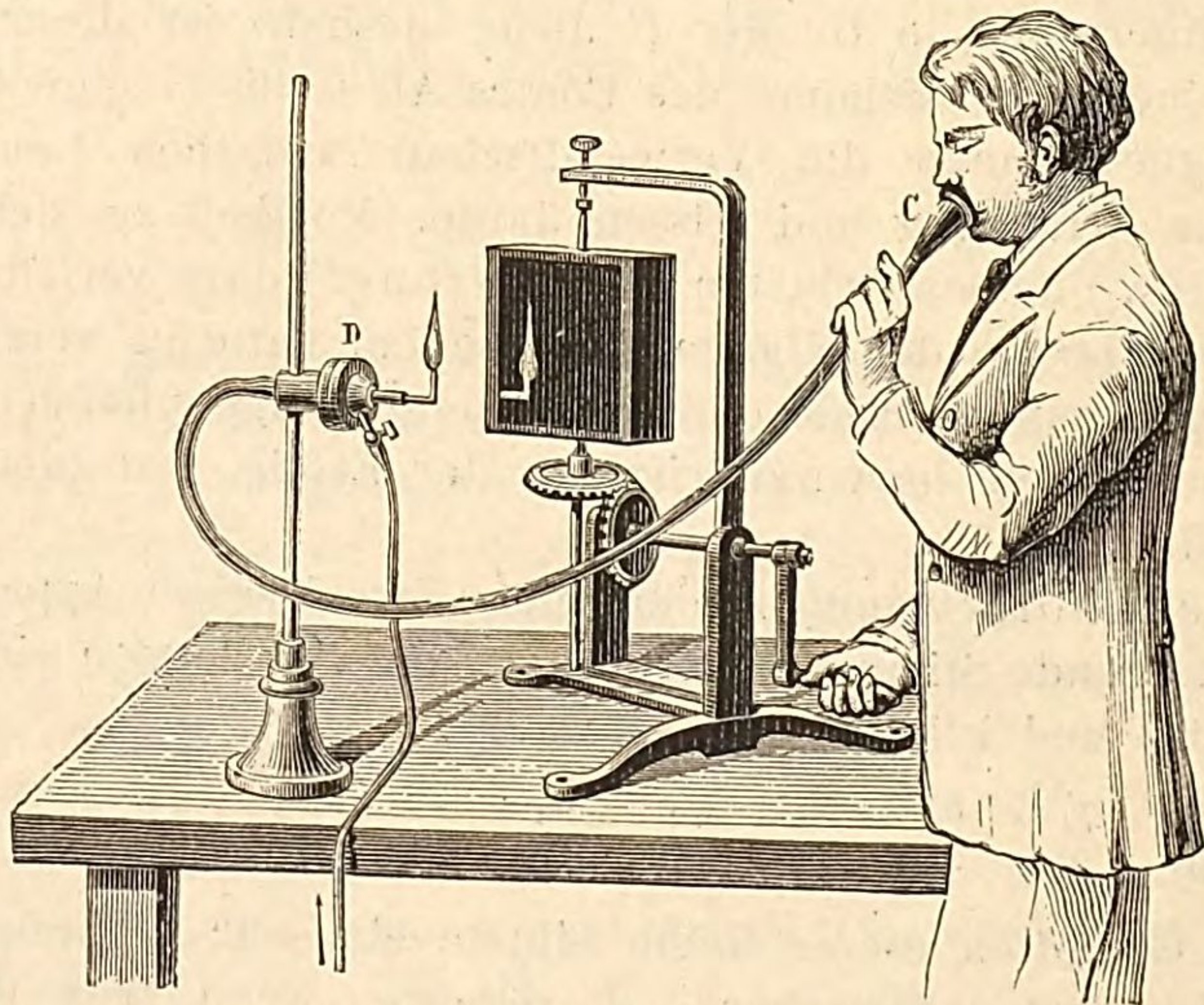


Fig. 161.

von Barlow,¹⁾ Phonograph von Schneebeli²⁾] oder auf eine manometrische Flamme (König)³⁾ wirkt, erhält man die Figuren für die Vocale von verschiedener Höhe und selbst An-

¹⁾ Barlow, Proceedings of the Royal Society, 1874, und Journal de physique 8, 78.

²⁾ Schneebeli, Archives de Genève (2), 114, 79 und (3), 1, 149; 1878—1879.

³⁾ König, Pogg. Ann. 146, 161, 1872, und Quelques experiences 56.

deutungen gewisser Consonanten.¹⁾ Wird der Boden einer Gaskapsel von der Platte eines Telephons gebildet (Frölich),²⁾ so

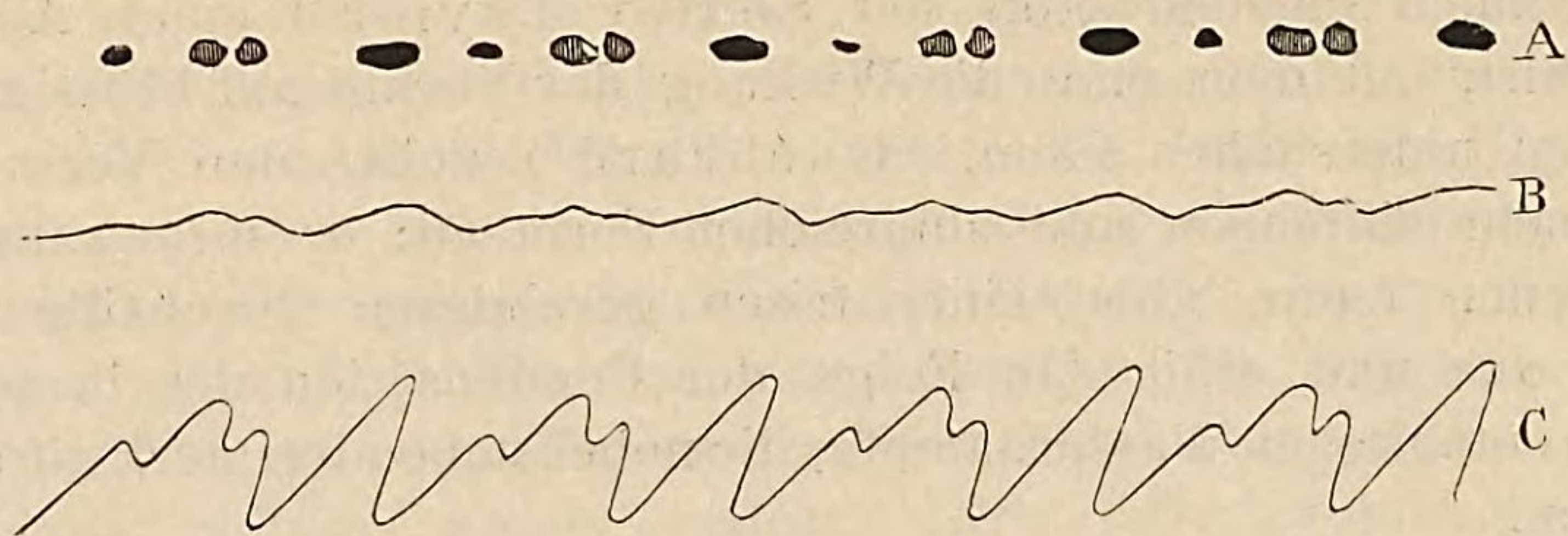


Fig. 162.

nimmt die Flamme ähnliche Gestalten an, die nur etwas verwickelter sind. Die Analogie findet sich auch bei den phono-

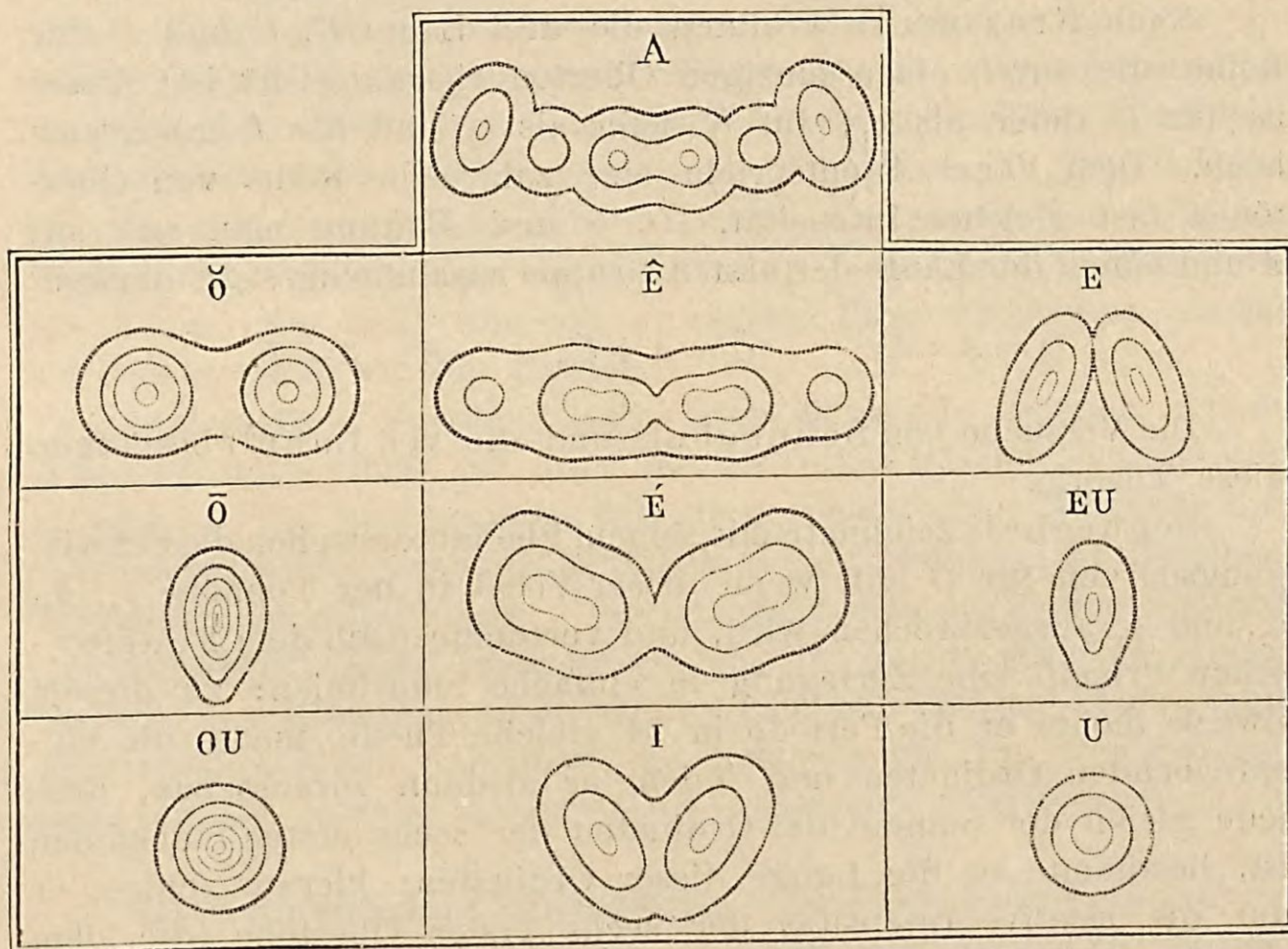


Fig. 163.

graphischen Aufzeichnungen, wie Fig. 162 zeigt, in der A. M. Mayer³⁾ bei A die Eindrücke darstellt, die ein Vocal auf Zinnfolie

¹⁾ So erzeugt das stumme R (das man ohne Vocal unbegrenzt lange sprechen kann) in der Flamme ein Zittern; die Stosslaute (*b, d, g; p, t, k*) machen sich bei dem Logographen durch einen plötzlichen Sprung bemerkbar.

²⁾ Frölich, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus 291; Berlin 1887.

³⁾ A. M. Mayer, Journal de physique 7, 113; 1878.

hervorbringt, *B* zeigt den Querschnitt dieser Folie und *C* das Profil der manometrischen Flamme für denselben Vocal. Unter dem Namen Phoneidoskop hat Sedley Taylor¹⁾ einen Apparat construirt, mit dem man die Wirkung der Vocale auf Flüssigkeitslamellen untersuchen kann. Guébhard²⁾ stellte den Versuch in einer sehr einfachen und sinnreichen Form an: er sprach die verschiedenen Laute über einer frisch gereinigten Quecksilberoberfläche aus und erhielt in Folge der Condensation des in seinem Athem enthaltenen Wasserdampfes die nebenstehenden merkwürdigen Figuren.

Die Ergebnisse aller dieser Untersuchungen stimmen im Allgemeinen mit der Helmholtz'schen Theorie überein, die aber von Anfang an von Quanten³⁾ angegriffen worden ist und auch heute noch nicht von allen Physikern anerkannt wird.

Nach Grassmann⁴⁾ bilden die drei Laute *U*, *Ü* und *I* eine Reihe, die durch einen einzigen Oberton charakterisirt ist; dieser ist für *U* tiefer als c_1 , für *Ü* tiefer als e_2 und für *I* unbegrenzt hoch. Dem Vocal *A* entspricht eine zahlreiche Reihe von Obertönen fast gleicher Intensität. *O*, *Ö* und *E* kann man sich aus *A* und einem der Laute der ersten Gruppe zusammengesetzt denken:

$$O = A + U, \quad \ddot{O} = A + \ddot{U}, \quad E = A + I.$$

Die Versuche von Schneeбели und die von Lahr⁵⁾ bestätigen diese Theorie.

Schneeбели zeichnete mit seinem Phonautographen die Schwingungscurven für *O* auf, wenn dieser Vocal in der Tonhöhe e_1 , g_1 , c_2 und e_2 ausgesprochen wird, und versuchte nach dem Fourier'schen Princip eine Zerlegung in einfache Sinuslinien: zu diesem Zweck theilte er die Periode in 24 gleiche Theile, maass die entsprechenden Ordinaten und indem er alsdann voraussetzte, dass jede gleich der Summe der Ordinaten der sechs ersten Sinuslinien ist, bestimmte er die Länge dieser Ordinaten; hieraus schloss er auf die relative Intensität der sechs ersten Obertöne (die dem Quadrat der Amplitude und den entsprechenden Schwingungszahlen proportional sind); auf diese Weise fand er, dass die Klangfarbe des Lautes *O* nicht durch eine Verstärkung eines bestimmten Tons charakterisirt ist, der stets derselbe bleibt, wie sich auch der

¹⁾ Sedley Taylor, Journal de physique **8**, 92; 1879.

²⁾ Guébhard, Journal de physique **9**, 242; 1880.

³⁾ v. Quanten, Pogg. Ann. **154**, 272; 1875.

⁴⁾ Grassmann, Wied. Ann. **1**, 606; 1877.

⁵⁾ Lahr, Wied. Ann. **28**, 94; 1886.

Grundton ändert, sondern durch das beständige Vorherrschen der Octave.

Lahr, der die Frage wieder aufnahm, hat zuerst die Helmholtz'schen Experimente über die Resonanz der Mundhöhle wiederholt; ferner untersuchte er die Synthese der Laute mit Hülfe von Stimmgabeln von Neuem und wandte alsdann den Phonographen an. Schon Fleeming Jenkin und Ewing¹⁾ hatten die Aufmerksamkeit auf die Erscheinungen gelenkt, die auftreten, wenn der Apparat bei der Wiedergabe der hineingesprochenen Laute mehr oder weniger schnell gedreht wird. Wie Lahr beobachtete, giebt der Apparat, in dem bei einer mittleren Geschwindigkeit der Walze ein *U* hineingesprochen ist, zuerst ein *U* wieder, das sich bei grösserer Geschwindigkeit in *Ü* verwandelt, ja selbst in *I*, wenn die Geschwindigkeit hinreichend gesteigert wird. In ähnlicher Weise geht *O* in *Ö* und darauf in *E* über, wenn die Geschwindigkeit in entsprechender Weise wächst. Andererseits gelangte Lahr, als er die auf der Zinnfolie hervorgerufenen Eindrücke ausmaass und sie wie Schneebeli berechnete, zu Ergebnissen, die mit der Grassmann'schen Theorie übereinstimmen. Er zog deshalb die Schlussfolgerung daraus, dass die Laute in Bezug auf die Natur, die Zahl und die Intensität ihrer Einzeltöne ebenso verwickelt sind wie die Farben.

Gegen diese Versuche lassen sich Einwände erheben, wie es Auerbach²⁾ gethan hat, der die Helmholtz'sche Theorie vertheidigte. Die Bedingungen für die Resonanz einer Membran und besonders einer solchen aus Metall sind ohne Zweifel nicht dieselben, wie die für eine Luftmasse. Deshalb kann man nicht ohne Weiteres den Angaben solcher Apparate trauen, die in Bezug auf die Klangfarbe so unvollkommen sind, wie das Telephon und der Phonograph. Nichtsdestoweniger hält man die Frage heute für weniger verschieden als damals, wo das Helmholtz'sche Werk erschien.

411. Theorie der Consonanz. — *Die Theorien von Pythagoras, Sauveur, Euler und Rameau.* — Für jede Consonanz besteht eine um so einfachere Beziehung zwischen den beiden betreffenden Tönen (**353**), je vollkommener die Consonanz ist.

Die Pythagoräer, die durch ihre Messungen unmittelbar auf diese Erscheinung gestossen waren, suchten sie aus ihrem Gesetz der Weltharmonie zu erklären.

¹⁾ Jenkin und Ewing, *Nature* **18**, 340 und 394; 1878.

²⁾ Auerbach, *Pogg. Ann., Ergänz.-Band*, **8**, 177 und *Wied. Ann.* **3**, 152 und **4**, 508; 1878.

Sauveur¹⁾ ging von dem Grundsatz aus, dass „die Seele ihrer Natur nach einmal die einfachen Sinneseindrücke liebt, weil sie dadurch nicht ermüdet, sodann aber auch die wechsellvollen, weil diese die langweilige Einförmigkeit verhindern“. Er erklärte deshalb das Wohlgefallen, das die Accorde bei uns hervorrufen, aus dem Zusammentreffen von Eindrücken, die in regelmässigen und sehr kurzen Intervallen auf einander folgen. Nun coincidiren alle Arten von Schwingungen, die dem Einklang, der Octave, der Duodecime oder der Quinte entsprechen. Findet das Zusammentreffen nur bei jeder fünften oder sechsten Schwingung statt, wie bei der Terz, so sind die Sinneseindrücke weniger einfach, aber noch angenehm wegen ihres Wechsels. Darüber hinaus hört die angenehme Empfindung auf, die Schwebungen sind unangenehm für uns. „In der That bezeichnen die Musiker die Accorde, deren Schwebungen nicht wahrgenommen werden können, als Consonanzen, während die anderen, die Schwebungen hervorrufen, als Dissonanzen gelten; ist ein Accord in der einen Octave eine Dissonanz, während er in der anderen eine Consonanz bildet, so kommt dies daher, dass er in der einen Schwebungen zeigt und in der anderen nicht.“ Ausserdem wäre der Wohlklang der Accorde sowohl ihrer Natur als dem Gebrauch nach nicht fest bestimmt, woraus sich die Verschiedenheit des musikalischen Geschmacks bei den verschiedenen Völkern erklären liesse.

Einige dieser Gedanken finden sich in der metaphysischen Theorie Euler's²⁾ wieder: z. B. „die angenehme Empfindung, die die Consonanz hervorruft, entsteht aus der Regelmässigkeit, die den Geist nicht ermüdet“; andere in Helmholtz's physikalischer Theorie; das Princip der Coincidenz verschiedener Eindrücke ist vielleicht zu sehr vernachlässigt.

Wir wollen noch die Rameau'sche³⁾ Theorie erwähnen. Die Consonanz erklärt sich nach diesem bekannten Musiker aus der natürlichen Eigenschaft der Körper, ausser dem Grundton eine Reihe von Obertönen erklingen zu lassen; diese Eigenschaft wird als *vielfache Resonanz* bezeichnet. Da die Octave nichts anderes sei als eine *Wiederholung*, so stimme das Ohr von selbst die Obertöne für die Consonanzen auf den gewünschten Grad herab. Diese

¹⁾ Sauveur, Mémoires de l'Académie; 1700.

²⁾ Euler, Mémoires de l'Académie; 1740.

³⁾ Rameau, Nouveau System de musique théorétique; Paris 1726, und Demonstration du principe de l'harmonie; Paris 1750. Siehe auch d'Alembert, Éléments de musique suivant les principes de Rameau; Lyon 1762.

Erklärung ist ohne Zweifel ungenügend; doch hat Rameau insofern ein richtiges Princip aufgestellt, als er den Obertönen die Hauptrolle bei den Accorden zuschrieb.

Helmholtz'sche Theorie. — Die Helmholtz'sche Theorie stützt sich auf die Thatsache, dass die Schwebungen in gewissen Hörnerven intermittirende Erregungen hervorrufen, die, wie alle Empfindungen ähnlicher Art (Flackerndes Licht, Knarren u. s. w.), unangenehm sind. Nach Helmholtz entsprechen dem Maximum der unangenehmen Empfindung 33 Schwebungen in der Secunde: es ist dies die scharfe und schrille Dissonanz, die durch das Zusammentönen von h_1 (495 Schwingungen) und c_2 (528 Schwingungen) entsteht. Über 132 Schwebungen in der Secunde nimmt das Ohr nicht mehr wahr: die Quinte c_1 (264 Schwingungen) und g_1 (396 Schwingungen) bildet daher eine vollkommene Consonanz. Die Quarte c_1 (264 Schwingungen) und f_1 (352 Schwingungen) zeigt schon eine leise Rauheit, die noch mehr bei den Terzen c_1 (264 Schwingungen), e_1 (330 Schwingungen) und c_1 (264 Schwingungen), es_1 (308 Schwingungen) hervortritt. In den tieferen Octaven bilden die Terzen vollständige Dissonanzen. v. Helmholtz behauptet ferner, dass die Reinheit der Schwebungen und folglich auch die Rauigkeit des Intervalls nicht allein von dem absoluten Unterschied der Schwingungszahlen abhängt, sondern auch von dem Verhältniss dieser Zahlen, oder anders ausgedrückt, von der Weite des Intervalls.

So sind

der halbe Ton . . .	h_1	495	—	c_2	528	Schwing.
der ganze Ton . . .	c_1	264	—	d_1	297	„
die kleine Terz . . .	e	165	—	g	198	„
die grosse Terz . . .	c	132	—	e	165	„
die Quart	G	99	—	c	132	„
die Quinte	C	66	—	G	99	„

die alle 33 Schwebungen geben, von einer offenbar abnehmenden Rauigkeit. Wenn zwei Töne in der Tonleiter weit genug von einander entfernt liegen, so schwingen in der That die Fasern im Ohr, die von diesen beiden Tönen gleichzeitig erregt werden, so schwach, dass die Schwebungen nicht mehr wahrgenommen werden können.

Bis hierher haben wir vorausgesetzt, dass die beiden zusammentreffenden Töne alle beide einfach sind. Die musikalischen Klänge enthalten indessen stets Obertöne, deren Bedeutung unmittelbar aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

Einklang . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
Octave . . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{10}$
Duodecime .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{6}$			$\frac{1}{9}$	
Quinte . . .	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
		3	6		9	12		15	18	21
Quarte . . .	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
		4	8	12		16	20	24	28	32
Grosse Sexte	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
		5	10		15	20		25		30
Grosse Terz .	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
		5	10	15	20		25	30	35	40
Kleine Terz .	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
		6	12	18	24	30	36	42	48	54
Kleine Sexte	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
		8	16	24		32		40	48	56

Die Obertöne der beiden Töne des Einklangs oder der Prime fallen alle zusammen: die Consonanz ist *absolut*, und die geringste Abweichung bringt eine vollständige Störung hervor, da alle Obertöne gegenseitig mit einander Schwebungen erzeugen.

Alle Elemente der Octave sind schon in der Tonika enthalten, die deshalb einfach verstärkt wird: die Consonanz ist auch hier *absolut*.

Bei der Duodecime kann der zweite Klang nur gewisse Elemente des ersten verstärken; dasselbe würde für die folgenden Obertöne gelten. Da aber gewöhnlich die Intensität der Obertöne schnell abnimmt, so ist die Abgrenzung der Intervalle, die man auf die Coincidenz der höheren Obertöne gründet, für das Ohr um so unsicherer, je höher die Obertöne sind.

Nach diesen absoluten Consonanzen kommen die Quinte und die Quarte, die v. Helmholtz *vollkommene* Consonanzen nennt, weil sie in allen Theilen der Tonleiter angewandt werden können, ohne dass der Wohlklang der Intervalle darunter leidet. Die Quarte ist indessen weniger vollkommen und reicht an die fol-

genden Consonanzen, die grosse Sexte und die kleine Terz, heran, die man als *mittlere* Consonanzen bezeichnen kann; sie sind in den hohen Tonlagen gut, aber im Bass schlecht, obgleich sie noch eine lebhaftete Klangfarbe besitzen.

Endlich folgen die *unvollkommenen* Consonanzen, die kleine Terz und die kleine Sexte, die „nicht mehr selbständig bestimmt sind“ und in den tieferen Tonlagen noch schlechter als die früheren wirken.

Der Einfluss der Obertöne beschränkt sich übrigens nicht auf die Consonanzen: „ein und derselbe Oberton, der zwei Klängen einer Melodie gemeinsam ist, verleiht beiden eine Art Verwandtschaft, die das Ohr wahrnimmt und die dem Künstler als Band zwischen ihnen dienen kann.“

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Zeitschrift
für den physikalischen und chemischen Unterricht.

Unter der besonderen Mitwirkung von

Dr. E. Mach,
Professor an der deutschen Universität
zu Prag,

und

Dr. B. Schwalbe,
Professor und Direktor des dorotheenstädtischen
Realgymnasiums zu Berlin,

herausgegeben von **Dr. F. Poske.**

Preis des Jahrgangs von 6 Heften M. 10,—.

Zeitschrift für Instrumentenkunde.
Organ für Mittheilungen auf dem gesammten Gebiete
der wissenschaftlichen Technik.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der zweiten (technischen) Abtheilung der Physikalisch-
Technischen Reichsanstalt u. A.

Redakteur: **Dr. A. Westphal** in Berlin.

Preis des Jahrgangs von 12 Heften M. 18,—.

Elektrotechnische Zeitschrift.
(Centralblatt für Elektrotechnik.)
Organ des Elektrotechnischen Vereins.
Chef-Redakteur: **F. Uppenborn** in Berlin.
Preis des Jahrgangs von 52 Heften M. 20,—.

Physikalisch-chemische Tabellen

von

Dr. H. Landolt,
Prof. d. Chemie a. d. Landwirthsch. Hochschule
zu Berlin, Mitgl. d. K. Akademie d. Wissensch.

und

Dr. Richard Börnstein,
Professor der Physik
a. d. Landwirthschaftl. Hochschule zu Berlin.

Zweite, um das Doppelte vermehrte Auflage
in Vorbereitung.

Die zweite, um das Doppelte vermehrte Auflage des Werkes befindet
sich unter der Presse und wird bis Ende 1893 erscheinen.

Chemiker-Kalender.
Ein Hülfsbuch für Chemiker, Physiker, Mineralogen, Industrielle,
Pharmaceuten, Hüttenmänner u. s. w.

Von

Dr. Rudolf Biedermann.

In zwei Theilen.

I. Theil gebunden in Leinwand. — II. (Beilage) geheftet, Preis zusammen M. 3,—.
I. Theil gebunden in Leder. — II. (Beilage) geheftet, Preis zusammen M. 3,50.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Verlag von Julius Springer in Berlin N.

Wilhelm Webers Werke.

Herausgegeben von der
Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
— In sechs Bänden. —

Fertig liegen vor:

ERSTER BAND:

Akustik, Mechanik, Optik und Wärmelehre.

Besorgt durch **Woldemar Voigt**.

Mit dem Bildniss Webers, 13 Tafeln und in den
Text gedruckten Abbildungen.

Preis M. 20,—. In Halbfranzband M. 22,50.

DRITTER BAND:

Galvanismus und Elektrodynamik.

Erster Theil.

Besorgt durch **Heinrich Weber**.

Mit 1 Tafel u. in den Text gedruckten Abbildungen.

Preis M. 20,—. In Halbfranzband M. 22,50.

In Vorbereitung befinden sich:

Vierter Band: Galvanismus und Elektrodynamik. II. Theil. Besorgt durch Heinrich Weber.

*Sechster Band: Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge. Besorgt durch Friedrich Merkel
und Otto Fischer.*

Beide gelangen bis Ende 1893 zur Ausgabe.

ZWEITER BAND:

Magnetismus.

Besorgt durch **Eduard Riecke**.

Mit 10 Tafeln und in den Text gedruckten
Abbildungen.

Preis M. 14,—. In Halbfranzband M. 16,50.

FÜNFTER BAND:

Wellenlehre

auf Experimente gegründet.

Besorgt durch **Eduard Riecke**.

Mit 18 Tafeln.

Preis M. 18,—. In Halbfranzband M. 20,50.

Experimental-Untersuchungen über Elektrizität

von

Michael Faraday.

Deutsche Uebersetzung von

Dr. S. Kalischer,

Privatdocenten an der Technischen Hochschule zu Berlin.

In drei Bänden gr. 8°.

*Erster Band. Mit in den Text gedruckten Abbildungen, 8 Tafeln und dem Bildniss Faradays.
M. 12,—. In Leinwandband M. 13,20.*

*Zweiter Band. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 6 Tafeln. M. 8,—. In Leinwand-
band M. 9,20.*

*Dritter Band. Mit in den Text gedruckten Abbildungen und 5 Tafeln. M. 16,—. In Leinwand-
band M. 17,20*

Elektrizität und Optik.

Vorlesungen,

gehalten von

H. Poincaré,

Professor und Mitglied der Akademie.

Autorisirte deutsche Ausgabe von

Dr. W. Jaeger und **Dr. E. Gumlich.**

Erster Band.

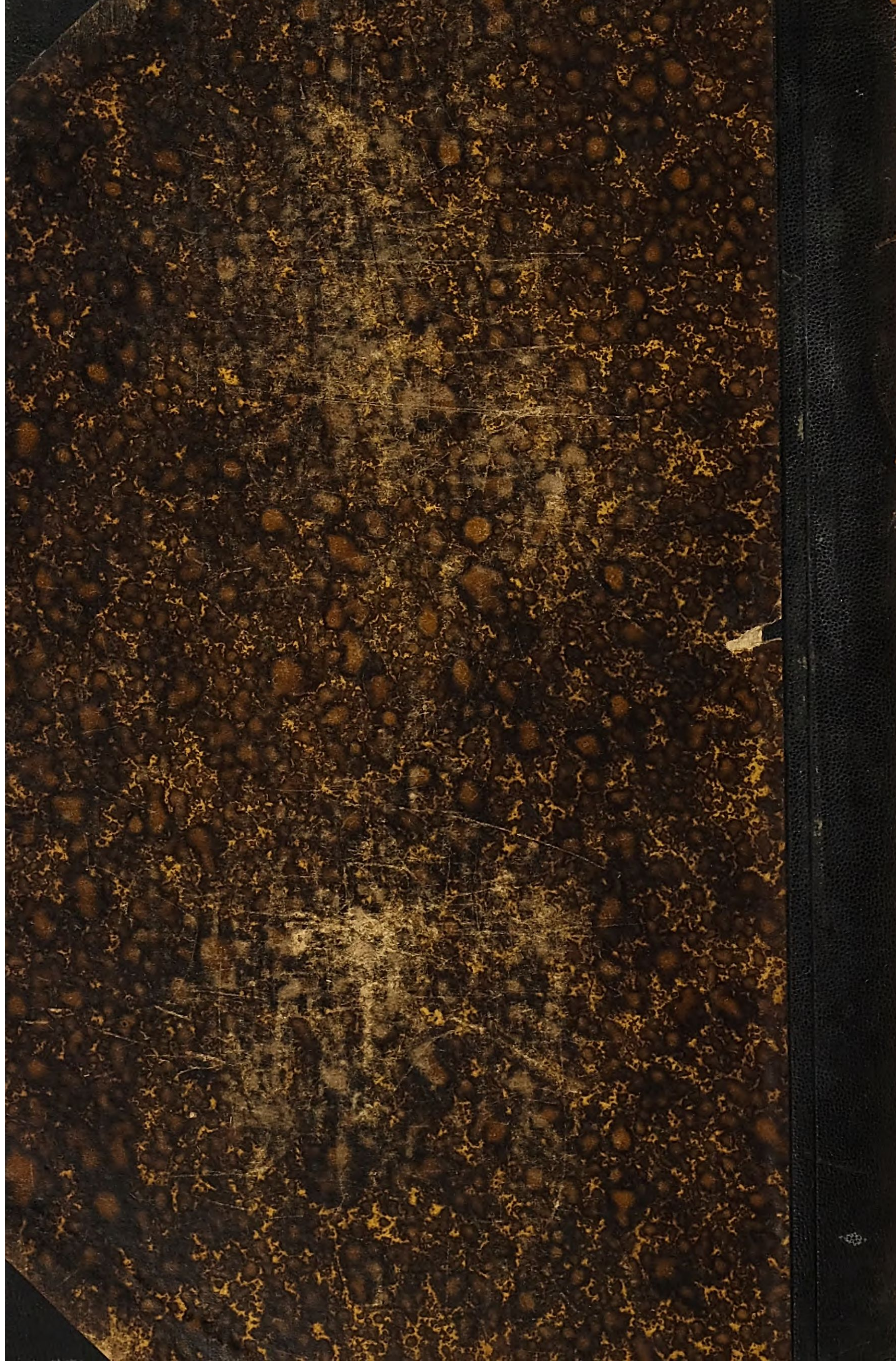
*Die Theorien von Maxwell u. die elektromagnetische Lichttheorie. Mit 39 in den Text gedr. Figuren.
Preis M. 8,—.*

Zweiter Band.

*Die Theorien von Ampère und Weber — Die Theorie von Helmholtz und die Versuche von Hertz.
Mit 15 in den Text gedruckten Figuren. Preis M. 7,—.*

Zu beziehen durch jede Buchhandlung.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.



Violle, Jules,

Lehrbuch der Physik

Bd.: 2,1

1893

Phys.g. 493 f,II-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11881014-3